Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 518.5

ИЗОМОРФИЗМ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВ ДИСКРЕТНЫХ СЕМЕЙСТВ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Д. Корольков

Аннотация: Доказан изоморфизм индексного множества произвольного вычислимого семейства общерекурсивных функций индексному множеству некоторого вычислимого дискретного семейства общерекурсивных функций.

Ключевые слова: индексное множество, вычислимое семейство, общерекурсивная функция.

Основным результатом статьи является доказательство изоморфизма индексного множества произвольного вычислимого семейства общерекурсивных функций индексному множеству подходящего вычислимого дискретного семейства общерекурсивных функций.

Один из подходов к классификации семейств общерекурсивных функций (о.р.ф.) состоит в исследовании индексных множеств этих семейств относительно клиниевской (главной вычислимой) нумерации $\kappa : \mathbb{N} \to R$ семейства всех одноместных частично рекурсивных функций (ч.р.ф.). На классе R также рассматривается стандартная топология, базис открытых множеств которой порождается конечными функциями.

Ю. Л. Ершов [1, 2] рассматривает исследования индексных множеств как важные в теории нумераций. В этом направлении возможны и другие подходы, см., например, [3]. Из первых работ отметим [4, 5].

Напомним некоторые определения и факты [1, 6, 7].

Нумерация $\alpha : \mathbb{N} \to A$ семейства конечных множеств A называется *сильно вычислимой*, если функция $f(i) =$ «число элементов множества αi» общерекурсивна.

Вычислимое семейство A называется *эффективно дискретным*, если существует такая сильно вычислимая последовательность конечных множеств $T_0, T_1, \dots$, что

(а) для всякого $X \in A$ найдется $T_i \subseteq X$;

(б) $T_i \subseteq T_j \Rightarrow T_i = T_j$;

(в) если $T_i \subseteq X_j \in A$ и $T_i \subseteq X_k \in A$, то $X_j = X_k$.

Вычислимое семейство A называется *дискретным*, если существует вычислимая последовательность конечных множеств с теми же свойствами. Дискретность невычислимых семейств определяется чисто топологическим путем.

Для всякого рекурсивно перечислимого множества P существует сильная последовательность конечных множеств $P^0 \subseteq P^1 \subseteq \dots$ такая, что $P = \cup P^i$, $i \in \mathbb{N}$. Символ множеств P^s с верхним индексом всегда будет означать элемент подобного представления P, которое считается известным из контекста либо произвольным.

Если $\alpha : \mathbb{N} \to A$ — вычислимая нумерация, то α_i^s означает конечную часть множества αi в некотором двойном подобном представлении (равномерном по s и i).

Будем говорить, что *нумерация α сводится к нумерации β*, $\alpha \leq \beta$, если существует такая общерекурсивная функция f, что при всех $x \in \mathbb{N}$ выполняется $\alpha x = \beta f(x)$ (короче, $\alpha = \beta f$).

Еще напомним, что любая вычислимая нумерация $\alpha : \mathbb{N} \to A$ семейства о.р.ф. A негативна (предикат $\alpha x \neq \alpha y$ рекурсивно перечислим), поэтому всегда существует однозначная вычислимая нумерация $\beta : \mathbb{N} \to A$, к ней сводящаяся, $\beta = \alpha f$.

Теорема. *Для каждого непустого вычислимого семейства о.р.ф. B существует вычислимое дискретное семейство о.р.ф. A такое, что их индексные множества изоморфны.*

Доказательство. Зафиксируем семейство B и его однозначную вычислимую нумерацию β и будем строить по шагам искомое дискретное семейство A через построение его вычислимой нумерации α.

Для достижения сводимости $\kappa^{-1}(A)$ к $\kappa^{-1}(B)$ построим вычислимую нумерацию γ такую, что $\gamma n \in A \Leftrightarrow \kappa n \in B$.

