Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 510.5

К ВЫЧИСЛИМОСТИ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

В. Г. Пузаренко

Аннотация: Изучаются свойства дескриптивной теории множеств, которые переносятся с идеалов степеней по перечислимости на допустимые множества. Показано, что для допустимых множеств, соответствующих неглавным идеалам и обладающих свойством минимальности, принцип редукции не выполняется, а свойства существования универсальной функции, отделимости и тотальной продолжимости переносятся с идеалов для специальных классов допустимых множеств. Впервые приводятся примеры допустимых множеств, удовлетворяющих принципу тотальной продолжимости. Кроме того, выделяется широкий подкласс допустимых множеств, для которых отсутствуют разрешимые вычислимые нумерации семейства всех вычислимо перечислимых подмножеств. В основном, обсуждаются минимальные классы допустимых множеств, соответствующие неглавным идеалам степеней по перечислимости.

Ключевые слова: допустимые множества, идеалы, e-сводимость, вычислимость, дескриптивная теория множеств, фридбергова нумерация.

Работа продолжает исследования соотношений между свойствами на идеалах e-степеней и допустимых множествах, нашедшие свое отражение в [1, 2]. Здесь развиваются методы, позволяющие описать вычислимые свойства минимальных классов допустимых множеств. В § 2 предлагается свойство Σ-подмножеств, близкое свойству неразличимости, которое используется в § 4, 5 для исследования вычислимых принципов, а в § 3 — для изучения проблемы существования фридберговых нумераций на допустимых множествах минимальных классов. В § 1 приводятся основные сведения, необходимые для изложения содержательной части данной работы, а также основные свойства минимальных классов допустимых множеств.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. О вычислимости и e-сводимости. Основные сведения по теории вычислимости можно найти, например, в [3, 4]. Здесь же мы подробно остановимся лишь на определениях и обозначениях, принятых в данной работе.

Символ $\leftrightharpoons$ означает равенство по определению.

Запись $f : A \twoheadrightarrow B$, где A и B — множества произвольной природы, будет служить сокращением предложения «отображение $f : A \to B$ сюръективно (действует на B)».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01–01–04003, 02–01–00540), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2069.2003.1), Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта МК–2452.2003.01).

Через ω будем обозначать множество натуральных чисел.

Через $\mathscr{P}(X)$ обозначаем множество всех подмножеств множества X.

Для произвольного множества X обозначение $\mathrm{card}(X)$ будет использоваться для кардинального числа данного множества (напомним, что если X — конечное множество, то $\mathrm{card}(X)$ — это число элементов множества X).

Для $n \in \omega$ будем обозначать через $[n]$ подмножество натуральных чисел, состоящее из элементов, меньших n.

Для n-местного отношения R на произвольном множестве A, $n \geq 1$, через $\mathrm{Pr}_k(R)$, $1 \leq k \leq n$, обозначаем проекцию отношения R на k-ю координату.

Через Γ_φ будем обозначать график функции φ, а через $\delta\varphi$ и $\rho\varphi$ — ее область определения и область значений соответственно. Часто функции будем отождествлять с их графиками.

Через W_n обозначаем n-е вычислимо перечислимое (в. п.) множество в нумерации Поста. Напомним, что данная нумерация является главной, а именно, для любой вычислимой последовательности $\{A_n\}_{n\in\omega}$ в. п. множеств найдется вычислимая функция f, для которой $A_n = W_{f(n)}$ для всех $n \in \omega$. Через D_n обозначаем n-е конечное множество, определяемое следующим образом: $D_n \leftrightharpoons \{a_1 < \ldots < a_k\}$, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k} 2^{a_i} > 0$, и $D_0 \leftrightharpoons \varnothing$. Заметим, что отношение $x \in D_m$ и функция $m \mapsto \mathrm{card}(D_m)$ являются вычислимыми. Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств, для которой отношение $x \in A_m$ и функция $m \mapsto \mathrm{card}(A_m)$ вычислимы, называют *сильно вычислимой*.

В дальнейшем конечные объекты (кортежи натуральных чисел, конечные множества, кортежи конечных подмножеств и т. д.) обычно будем отождествлять с номерами в некоторой заранее зафиксированной эффективной кодировке.

Под *сводимостью по перечислимости* (сокращенно, *e-сводимостью*) понимаем сводимость на множествах натуральных чисел, обозначаемую через $\leqslant_e$ и определяемую как

$$A \leqslant_e B \Leftrightarrow \exists n \forall t\ (t \in A \Leftrightarrow \exists m\ (\langle t, m\rangle \in W_n\ \&\ D_m \subseteq B)).$$

Определив операторы перечисления Φ_n как

$$\Phi_n(S) = \{x \mid \exists m\, (\langle x, m\rangle \in W_n\ \&\ D_m \subseteq S)\},$$

получим другое определение e-сводимости:

$$A \leqslant_e B \Leftrightarrow \exists n(\Phi_n(B) = A).$$

В этом случае будем говорить, что множество W_n *задает* оператор Φ_n. Для нас будут важны следующие свойства операторов Φ_n:

$A \subseteq B \Rightarrow \Phi_n(A) \subseteq \Phi_n(B)$ (монотонность);

$x \in \Phi_n(A) \Rightarrow \exists X \subseteq A\, (\mathrm{card}(X) < \omega\ \&\ x \in \Phi_n(X))$ (непрерывность).

Будем говорить, что последовательность $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$ операторов перечисления *вычислима*, если таковой является последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ вычислимо перечислимых множеств, задающих операторы Θ_n.

Отношение $\leqslant_e$ является отношением предпорядка на $\mathscr{P}(\omega)$, которое естественным образом индуцирует отношение частичного порядка на множестве e-степеней ${}^{\mathscr{P}(\omega)}/_{\equiv_e}$, где $A \equiv_e B \Leftrightarrow A \leqslant_e B \& B \leqslant_e A$. Ассоциированное отношение порядка будем обозначать так же, как и отношение e-сводимости. Для каждого множества $A \subseteq \omega$ через $d_e(A)$ обозначим e-степень, содержащую множество A. Под *сочленением* $A \oplus B$ понимаем множество

$$\{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}.$$

Пусть заданы подмножества натуральных чисел $A_0, A_1, \ldots, A_k$, $k \geq 0$. Тогда $\bigoplus\limits_{i\leqslant k} A_i \leftrightharpoons A_0$, если $k = 0$; $\bigoplus\limits_{i\leqslant k} A_i \leftrightharpoons (\bigoplus\limits_{i\leqslant k-1} A_i) \oplus A_k$, если $k > 0$. Пусть $\langle \mathscr{P}(\omega), \preccurlyeq \rangle$ — множество всех подмножеств натуральных чисел с некоторым фиксированным линейным порядком и $S \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ — конечное множество. Пусть $f : [n] \to S$ — изотонное взаимно однозначное соответствие. Тогда $\bigoplus S \leftrightharpoons \bigoplus\limits_{i<n} f(i)$ (если $S = \varnothing$, то $\bigoplus S \leftrightharpoons \varnothing$). Отметим, что e-степень множества $\bigoplus S$ не зависит от упорядочения $\mathscr{P}(\omega)$.

Хорошо известно, что множество e-степеней относительно ассоциированного отношения $\leqslant_e$ частичного порядка образует верхнюю полурешетку (которую будем обозначать через L_e) и $d_e(A) \sqcup d_e(B) = d_e(A \oplus B)$, где $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$ — точная верхняя грань e-степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Кроме того, рассматриваемая верхняя полурешетка имеет наименьший элемент $\mathbf{0}$ — e-степень, состоящую из вычислимо перечислимых множеств.

Произвольное непустое семейство e-степеней $\mathscr{I}$ множеств натуральных чисел назовем *e-идеалом* (или просто *идеалом*), если выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{a} \leqslant_e \mathbf{b} \& \mathbf{b} \in \mathscr{I} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathscr{I}$;

2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{I} \Rightarrow \mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} \in \mathscr{I}$.

Пусть $X \subseteq L_e$; говорят, что идеал $\mathscr{I}$ *порождается* множеством X, если $\mathscr{I} = \{\mathbf{a} \in L_e \mid \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in X(\mathbf{a} \leqslant_e \mathbf{x}_1 \sqcup \mathbf{x}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{x}_k)\}$. Примем соглашение, что если $X = \varnothing$ и $\mathscr{I}$ порождается множеством X, то $\mathscr{I} = \{\mathbf{0}\}$ (далее будем обозначать этот идеал через $\mathbf{0}$). Если $\mathscr{I}$ порождается некоторым конечным множеством (или, что равносильно в случае e-идеалов, одноэлементным множеством), то $\mathscr{I}$ называется *главным* идеалом. В противном случае идеал $\mathscr{I}$ называется *неглавным*.

Определим теперь операцию $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}'$ скачка на e-степенях:

— пусть $\mathbf{a} = d_e(A)$; тогда $K^A \leftrightharpoons \{n \mid n \in \Phi_n(A)\}$ (отметим, что $K^A \equiv_e A$; более того, $K^A \equiv_1 \{\langle x, y\rangle \mid x \in \Phi_y(A)\}$);

— положим $\mathbf{a}' = d_e(K^A \oplus \overline{K^A})$.

Для каждого e-идеала $\mathscr{I}$ положим $\mathscr{I}^+ \leftrightharpoons \{S \subseteq \omega \mid S \neq \varnothing, d_e(S) \in \mathscr{I}\}$, $\mathscr{I}^* \leftrightharpoons \mathscr{I}^+ \cup \{\varnothing\}$.

Заметим, что идеал $\mathscr{I}$ замкнут относительно операции скачка, если и только если семейство множеств $\mathscr{I}^*$ замкнуто относительно операции дополнения.

Через $\mathscr{J}(L_e)$ будем обозначать множество всех идеалов верхней полурешетки L_e.

1.2. Элементы теории допустимых множеств. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [5, 6]. Здесь лишь напомним основные понятия и конструкции, а также утверждения из [1].

Готическими буквами будем обозначать модели или алгебраические системы. Если $\mathfrak{M}$ — модель, то через $|\mathfrak{M}|$ (иногда через M) будем обозначать носитель данной модели. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель и $X \subseteq |\mathfrak{M}|$; тогда через $\mathfrak{M} \upharpoonright X$ обозначим подмодель модели $\mathfrak{M}$, порожденную множеством X. Если $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ и $\tau \subseteq \sigma$, то через $\mathfrak{M} \upharpoonright \tau$ обозначим обеднение модели $\mathfrak{M}$ до сигнатуры τ.

Под *допустимым множеством* $\mathbb{A}$ будем понимать KPU-модель, у которой множество $\operatorname{Ord}\mathbb{A}$ всех ординалов вполне упорядоченно. Допустимые множества будем обозначать через $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, а их носители — через A, B, C (иногда через $|\mathbb{A}|$, $|\mathbb{B}|$, $|\mathbb{C}|$) соответственно. На допустимом множестве $\mathbb{A}$ определяются понятия вычислимо перечислимых (вычислимых) множеств как множеств, определимых формулами специального вида — Σ-формулами (Σ- и Π-формулами одновременно). Вычислимо перечислимые и вычислимые подмножества допустимого множества $\mathbb{A}$, более точно, $\mathbb{A}$-*вычислимые* и $\mathbb{A}$-*вычислимо перечислимые* ($\mathbb{A}$-в. и $\mathbb{A}$-в. п.) называются также Σ- и Δ-*подмножествами* $\mathbb{A}$ соответственно. Семейства всех Σ- и Δ-подмножеств допустимого множества $\mathbb{A}$ будем обозначать через $\Sigma(\mathbb{A})$ и $\Delta(\mathbb{A})$ соответственно. Аналогично определяются понятия $\mathbb{A}$-в. и $\mathbb{A}$-в. п. предикатов. Семейства всех n-арных $\mathbb{A}$-в. и $\mathbb{A}$-в. п. предикатов будем обозначать через $\Delta(\mathbb{A}^n)$ и $\Sigma(\mathbb{A}^n)$ соответственно, $n \geq 1$.

Важный класс допустимых множеств образуют наследственно конечные надстройки; индуктивно $HF(M)$ можно определить так:

$$HF_0(M) = M,$$
$$HF_{n+1}(M) = HF_n(M) \cup \mathscr{P}_\omega(HF_n(M)),$$
$$HF(M) = \bigcup_{n<\omega} HF_n(M),$$

где $\mathscr{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X. Если $\mathfrak{M}$ — модель чисто предикатной сигнатуры σ и $\sigma \cap \{\varnothing, \in^2, U^1\} = \varnothing$, то на $HF(M)$ можно естественным образом задать модель $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \{\varnothing, \in^2, U^1\}$, называемую *наследственно конечной надстройкой над моделью* $\mathfrak{M}$, так, что $U^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$.

В дальнейшем будем подразумевать, что все рассматриваемые допустимые множества только конечной сигнатуры.

Отметим, что множество $\omega \subseteq \operatorname{Ord}\mathbb{A}$ является Δ-подмножеством в любом допустимом множестве $\mathbb{A}$. В случаях, когда будет важно, в каком допустимом множестве рассматривается семейство натуральных ординалов (к примеру, нетрудно построить допустимые множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ так, что $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ и $\omega \subseteq \operatorname{Ord}\mathbb{A}$ не совпадает с $\omega \subseteq \operatorname{Ord}\mathbb{B}$), семейство $\omega \subseteq \operatorname{Ord}\mathbb{A}$ будем обозначать через $\operatorname{Nat}(\mathbb{A})$. В [1] дано описание всех семейств подмножеств натуральных чисел, которые реализуются в качестве семейств всех Σ-подмножеств ω в допустимых множествах.

Теорема 1.1. 1. *В любом допустимом множестве $\mathbb{A}$ семейство Σ-подмножеств ω представимо в виде $\mathscr{I}^*$ для некоторого e-идеала $\mathscr{I}$.*

2. *Для любого e-идеала $\mathscr{I}$ существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathscr{I}^*$ совпадает с семейством всех Σ-подмножеств ω в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Кроме того, эту модель можно выбрать так, что* $\operatorname{card}(\mathfrak{M}) = \operatorname{card}(\mathscr{I}^*)$.