Рекурсивный оператор F для сведения индексного множества $\kappa^{-1}(A)$ к индексному множеству $\kappa^{-1}(B)$ будем задавать парой сильно вычислимых нумераций σ, τ начальных отрезков о.р.ф. таких, что выполнено условие

$$\sigma(m,i) \subseteq \sigma(z,j) \Rightarrow \tau(m,i) \subseteq \tau(z,j).$$

Определим

$$F(\kappa n) = \bigcup(\tau(i,j) : \sigma(i,j) \subseteq \kappa n).$$

Если при этом $\kappa n \in A \Leftrightarrow F(\kappa n) \in B$, то $\kappa^{-1}(A)$ сводится к $\kappa^{-1}(B)$.

Одновременно для подтверждения дискретности семейства A будем строить вычислимую нумерацию δ конечных функций, изолирующих элементы A.

Дадим сначала неформальное описание процедуры построения.

Во-первых, γ_n^t на каждом шаге t есть начальный отрезок n^z некоторой ступенчатой функции, принимающей значения $n, n+1, n+2$ и т. д., причем z не превосходит длины максимального начального отрезка, содержащегося в κ_n^t. Из этого будет следовать, что если κn — не о.р.ф., то γn — конечная функция. С другой стороны, γ_n^t будет увеличиваться в длине, если на шаге t нет противоречия с некоторой гипотезой $\kappa n = \beta k$. Возможно, на очередном шаге выяснится, что $\kappa n \neq \beta k$, но нет противоречия с $\kappa n = \beta l$. Тогда γ_n^t также будет расти. Таким образом, γn будет о.р.ф., если $\kappa n \in B$ или κn есть о.р.ф. — внешняя предельная точка для B. В первом случае число перемен гипотез $\kappa n = \beta k$ конечно и тогда γn попадет в A, во втором случае — бесконечно и поэтому γn не будет принадлежать A.

Во-вторых, каждая αm будет строиться как некоторая функция γn, если m связано с n, или же как другая функция, если m не связано ни с каким n. Каждая функция αm, чтобы заведомо стать о.р.ф., будет расширять свою область определения на каждом шаге построения, даже если доопределение связанной с ней γn на некоторых шагах будет приостановлено.

В-третьих, пара сильно вычислимых нумераций σ, τ будет строиться из начальных отрезков функций семейств A и B соответственно.

Перейдем к описанию конструкции. Будем обозначать через $\left[\kappa_n^p\right]$ максимальный начальный отрезок функции, содержащийся в κ_n^p.

Шаг t. Пусть $t = c(n,p)$.

Случай 1. $p = 0$ или $\left[\kappa_n^p\right] = \left[\kappa_n^{p-1}\right]$.

Оставим все функции в нумерации γ неизменными, $\gamma_i^t = \gamma_i^{t-1}$.

Возьмем наименьшее число m такое, что αm еще не определена, и для $i = 0, \dots, m-1$ сделаем следующее.

Доопределим функции αi на одно значение, равное предыдущему. Определим $\sigma(i,t) = \alpha_i^t$, $\tau(i,t) = \beta_{k(i)}^t$, где $k(i)$ — номер в нумерации β, связанный с первым номером i в нумерации τ, $i = 0, \dots, m-1$. Переходим к следующему шагу.

Случай 2. Не имеет места случай 1 и с номером n никогда ранее не было связано гипотезы вида $\kappa n = \beta k$. Проверяем $\kappa_n^p \subseteq \beta 0, \dots, \kappa_n^p \subseteq \beta t$.

Вариант (а) $\kappa_n^p \subseteq \beta k$, $k \le t$, где k — наименьшее такое число. Вводим гипотезу $\kappa n = \beta k$.

До этого шага γn была не определена. Пусть размер $\left[\kappa_n^p\right]$ равен s. Определяем $\gamma_n(0) = \dots = \gamma_n(s-1) = n$.

Возьмем наименьшее число m такое, что αm еще не определена, и положим $\alpha_m(0) = \dots = \alpha_m(s-1) = n$. Свяжем номер m в нумерации α с номером n в нумерации γ. Свяжем первый номер m в нумерации τ с номером k в нумерации β. Зададим $\delta_m^t = \alpha_m^t$. Определим $\sigma(m,t) = \alpha_m^t$, $\tau(m,t) = \beta_k^s$.