Через $\mathscr{I}_e(\mathbb{A})$ обозначим множество $\{d_e(B) \mid B \subseteq \omega,\ B \in \Sigma(\mathbb{A})\}$. Как следует из теоремы 1.1, $\mathscr{I}_e(\mathbb{A})$ будет идеалом e-степеней для любого допустимого множества $\mathbb{A}$.

Определим отношения сводимости на допустимых множествах. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры $\{P_1^{n_1}, \ldots, P_k^{n_k}\}$ Σ-*определима* в допустимом множестве $\mathbb{A}$ (и обозначать как $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathbb{A}$), если существует $\nu : |\mathbb{A}| \twoheadrightarrow |\mathfrak{M}|$, для которого $\nu^{-1}(=)$, $\nu^{-1}(P_1^{\mathfrak{M}}), \ldots, \nu^{-1}(P_k^{\mathfrak{M}})$ будут Δ-предикатами на $\mathbb{A}$.

Понятие Σ-определимости на допустимых множествах введено Ю. Л. Ершовым [7] и служит обобщением понятия конструктивизируемой модели. Однако отношение $\leqslant_\Sigma$ не сохраняет вычислимых свойств допустимых множеств. А именно, можно выбрать допустимые множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ так, что $\mathbb{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{B}$ и найдется подмножество $C \subseteq \omega$, которое будет $\mathbb{A}$-в. п., но не $\mathbb{B}$-в. п. Действительно, рассмотрим допустимые множества $\mathbb{A} = \mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$ и $\mathbb{B} = \mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))$, где $\mathfrak{N} = \langle \omega; +, \cdot, 0, s, < \rangle$ — стандартная модель арифметики. Очевидно, что $\mathbb{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{B}$. Хорошо известно [8], что семейство всех Σ-подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$ совпадает с Π^1_1-классом, а Δ-подмножеств — с Δ^1_1-классом. К тому же $HYP(\omega) \cap \mathscr{P}(\omega) = \Delta^1_1$. Однако справедливо следующее свойство.

Предложение 1.1. *Семейство всех Σ-подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))$ совпадает с Δ^1_1-классом.*

Доказательство. Воспользуемся предложением 3.2 [1]. Для этого достаточно показать, что $\mathrm{Th}_\exists(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}), a_1, \ldots, a_n) \in \Delta^1_1$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in HYP(\omega)$. Пусть φ — произвольная $\exists$-формула сигнатуры $\{+, \cdot, 0, s, <, U, \varnothing, \in\}$. По этой формуле эффективно построим Δ_0-формулу φ', эквивалентную φ в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathrm{Th}_\exists(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}), a_1, \ldots, a_n) \\ &\quad = \{\varphi \in \omega \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — } \exists\text{-предложение, } \mathbb{HYP}(\mathfrak{N}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\} \\ &\quad = \{\varphi \in \omega \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — } \exists\text{-предложение, } \mathbb{HYP}(\mathfrak{N}) \models \varphi'(a_1, \ldots, a_n)\} \\ &\qquad \in HYP(\omega) \end{aligned}$$

и, следовательно, будет выполняться требуемое.

Будем различать два сорта переменных: «множественные» переменные $x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots$ (принимающие в качестве своих значений только «множества») и «прапеременные» (принимающие в качестве своих значений только праэлементы) $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$. Без ограничения общности можно предполагать, что в формуле φ используются именно такие переменные (в этом случае символ U можно элиминировать). Кроме того, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle i_1, \ldots, i_p, y_1, \ldots, y_q \rangle$, где $i_1, \ldots, i_p \in |\mathfrak{N}|$, а $y_1, \ldots, y_q \notin |\mathfrak{N}|$ и кортеж $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ имеет попарно различные координаты. Тогда φ эквивалентна дизъюнкции $\exists$-формул вида

$$\begin{aligned} &\exists m_1 \ldots \exists m_k (\varphi_0(i_1, \ldots, i_p, m_1, \ldots, m_k) \wedge \\ &\qquad\qquad \exists x_1 \ldots \exists x_l \varphi_1(i_1, \ldots, i_p, m_1, \ldots, m_k, y_1, \ldots, y_q, x_1, \ldots, x_k)), \end{aligned}$$

где φ_0 — $\exists$-формула сигнатуры $\{+, \cdot, 0, s, <\}$, а φ_1 — бескванторная формула сигнатуры $\{\varnothing, \in\}$. Дальнейшие рассуждения будут касаться только формулы φ_1.

Во-первых, можно считать, что φ_1 имеет вид конъюнкции атомарных формул или их отрицаний; во-вторых, будем также предполагать, что φ_1 не содержит конъюнктов вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы. И, пожалуй, самый принципиальный шаг состоит в элиминации «множественной» переменной x_t, для которой не существует последовательности «множественных» переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ любой длины $k \geq 0$ такой, что в φ_1 входят конъюнкты $x_t \in x_{i_1}$, $x_{i_1} \in x_{i_2}$, …, $x_{i_k} \in y_s$ для некоторого s, $1 \leqslant s \leqslant q$.

Теперь уже нетрудно записать Δ_0-формулу, эквивалентную φ (прапеременные можно ограничить, заменив $\exists m_i$ на $\exists m_i \in |\mathfrak{N}|$, а «множественные» — ввиду отсутствия неограниченных «множественных» переменных). $\square$

Таким образом, $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}) \leqslant_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))$, но

$$\Pi^1_1 = \mathscr{I}_e(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})) \nleqslant \mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))) = \Delta^1_1.$$

В частности, Π^1_1-полное множество принадлежит $\Sigma(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})) \setminus \Sigma(\mathbb{HF}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})))$. Будем говорить, что допустимое множество $\mathbb{B}$ *перечислимо сводимо* к допустимому множеству $\mathbb{A}$ (и записывать $\mathbb{B} \sqsubseteq_E \mathbb{A}$), если существует $\nu : |\mathbb{A}| \twoheadrightarrow |\mathbb{B}|$ такое, что $\nu^{-1}(\Sigma(\mathbb{B}^2)) \subseteq \Sigma(\mathbb{A}^2)$. В этом случае будем говорить, что ν *осуществляет* E*-сводимость* $\mathbb{A}$ к $\mathbb{B}$ (и использовать обозначение $\nu : \mathbb{A} \sqsubseteq_E \mathbb{B}$).

Введенное понятие близко понятию, предложенному А. С. Морозовым [9], но имеет ряд принципиальных отличительных особенностей. Непосредственно из определений следует, что $\mathbb{B} \sqsubseteq_E \mathbb{A}$ влечет $\mathbb{B} \leqslant_\Sigma \mathbb{A}$. Отметим также, что ν осуществляет E-сводимость $\mathbb{B}$ к $\mathbb{A}$, если ν осуществляет Σ-определимость $\mathbb{B}$ в $\mathbb{A}$ и к тому же существует бинарный Σ-предикат $R_\in$ такой, что $\mathrm{Pr}_1(R_\in) = |\mathbb{A}|$ и $(\langle x, x'\rangle \in R_\in \wedge \neg U(\nu(x))) \Rightarrow \nu(x) = \{\nu(z) \mid z \in x'\}$. Кроме того, если $\mathbb{B}$ — наследственно конечная надстройка, то последнее условие является и необходимым.