Доопределим имеющиеся функции αi на одно значение, равное предыдущему, оставим все другие функции нумерации γ неизменными, определим $\sigma(i,t)$, $\tau(i,t)$, $i = 1, \dots, m-1$, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Вариант (б) κ_n^p не содержится ни в одном из $\beta 0, \dots, \beta t$.

Поступаем, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Случай 3. Не выполняются предыдущие случаи и после шага $c(n, p-1)$ нет гипотезы с участием κn. Проверяем $\kappa_n^p \subseteq \beta 0, \dots, \kappa_n^p \subseteq \beta t$.

Вариант (а) $\kappa_n^p \subseteq \beta k$, $k \le t$, где k — наименьшее такое число. Вводим гипотезу $\kappa n = \beta k$.

Пусть размер $\left[\kappa_n^p\right]$ равен s, а размер γ_n^{t-1} равен r, $0 < r < s < t$. Определяем $\gamma_n(r) = \dots = \gamma_n(s-1) = \gamma_n(r-1)$.

Возьмем наименьшее m такое, что αm не определена. Положим $\alpha_m^t = \gamma_n^t$. Свяжем номер m в нумерации α с номером n в нумерации γ. Определим $\delta_m^t = \alpha_m^t$ и $\sigma(m,t) = \alpha_m^t$, $\tau(m,t) = \beta_k^s$.

Оставим все другие функции в нумерации γ неизменными. Доопределим имеющиеся функции αi на одно значение, равное предыдущему, определим $\sigma(i,t)$, $\tau(i,t)$, $i = 1, \dots, m-1$, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Вариант (б) κ_n^p не содержится ни в одном из $\beta 0, \dots, \beta t$.

Поступаем, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Случай 4. Не выполняются случаи 1 и 2. Кроме того, после шага $c(n, p-1)$ имеет место гипотеза $\kappa n = \beta k$ и $\kappa_n^p \subseteq \beta k$. Другими словами, хотя отрезок $\left[\kappa_n^p\right]$ увеличился по сравнению с предыдущим шагом, но имевшаяся гипотеза не опровергается новыми данными.

Пусть размер $\left[\kappa_n^p\right]$ равен s, а размер γ_n^{t-1} равен r, $0 < r < s < t$. Определяем $\gamma_n(r) = \dots = \gamma_n(s-1) = \gamma_n(r-1)$.

Доопределяем все до того определенные αi на одно значение, равное предыдущему, определяем $\sigma(i,t), \tau(i,t)$, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Случай 5. Не выполняются предыдущие случаи, т. е. начальный отрезок $\left[\kappa_n^p\right]$ возрос и имевшаяся после шага $c(n,p-1)$ гипотеза $\kappa n = \beta k$ опровергается на шаге $t : \kappa_n^p \nsubseteq \beta k$.

Уничтожаем гипотезу $\kappa n = \beta k$ и единственную имеющуюся на данный момент связь номера n в нумерации γ с некоторым номером m в нумерации α.

Пусть размер $\left[\kappa_n^p\right]$ равен s, а размер γ_n^{t-1} равен r, $0 < r < s < t$. Определяем $\gamma_n(r) = \dots = \gamma_n(s-1) = \gamma_n(r-1)+1$. Доопределяем αm предыдущими значениями до размера t. Таким образом, γn становится отличной от αm.

Определяем $\delta_m^t = \alpha_m^{s+1}$. Заметим, что δ_m^t теперь не содержится в γn.

Поступаем далее, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Докажем объявленные ранее свойства построенных объектов.

Лемма 1. *Нумерация α есть вычислимая нумерация бесконечного семейства о.р.ф. A.*

Доказательство. Вычислимость α следует из эффективности построения. Так как случаев 2 и 3 с вариантами (а) встречается бесконечно много, все αm определяются на некотором шаге и далее автоматически доопределяются на шагах всех типов, т. е. все αm — о.р.ф. Функция αm, определенная на шаге $c(n,p)$, начинается со значения n. Ввиду бесконечности таких шагов различных функций в A тоже бесконечно много. Лемма доказана.

Лемма 2. *Семейство $A = \alpha\mathbb{N}$ дискретно.*

Доказательство. Функции αm_1 и αm_2 определялись либо в случае 2(а), либо в случае 3(а) обязательно через связь с некоторыми n_1 и n_2 соответственно. Если $n_1 \neq n_2$, то уже $\alpha m_1(0) = n_1 \neq \alpha m_2(0) = n_2$.

Если же $n_1 = n_2 = n$, то это означает, что m_1 была раньше связана с n, затем эта связь была уничтожена на шаге t по случаю 5, а на более позднем шаге q по случаю 3(а) возникла связь n с m_2. Но в случае 5 δm_1 содержится в αm_1 и не содержится в γn, а γ_n^t содержится в αm_2.

Отметим, что отрезки δm всегда конечны, поскольку они могут вырасти лишь однажды в случае 5, когда уничтожается связь m с n. А если m потеряло связь, то повторно уже не обретет. Как в случае 2(а), так и в случае 3(а) новые связи заключаются только с еще не определенными αm. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\kappa n \in B$, то $\gamma n \in A$.*

Доказательство. Пусть $\kappa n = \beta k$ и число p столь велико, что κ_n^p не содержится в $\beta 0, \dots, \beta(k-1)$. Тогда на шаге $c(n,p+1)$ будет иметь место связь n с некоторым m, которая никогда не будет уничтожена. Поэтому на всех оставшихся шагах $c(n,p+2), c(n,p+3), \dots$ будут выполняться случаи 1 или 4, а так как κn — о.р.ф., случаев 4 будет бесконечно много. Поэтому $\gamma n = \alpha m$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $\kappa n \notin B$, то $\gamma n \notin A$.*

Доказательство. Если для κn в процессе построения случаи 4 или 5 встретятся лишь конечное число раз, то γn — конечная функция, так как γn

доопределяется лишь в случаях 4, 5 или 3(а) после случая 5. Так будет для κn, не являющихся о.р.ф. или не являющихся внешними предельными точками для семейства B.

Если κn — о.р.ф. и случаи 4 или 5 встречаются для нее бесконечно часто, то γn будет о.р.ф. Но так как $\kappa n \notin B$, все возникающие гипотезы $\kappa n = \beta k_1$, $\kappa n = \beta k_2, \dots$ будут уничтожаться через конечное число шагов каждая по случаю 5. Так что случаев 5 будет бесконечно много. При этом обязательно уничтожаются связи с $m_1, m_2, \dots$ и функции $\alpha m_1, \alpha m_2, \dots$ будут отличными от γn.

Таким образом, если m не было связано с n, то $\alpha_m(0) \neq \gamma_n(0)$. Если же m было связано с n, то эта связь будет уничтожена и αm будет отличной от γn. Лемма 4, а вместе с ней и сводимость $\kappa^{-1}(B)$ к $\kappa^{-1}(A)$ доказаны.

Лемма 5. *Для всех $i, j, m, z \in \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\sigma(m,i) \subseteq \sigma(z,j) \Rightarrow \tau(m,i) \subseteq \tau(z,j).$$

Доказательство. Если $m = z$, то условие выполняется по построению.

Если $\sigma(m,i) \subseteq \sigma(z,j)$ и $m \neq z$, то $m < z$. Такая ситуация возможна, только если номера m, z в нумерации α были связаны с одним и тем же номером n в нумерации γ на разных шагах u, v соответственно, $u < v$. При этом на шагах u, v имели место разные гипотезы $\kappa n = \beta x$ и $\kappa n = \beta y$ при $x \neq y$. Следовательно, на некотором промежуточном шаге t, $u < t < v$, произошел случай 5, где связь m с n была разорвана.

Воспользуемся обозначениями случая 5 конструкции. Дополнительно через $[f]_r$ будем обозначать начальный отрезок функции f длины r (не путать с верхним индексом, обозначающим шаг вычисления f).