Семейство $S \subseteq \mathscr{P}(A)$ назовем *вычислимым в* $\mathbb{A}$, если либо $S = \varnothing$, либо $S = \{\lambda x.\Phi^{\mathbb{A}}[a, x] \mid a \in A\}$ для некоторой Σ-формулы $\Phi(x_0, x_1)$. Через $S_\omega(\mathbb{A})$ обозначим класс вычислимых в $\mathbb{A}$ семейств подмножеств ω.

Эти семейства сохраняются относительно ранее введенных сводимостей [5, 9, 10].

Предложение 1.2. 1. *Если* $\mathbb{A} \sqsubseteq_E \mathbb{B}$, *то* $S_\omega(\mathbb{A}) \subseteq S_\omega(\mathbb{B})$. *В частности,* $\mathscr{I}_e(\mathbb{A}) \leqslant \mathscr{I}_e(\mathbb{B})$.

2. $\mathfrak{M} \leqslant_\Sigma \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_E \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \leqslant_\Sigma \mathbb{A}$.

В [1] было построено несколько серий моделей для доказательства утверждения 2 теоремы 1.1. Здесь приведем только сконструированную автором.

Пусть $\mathscr{I}$ — идеал. Определим класс наследственно конечных надстроек $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$ (не аксиоматизируемый!) над моделями $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\sigma = \{0^1, s^2, Q^3\}$, удовлетворяющими следующим свойствам:

1) $\forall x \exists y \exists z (Q(x, y, z) \vee (Q(y, x, z) \vee Q(y, z, x)))$;
2) $\neg\exists x(\exists y \exists z Q(x, y, z) \wedge \exists y \exists z Q(y, x, z))$;
3) $\neg\exists x(\exists y \exists z Q(x, y, z) \wedge \exists y \exists z Q(y, z, x))$;
4) $\neg\exists x(\exists y \exists z Q(y, z, x) \wedge \exists y \exists z Q(y, x, z))$;
5) $\forall x \forall y \forall z (Q(z, x, y) \to \forall t(Q(t, x, y) \to (t = z)))$;
6) $\forall x \forall y \forall z (Q(x, y, z) \to \forall u \forall v (Q(x, u, v) \to ((u = y) \wedge (v = z)))$;
7) $(\mathfrak{M} \upharpoonright \widetilde{\omega}) \upharpoonright \{0, s\} \simeq \langle \omega, 0, s\rangle$, где $0(a) \Leftrightarrow a = 0$, $s = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \omega\}$, $\widetilde{\omega} = \{x \mid \mathfrak{M} \models \exists y \exists z Q(y, z, x)\}$;
8) $A \in \mathscr{I}^+ \Leftrightarrow \exists^\infty x(\{n \mid \mathfrak{M} \models \exists z Q(z, x, \underline{n})\} = A)$, где $y = \underline{n} \Leftrightarrow \exists z_0 \ldots \exists z_n (0(z_0) \wedge (z_n = y) \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s(z_{i-1}, z_i))$;
9) $A \in \mathscr{P}(\omega) \setminus \mathscr{I}^+ \Leftrightarrow \neg\exists x(\{n \mid \mathfrak{M} \models \exists z Q(z, x, \underline{n})\} = A)$.

Как следует из свойств 7–9, сами модели также не образуют аксиоматизируемого класса.

В [1] показано, что $\mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)) = \mathscr{I}$ для любой наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$. Более того, классы $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$, $\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)$, обладают следующим свойством минимальности [1].

Теорема 1.2. *Для любого допустимого множества* $\mathbb{A}$ *существует* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}_e(\mathbb{A})}$, *для которой справедливо соотношение* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \leqslant_\Sigma \mathbb{A}$.

Там же было дано описание наименьшего по включению класса всех вычислимых семейств подмножеств ω в допустимых множествах, соответствующих произвольному идеалу $\mathscr{I}$.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathscr{I}$ — *e-идеал и* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$. *Тогда* $S \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ *вычислимо в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, *если и только если* $S \cup \{\varnothing\} = \{\Theta_n(R \oplus A) \mid n \in \omega,\ R \in \mathscr{I}^*\}$ *для некоторых* $A \in \mathscr{I}^*$ *и вычислимой последовательности* $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$ *операторов перечисления.*

Определение 1.1. Пусть $\mathscr{I}$ — произвольный e-идеал. Класс $\mathscr{R}$ допустимых множеств некоторой фиксированной сигнатуры будем называть *$\mathscr{I}$-минимальным*, если он обладает следующими свойствами:

1) для любого допустимого множества $\mathbb{A}$ с условием $\mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \mathscr{I}$ существует допустимое множество $\mathbb{B} \in \mathscr{R}$, для которого $\mathbb{B} \sqsubseteq_E \mathbb{A}$;

2) $\mathscr{I}_e(\mathbb{B}) = \mathscr{I}$ для любого допустимого множества $\mathbb{B} \in \mathscr{R}$;

3) $\mathscr{R}$ состоит из элементарно эквивалентных ω-однородных моделей, реализующих одно и то же семейство типов.

Условия 1, 2 определения согласованы с теоремами 1.1 и 1.2, а условие 3 необходимо для того, чтобы элементарные свойства допустимых множеств из рассматриваемого класса не зависели от выбора допустимого множества.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров. Класс $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$ будет $\mathscr{I}$-минимальным для любого $\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)$ [1]. В случае, когда $\mathscr{I}$ — главный идеал, $\mathscr{I}$-минимальным классом будет также класс, состоящий из одной подходящей наследственно конечной надстройки, построенной в [2] для данного идеала. Как следует из результатов § 3, 4 и [2], свойства минимальных классов для главных и неглавных идеалов имеют существенные различия. Несмотря на наличие одних и тех же элементарных свойств в допустимых множествах какого-либо минимального класса, данный класс может состоять из допустимых множеств широкого спектра сложности относительно E-сводимости, что обуславливается теоретико-множественными различиями между допустимыми множествами.

Напомним сначала некоторые теоретико-модельных понятия, касающиеся допустимых множеств.

Определение 1.2. Пусть допустимые множества $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ таковы, что $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$.

• $\mathbb{A}$ называется *концевой подмоделью* $\mathbb{B}$ (а $\mathbb{B}$ — *концевым расширением* $\mathbb{A}$) и обозначается как $\mathbb{A} \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{B}$, если $\{z \mid z \in^{\mathbb{A}} a\} = \{z \mid z \in^{\mathbb{B}} a\}$ для любого $a \in |\mathbb{A}|$;

• $\mathbb{A}$ называется Σ_1-*подмоделью* $\mathbb{B}$ (а $\mathbb{B}$ — Σ_1-*расширением* $\mathbb{A}$) и обозначается как $\mathbb{A} \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{B}$, если $\mathbb{A} \models \Phi(a) \Leftrightarrow \mathbb{B} \models \Phi(a)$ для любых Σ-формулы Φ и $a \in |\mathbb{A}|$.

Отметим, что если $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$, то $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Понятие Σ_1-подмодели может быть переформулировано в терминах Σ-теорий.

Определение 1.3. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Σ-*теорией* $\mathbb{A}$ назовем множество $\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}) \leftrightharpoons \{\Phi \mid \Phi - \Sigma\text{-предложение}, \mathbb{A} \models \Phi\}$.

Тогда $\mathbb{A} \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{B}$, если и только если $\mathbb{A} \leqslant \mathbb{B}$ и $\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}, a) = \mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{B}, a)$ для любого $a \in |\mathbb{A}|$.

В дальнейшем будем отождествлять Σ-формулу с ее номером в некоторой фиксированной гёделевой нумерации. Следующее предложение дает естественное описание идеалов, соответствующих допустимым множествам.

Предложение 1.3. *Пусть* $\mathbb{A}$ — *допустимое множество. Тогда* $\mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \langle d_e(\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}, a)) \mid a \in |\mathbb{A}|\rangle$.

Доказательство. Из Σ-определимости предиката истинности Σ-формул в допустимом множестве $\mathbb{A}$ следует, что $\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}, a)$ будет Σ-подмножеством в $\mathbb{A}$ для любого $a \in |\mathbb{A}|$.

Пусть теперь $C \subseteq \omega$ и $C \in \Sigma(\mathbb{A})$. Тогда существуют Σ-формула $\Phi(x, y)$ и $a_0 \in |\mathbb{A}|$ такие, что $n \in C \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \Phi(n, a_0)$ и, следовательно, $C \leqslant_m \mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}, a_0)$. В частности, $C \leqslant_e \mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}, a_0)$. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть допустимые множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ таковы, что $\mathbb{A} \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{B}$. Тогда $\mathscr{I}_e(\mathbb{A}) \leqslant \mathscr{I}_e(\mathbb{B})$.*

Обсудим теперь вопрос абсолютности множественной структуры элементов в допустимых множествах относительно Σ_1-расширений. Для концевых расширений ответ на данный вопрос положителен и следует непосредственно из определения. В общем случае относительно Σ_1-расширений множественная структура элементов не сохраняется (достаточно рассмотреть $\mathbb{HYP}(S)$ и $\mathbb{HYP}(S')$, где S, S' — бесконечные множества без структуры, для которых $S \subseteq S'$ и $S' \setminus S$ бесконечно).

Лемма 1.1. *Пусть допустимые множества $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ таковы, что $\mathbb{A} \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{B}$. Тогда $\mathrm{Nat}(\mathbb{A}) = \mathrm{Nat}(\mathbb{B})$.*

Доказательство проводится индукцией по натуральным числам. $\square$

Предложение 1.4. *Пусть допустимые множества $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ таковы, что $\mathbb{A} \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{B}$ и $x \in A$ — конечное множество. Тогда $\{y \mid y \in^{\mathbb{A}} x\} = \{y \mid y \in^{\mathbb{B}} x\}$.*

Доказательство непосредственно следует из соотношения

$$\mathbb{A} \models (\mathrm{card}(x) = n) \Leftrightarrow \mathbb{B} \models (\mathrm{card}(x) = n)$$

для некоторого $n \in \mathrm{Nat}(\mathbb{A})$ и леммы 1.1. $\square$

Определение 1.4. Пусть $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ — модели одной и той же сигнатуры. Тогда $\mathfrak{N}'$ называется *Σ_1^0-расширением* $\mathfrak{N}$ (и обозначается как $\mathfrak{N} \leqslant_{\Sigma_1^0} \mathfrak{N}'$), если $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{N}'$ и

$$\mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow \mathfrak{N}' \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$$

для любых $\exists$-формулы φ сигнатуры модели $\mathfrak{N}$ и элементов $a_1, \ldots, a_k$ из N.

Следствие 1.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ, а $\mathbb{A}$ — допустимое множество.*

1. *Если $\mathbb{A} \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то $\mathbb{A}$ имеет вид $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ для некоторой модели $\mathfrak{M}' \leqslant_{\Sigma_1^0} \mathfrak{M}$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

2. *Если $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}$, то $\mathfrak{M} \leqslant_{\Sigma_1^0} (\mathbb{A} \upharpoonright U^{\mathbb{A}}) \upharpoonright \sigma$, $\mathrm{Ord}(\mathbb{A}) = \omega$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{A}$.*

Обращаем внимание читателя на то, что в утверждении 2 следствия допустимое множество $\mathbb{A}$, хотя и имеет высоту ω, не обязано быть наследственно конечной надстройкой. Например, $\mathbb{HF}(S) \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{HYP}(S)$, где S — бесконечное множество без структуры.

Определение 1.5. Пусть $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество, а система допустимых множеств $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такова, что для любых $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, условие $\lambda \leqslant \lambda'$ влечет $\mathbb{A}_\lambda \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_{\lambda'}$. Тогда система $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ называется *Σ_1-цепью допустимых множеств.*

Отметим теперь несколько простейших теоретико-модельных свойств системы классов $\{\mathscr{K}_{\mathscr{I}}\}_{\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)}$:

1) если $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \cup_{\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)} \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$ таковы, что $\mathbb{A}_0 \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_1$, то $\mathbb{A}_0 \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{A}_1$;

2) если $\mathscr{I}_0, \mathscr{I}_1 \in \mathscr{J}(L_e)$ таковы, что $\mathscr{I}_0 \leqslant \mathscr{I}_1$, то для любого допустимого множества $\mathbb{A}_0 \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}_0}$ найдется $\mathbb{A}_1 \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}_1}$, для которого $\mathbb{A}_0 \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_1$;

3) если $\mathscr{I}_0, \mathscr{I}_1 \in \mathscr{J}(L_e)$ таковы, что $\mathscr{I}_0 \leqslant \mathscr{I}_1$, то для любого допустимого множества $\mathbb{A}_1 \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}_1}$ найдется $\mathbb{A}_0 \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}_0}$, для которого $\mathbb{A}_0 \leqslant_{\Sigma_1} \mathbb{A}_1$; более того, в качестве носителя модели $\mathbb{A}_0$ можно взять $\{a \in A_1 \mid d_e(\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}_1, a)) \in \mathscr{I}_0\}$ (что влечет существование наибольшей по включению такой модели);

4) класс $\mathscr{K} \leftrightharpoons \bigcup\limits_{\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)} \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$ *замкнут относительно взятия* Σ_1*-цепей*, а именно, если $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество и $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — Σ_1-цепь допустимых множеств из $\mathscr{K}$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{A}_\lambda \in \mathscr{K}$.