К шагу t имела место гипотеза $\kappa n = \beta k$, т. е. $\kappa_n^{p-1} \subseteq \beta k$. К шагу t длина построенного начального отрезка γn составляла r. Следовательно, $[\kappa n]_r \subseteq \beta k$ (см. случаи 2(а), 3(а) и 4). Поэтому отрезки $\tau(m,l)$ при фиксированном m и длиной, не превосходящей r, содержатся в $[\kappa n]_r$ и тем самым в $\tau(z,j)$.

Но в случае 5 шага t произошло доопределение функции γn в точке $r+1$, отличающее γn от функции αm. Поэтому длина $\sigma(m,i)$, а с ней и длина $\tau(m,i)$ не могут быть больше r, поскольку $[\gamma n]_{r+1} \subseteq \sigma(z,j)$ по случаю 3(а), который должен был произойти после случая 5 шага t для установления связи n с z. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $\kappa q \in A$, то $F(\kappa q) \in B$.*

Доказательство. Пусть $\kappa q = \alpha m$. Тогда $\alpha m = \bigcup \sigma(m,i)$ и $F(\kappa q) = \bigcup \tau(m,i) = \beta k$, где номер k нумерации β был изначально связан с первым номером m нумерации τ и эта связь никогда не разрывалась. Размер же $\tau(m,i)$ возрастал с ростом i на каждом шаге. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если $\kappa q \notin A$, то $F(\kappa q) \notin B$.*

Доказательство. Если κq не является о.р.ф., то и $F(\kappa q)$ не о.р.ф.

Если κq о.р.ф., но не предельная для семейства A, то для некоторого достаточно большого t начальный отрезок κ_q^t не содержится ни в одной αm и, следовательно, κq не содержит достаточно больших $\sigma(m,i)$. Поэтому $F(\kappa q)$ конечна.

Пусть κq является внешней предельной о.р.ф. для семейства A и содержит бесконечно много начальных отрезков вида $\sigma(m_j, i)$ при разных m_j. Но тогда по случаю 5 $\tau(m_j, i)$ связаны с разными βk_j. Поэтому κq не равна ни одной из βk_j.

Лемма 7 и вместе с ней теорема доказаны.

Обозначим через $\mathrm{Bound}(A)$ множество всех внешних предельных общерекурсивных точек семейства A.

Замечание. В принципе можно доказать дополнительное утверждение: функция κn является внешней предельной общерекурсивной точкой для семейства B тогда и только тогда, когда функция γn такова для семейства A.

Тогда мы получим одновременное сведение одной сводящей функцией не только индексного множества семейства B к индексному множеству семейства A, как в теореме, но и индексного множества семейства $\mathrm{Bound}(B)$ к индексному множеству семейства $\mathrm{Bound}(A)$.

Это позволит подчеркнуть вывод из результатов статьи, что сложность индексного множества некоторого вычислимого семейства о.р.ф. зависит не столько от сложности самого семейства, сколько от сложности семейства его внешних предельных общерекурсивных точек, в то время как, например, для полурешеток Роджерса вычислимых семейств ситуация прямо противоположная.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
2. *Ershov Yu. L.* Theory of numberings. Novosibirsk, 1996. 38 pp. (Preprint / RAN. Inst. Math.; 18).
3. *Селиванов В. Л.* Тонкие иерархии арифметических множеств и определимые индексные множества // Мат. логика и алгоритмические вопросы. 1989. Т. 12. С. 165–185.
4. *Lachlan A. H.* On the indexing of classes of recursively enumerable sets // J. Symbolic Logic. 1966. V. 31. P. 10–22.
5. *Rice H. G.* On completely recursive enumerable classes and their key arrays // J. Symbolic Logic. 1956. V. 21. P. 304–308.
6. *Ершов Ю. Л.* Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1015–1025.
7. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 26 июня 2003 г.

Корольков Юрий Дмитриевич
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003
korol@math.isu.ru