Предложение 1.5. *Пусть $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество и $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — Σ_1-цепь допустимых множеств. Тогда найдутся Σ_1-цепь допустимых множеств $\{\mathbb{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и система отображений $\{\nu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такие, что $\nu_\lambda : \mathbb{B}_\lambda \sqsubseteq_E \mathbb{A}_\lambda$, $\mathbb{B}_\lambda \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}_e(\mathbb{A}_\lambda)}$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $\nu_{\lambda'} \restriction A_\lambda = \nu_\lambda$, как только $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ и $\lambda \leqslant \lambda'$.*

Доказательство. Пусть $\{\Psi_n\}_{n<\omega}$ — вычислимая последовательность всех операторов перечисления с условием $\Psi_n(\varnothing) \neq \varnothing$. Положим $\mathfrak{M}_\lambda \leftrightharpoons \langle \mathrm{Nat}(\mathbb{A}_\lambda) \cup \{\langle n, a\rangle \mid n \in \mathrm{Nat}(\mathbb{A}_\lambda), a \in A_\lambda\} \cup \{\langle\langle m, n\rangle, a\rangle \mid m, n \in \mathrm{Nat}(\mathbb{A}_\lambda); a \in A_\lambda; m \in \Psi_n(\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}_\lambda, a))\}, \varnothing, \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathrm{Nat}(\mathbb{A}_\lambda)\}, \{\langle\langle\langle m, n\rangle, a\rangle, \langle n, a\rangle, n\rangle \mid m, n \in \mathrm{Nat}(\mathbb{A}_\lambda); a \in A_\lambda; m \in \Psi_n(\mathrm{Th}_\Sigma(\mathbb{A}_\lambda, a))\}\rangle$. Зададим теперь вложения $f_\lambda : HF(M_\lambda) \to A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$:

$$f_\lambda(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \langle x, \varnothing\rangle, & \text{если } x \in M_\lambda, \\ \langle \{f_\lambda(y) \mid y \in x\}, \{\varnothing\}\rangle & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По предложению 1.4 ρf_λ и $\rho f_{\lambda'}$ определимы в $\mathbb{A}_\lambda$ и $\mathbb{A}_{\lambda'}$ одной и той же Σ-формулой без параметров для всех $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, поэтому существует Σ-функция F_λ в $\mathbb{A}_\lambda$ (также определимая без параметров) такая, что $\rho F_\lambda = \rho f_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$; причем $F_{\lambda'} \restriction A_\lambda = F_\lambda$, как только $\lambda \leqslant \lambda'$. Теперь возьмем $\mathbb{B}_\lambda \leftrightharpoons \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\lambda)$, $\nu_\lambda \leftrightharpoons f_\lambda^{-1} \circ F_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Из доказательства предложения 1.5 следует, что Σ_1-цепь $\{\mathbb{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ может быть выбрана так, что для любого $\lambda \in \Lambda$ будет выполняться $\mathrm{card}(\mathbb{A}_\lambda) = \mathrm{card}(\mathbb{B}_\lambda)$ и к тому же для любых кардинала α и идеала $\mathscr{I}$ найдется допустимое множество $\mathbb{C}_{\alpha,\mathscr{I}} \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$, $\mathrm{card}(\mathbb{C}_{\alpha,\mathscr{I}}) = \alpha$, для которого $\mathbb{C}_{\alpha,\mathscr{I}} \simeq \mathbb{B}_\lambda$, как только $\mathrm{card}(\mathbb{A}_\lambda) = \alpha$ и $\mathscr{I}_e(\mathbb{A}_\lambda) = \mathscr{I}$ (здесь $\mathbb{A}_\lambda$ и $\mathbb{B}_\lambda$ взяты из условия предложения 1.5), причем выбор $\mathbb{C}_{\alpha,\mathscr{I}}$ не обуславливается выбором Σ_1-цепи $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Отметим, что в общем случае данное допустимое множество не обязано сохранять свойство минимальности при фиксации только мощности или только идеала. Тем не менее справедливо следующее свойство для класса допустимых множеств $\mathscr{R}_{\alpha,\mathscr{I}} \leftrightharpoons \{\mathbb{A} \mid \mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \mathscr{I}, \mathrm{card}(\mathbb{A}) = \alpha\}$, где $\mathscr{I}$ и α — произвольные фиксированные идеал и кардинал соответственно.

Предложение 1.6. *$\mathscr{R}_{\alpha,\mathscr{I}}$ имеет наименьшее относительно E-сводимости допустимое множество.*

Более того, допустимые множества со свойством минимальности могут быть выбраны равномерно по α и $\mathscr{I}$ в смысле следующего определения.

Определение 1.6. Класс $\mathscr{R}$ допустимых множеств некоторой фиксированной сигнатуры назовем *M-классом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- $\mathscr{R}_{\mathscr{I}} (\leftrightharpoons \{\mathbb{A} \in \mathscr{R} \mid \mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \mathscr{I}\})$ является $\mathscr{I}$-минимальным для любого $\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)$;

• для любых идеала $\mathscr{I}$ и допустимых множеств $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1 \in \mathscr{R}_{\mathscr{I}}$ условие $\mathrm{card}(\mathbb{A}_0) = \mathrm{card}(\mathbb{A}_1)$ влечет соотношение $\mathbb{A}_0 \simeq \mathbb{A}_1$;

• для любых линейно упорядоченного множества $\langle \Lambda, \leqslant \rangle$ и Σ_1-цепи допустимых множеств $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ найдутся Σ_1-цепь допустимых множеств $\{\mathbb{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ из $\mathscr{R}$ и система отображений $\{\nu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такие, что для всех $\lambda \in \Lambda$

— $\nu_\lambda : \mathbb{B}_\lambda \sqsubseteq_E \mathbb{A}_\lambda$;
— $\mathscr{I}_e(\mathbb{B}_\lambda) = \mathscr{I}_e(\mathbb{A}_\lambda)$;
— $\mathrm{card}(\mathbb{A}_\lambda) = \mathrm{card}(\mathbb{B}_\lambda)$;
— $\nu_{\lambda'} \upharpoonright A_\lambda = \nu_\lambda$ для всех $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda \leqslant \lambda'$.

Минимальность для M-класса $\mathscr{R}$ имеет двоякий смысл. Во-первых, любое допустимое множество $\mathbb{A} \in \mathscr{R}$ будет наименьшим относительно E-сводимости в классе допустимых множеств мощности $\mathrm{card}(\mathbb{A})$, соответствующих идеалу $\mathscr{I}_e(\mathbb{A})$; во-вторых, класс $\mathscr{R}$ будет минимальным по включению с точностью до замыкания относительно изоморфных образов.

Пусть $\mathscr{K}^0$ — подкласс $\mathscr{K}$, в котором для любого $\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)$ класс ${\mathscr{K}_{\mathscr{I}}}^0 \leftrightharpoons \{\mathbb{A} \in \mathscr{K}^0 \mid \mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \mathscr{I}\}$ удовлетворяет тем же свойствам, что и $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$, а также в точности одному из следующих свойств ($\alpha \geq \mathrm{card}(\mathscr{I}^*)$):

$8'_\alpha$) $A \in \mathscr{I}^+ \Leftrightarrow \exists^\alpha x(\{n \mid \mathfrak{M} \models \exists z Q(z, x, \underline{n})\} = A)$.

Тогда $\mathscr{K}^0$ будет M-классом. Данный класс удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам класса $\mathscr{K}$, за исключением свойства замкнутости относительно взятия Σ_1-цепей. Однако, как нетрудно проверить, для любого M-класса справедлив следующий ослабленный вариант замкнутости относительно взятия Σ_1-цепей.

Предложение 1.7. *Пусть $\mathscr{R}$ — M-класс, а Σ_1-цепи $\{\mathbb{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{\mathbb{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ с системой отображений $\{\nu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ из определения таковы, что $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{A}_\lambda$ является допустимым множеством. Тогда $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{B}_\lambda \in \mathscr{R}$ и $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \nu_\lambda : \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{B}_\lambda \sqsubseteq_E \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{A}_\lambda$.*

Один из возможных способов задания M-классов состоит в построении наследственно конечных надстроек над подходящими моделями, чьи сигнатурные отношения и отношение равенства определимы в моделях класса $\mathscr{K}^0$ одними и теми же Σ-формулами без параметров. Однако отметим, что данный способ не позволяет получить все M-классы. В § 3 приводится M-класс $\mathscr{K}' = \bigcup\limits_{\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)} {\mathscr{K}_{\mathscr{I}}}'$, удовлетворяющий всем вышеперечисленным свойствам $\mathscr{K}^0$, для которого переносится большее количество принципов, нежели для класса $\mathscr{K}^0$.

Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ — произвольная наследственно конечная надстройка из $\mathscr{K}$. Естественное соответствие δ между $\widetilde{\omega}$ и $\mathrm{Ord}\,\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ является Σ-функцией, а $\widetilde{\omega}$ — Δ-подмножеством, что позволяет отождествить соответствующие элементы множеств $\widetilde{\omega}$ и $\mathrm{Ord}\,\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$.

Пусть $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \rightleftharpoons \{a \mid \mathfrak{M}_0 \models \exists z \exists y Q(z, a, y)\}$ и $\lambda_{\mathfrak{M}_0}$ — естественное соответствие из $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$ в множество всех подмножеств натуральных чисел, действующее по правилу $a \mapsto \{n \mid \mathfrak{M}_0 \models \exists z Q(z, a, \underline{n})\}$. Отметим, что Σ-функция

$$\gamma_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}, \\ \langle \delta(n), z \rangle, & \text{если } \langle x, z, n \rangle \in Q^{\mathfrak{M}_0}, \\ \delta(x), & \text{если } x \in \widetilde{\omega}, \\ \langle \varnothing, \{\gamma_0(z) \mid z \in x\} \rangle & \text{в противном случае} \end{cases}$$

осуществляет вложение $HF(M_0)$ в $HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})$.

В основном будем рассматривать только наследственно конечные надстройки, а в них любая формула эквивалентна некоторой формуле, параметрами которой являются праэлементы.

§ 2. Описание Σ-подмножеств.

Сначала дадим описание всех Σ-подмножеств, состоящих из праэлементов, наследственно конечных надстроек из $\mathscr{K}$. На самом деле оно совпадает с описанием Райса — Шапиро индексных множеств.

Зафиксируем наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}$, с которой свяжем идеал $\mathscr{I} \leftrightharpoons \mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0))$.

Предложение 2.1. *Для $k \geq 0$ следующие условия равносильны:*

1) $X \subseteq \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$ *определимо в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ Σ-*формулой* $\Phi(x_0)$ *с параметрами* $s_0, \ldots, s_{k-1} \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$;

2) $X \cup \{s_0, \ldots, s_{k-1}\} = \{x \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \mid \exists u \in \Theta(\lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_0) \oplus \cdots \oplus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_{k-1}))(D_u \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x))\} \cup \{s_0, \ldots, s_{k-1}\}$ *для некоторого оператора перечисления* Θ.

Более того, номер формулы Φ *(оператора перечисления* Θ*) находится эффективно по номеру оператора перечисления* Θ *(формулы* Φ*).*

Доказательство. Для каждого $A \in \mathscr{I}^*$ положим $Y_A \leftrightharpoons \{x \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \mid \exists u \in A(D_u \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x))\}$. Для множеств X и Y будем использовать обозначение $X \approx Y$, если $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечно.

($2 \Rightarrow 1$) Заметим, что если Y — Σ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ и $X \approx Y$, то X тоже будет Σ-подмножеством $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$. Пусть $A \in \mathscr{I}^*$ и $X \approx Y_A$. Тогда из соотношений $\mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)) = \mathscr{I}$ и

$$x \in Y_A \Leftrightarrow \exists u[u \in A \wedge \forall t \in D_u \exists z Q(z, x, t)]$$

заключаем, что Y_A — Σ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ и, следовательно, X — Σ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$.

($1 \Rightarrow 2$) Пусть множество X определимо Σ-формулой $\Phi(x_0, s_0, \ldots, s_{k-1})$ с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$, $k \geq 0$, из $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$. Докажем сначала две леммы.

Лемма 2.1. *Если $x, y \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$ таковы, что $x \in X$, $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(x) \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_0}(y)$ и $\{x, y\} \cap \{s_0, \ldots, s_{k-1}\} = \varnothing$, то $y \in X$.*

Доказательство. Для доказательства построим вспомогательную модель $\mathfrak{M}_1$ сигнатуры $\{0^1, s^2, Q^3\}$ следующим образом: для каждого $n \in \lambda_{\mathfrak{M}_0}(y) \setminus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x)$ возьмем $z_n \notin |\mathfrak{M}_0|$ так, что $z_{n_1} \neq z_{n_2}$, если $n_1 \neq n_2$. Теперь положим

$$|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_0| \cup \{z_n \mid n \in \lambda_{\mathfrak{M}_0}(y) \setminus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x)\}, \quad s^{\mathfrak{M}_1} = s^{\mathfrak{M}_0}, \quad 0^{\mathfrak{M}_1} = 0^{\mathfrak{M}_0},$$

$$Q^{\mathfrak{M}_1} = Q^{\mathfrak{M}_0} \cup \{\langle z_n, x, \underline{n} \rangle \mid n \in \lambda_{\mathfrak{M}_0}(y) \setminus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x)\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$ и, следовательно,

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \models \Phi(x, s_0, \ldots, s_{k-1}).$$

Кроме того, существует изоморфизм $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, для которого выполняются условия $f(x) = y$ и $f(s_i) = s_i$ для любого $i < k$. Отсюда заключаем, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(y, s_0, \ldots, s_{k-1})$. Таким образом, $y \in X$. $\square$

Лемма 2.2. *Если $x \in X$ таково, что $x \notin \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$, то существует $y \in X \setminus \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$ такое, что $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(y)$ конечно и $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(y) \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x)$.*

Доказательство. Так как Φ — Σ-формула и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(x, s_0, \dots, s_{k-1})$, то существует конечно порожденная (в нашем случае конечная) модель $\mathfrak{M}_0' \leqslant \mathfrak{M}_0$, для которой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \models \Phi(x, s_0, \dots, s_{k-1})$. Будем также считать, что $\widetilde{\omega} \cap |\mathfrak{M}_0'|$ — начальный сегмент $\widetilde{\omega}$. Пусть $y \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \setminus |\mathfrak{M}_0'|$ таково, что $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(y) = \{n \mid \mathfrak{M}_0' \models \exists z Q(z, x, \underline{n})\}$. Тогда существует вложение $f' : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, для которого $f'(x) = y$ и $f'(s_i) = s_i$ для любого $i < k$. Осталось лишь заметить, что $f'(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ и, следовательно, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(y, s_0, \dots, s_{k-1})$. Таким образом, $y \in X$. $\square$

Вернемся к доказательству предложения 2.1. Рассмотрим семейство всех конечных моделей $\mathfrak{M}^0$ сигнатуры $\{Q^3, s^2, 0^1\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

— $\omega' \rightleftharpoons \{x \mid \mathfrak{M}^0 \models \exists z \exists y Q(z, y, x)\}$ линейно упорядочено относительно порядка $x \leqslant_{\omega'} y$ — рефлексивного и транзитивного замыкания отношения $s^{\mathfrak{M}^0}$;

— $0^{\mathfrak{M}^0} \rightleftharpoons \{a\}$, где $a \in \omega'$ — наименьший элемент $\langle \omega', \leqslant_{\omega'} \rangle$;

— $s^{\mathfrak{M}^0} \subseteq (\omega')^2$, и если $\langle a, b \rangle \in s^{\mathfrak{M}^0}$, то b — последователь элемента a относительно порядка $\leqslant_{\omega'}$;

— $\forall x (x \notin \omega' \leftrightarrow \exists z \exists n (Q(z, x, n) \vee Q(x, z, n)))$;

— $\forall x (\exists z \exists n Q(x, z, n) \to (\exists! z \exists! n Q(x, z, n) \wedge \forall z \forall n \neg Q(z, x, n)))$;

— $\forall x_1 \forall x_2 (\exists z \exists n (Q(x_1, z, n) \wedge Q(x_2, z, n)) \to (x_1 = x_2))$.

Нетрудно понять, что данное семейство является сильно вычислимым в том смысле, что существует сильно вычислимая последовательность носителей моделей, сигнатурные отношения на которых равномерно вычислимы. Для этого достаточно рассмотреть вычислимую модель из класса $\mathscr{K}_{\mathbf{0}}$. Обозначим через $\mathscr{S}$ это семейство моделей с заданной на нем эффективной структурой. Тогда отношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}^0) \models \Phi(x, a_0, \dots, a_{k-1})$ будет вычислимо перечислимым (в классическом смысле) от $\mathfrak{M}^0 \in \mathscr{S}$, Σ-формулы Φ и элементов x, a_0, …, a_{k-1} из $|\mathfrak{M}^0|$.

Теперь введем еще одно вспомогательное понятие. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — модели сигнатуры σ и $\sigma' \subseteq \sigma$. Гомоморфизм $\phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ назовем σ'-*вложением*, если $\phi : \mathfrak{M} \upharpoonright \sigma' \to \mathfrak{M}' \upharpoonright \sigma'$ является вложением. Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ σ'-*вложима* в $\mathfrak{M}'$ (и обозначать как $\mathfrak{M} \hookrightarrow_{\sigma'} \mathfrak{M}'$), если существует σ'-вложение $\phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$. Определим множество A как

$$\Big\{ u : \exists \mathfrak{M}^0 \in \mathscr{S} \exists x \in |\mathfrak{M}^0| [\mathbb{HF}(\mathfrak{M}^0) \models \Phi(x, u_0, \dots, u_{k-1}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} \neg (x = u_i) \wedge ((\mathfrak{M}^0, u_0, \dots, u_{k-1}) \hookrightarrow_{\{s\}} (\mathfrak{M}_0, s_0, \dots, s_{k-1})) \wedge (\forall t \in |\mathfrak{M}^0| ((\exists z \in |\mathfrak{M}^0| \langle z, x, t \rangle \in Q^{\mathfrak{M}^0}) \leftrightarrow t \in D_u))] \Big\}. \quad (1)$$

Нетрудно установить, что $(\mathfrak{M}^0, u_0, \dots, u_{k-1}) \hookrightarrow_{\{s\}} (\mathfrak{M}_0, s_0, \dots, s_{k-1})$ равносильно условию $\forall i < k [B_{\langle \mathfrak{M}^0, u_i \rangle} \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_i)]$, где $B_{\langle \mathfrak{M}, u \rangle} \rightleftharpoons \{n \mid \exists z \in |\mathfrak{M}| Q(z, u, \underline{n})\}$ — сильно вычислимая последовательность, поэтому из (1) следует $A \leqslant_e \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_0) \oplus \dots \oplus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_{k-1})$. Покажем, что $X \approx Y_A$. Для этого достаточно для каждой $\exists$-формулы φ сигнатуры $\{Q, s, 0\}$ построить $\exists$-формулу ψ с позитивным вхождением Q, эквивалентную формуле φ как в модели $\mathfrak{M}_0$, так и в моделях класса $\mathscr{S}$.

Данное построение проводится индукцией по сложности формул с использованием следующего соотношения:

$$
\begin{aligned}
\neg Q(x_0,x_1,x_2) \equiv \exists x_3 \exists x_4 (Q(x_3,x_0,x_4) &\vee (Q(x_3,x_4,x_0) \vee (Q(x_1,x_3,x_4) \\
&\vee (Q(x_3,x_4,x_1) \vee (Q(x_2,x_3,x_4) \vee (Q(x_3,x_2,x_4) \\
&\vee (Q(x_0,x_3,x_4) \wedge (\neg(x_1 = x_3) \vee \neg(x_2 = x_4)))))))). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Из доказательства предложения нетрудно установить следующее техническое утверждение, которое будет часто использоваться в дальнейшем.

Следствие 2.1. *Пусть* $X \subseteq (\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})^l$, $l \geq 1$, *определимо в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ *некоторой* Σ*-формулой с параметрами* $s_0, \ldots, s_{k-1}$ *из* $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$ *и существует* $a \in X$ *такое, что* $\mathrm{sp}(a) \cap \{s_0, \ldots, s_{k-1}\} = \varnothing$, $|\mathrm{sp}(a)| = l$. *Тогда существует конечное* $F \subseteq \omega$ *такое, что* $b \in X$, *если* $|\mathrm{sp}(b)| = l$, $\mathrm{sp}(b) \cap \{s_0, \ldots, s_{k-1}\} = \varnothing$ *и* $F \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_0}(u)$ *для любого* $u \in \mathrm{sp}(b)$.

Так как существует Σ-функция из $HF(M_0)$ в $HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})$, осуществляющая вложение, то ограничение на параметры в предложении 2.1 можно естественным образом опустить. Таким образом, данное предложение дает полное описание всех Σ-подмножеств $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$. Кроме того, слегка модифицировав доказательство, нетрудно получить описание всех Σ-предикатов на $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$, а последнее уже позволяет получить посредством функции γ_0 и обратной к ней полное описание всех Σ-предикатов на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$. Однако для дальнейшего изложения будет достаточно только рассмотренного частного случая.

§ 3. О фридберговых нумерациях

Здесь приводится пример допустимого множества $\mathbb{A}$, не имеющего разрешимой (даже позитивной) вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации семейства всех Σ-подмножеств.

Определение 3.1. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и $S \neq \varnothing$; любое отображение из $|\mathbb{A}|$ на S называется $\mathbb{A}$-*нумерацией* S.

Определение 3.2. Пусть $\nu : A \twoheadrightarrow S$ — $\mathbb{A}$-нумерация множества S и $\eta_\nu \rightleftharpoons \{\langle a,b\rangle \in A^2 \mid \nu(a) = \nu(b)\}$ — нумерационная эквивалентность. Тогда ν называется *позитивной*, если η_ν — Σ-предикат; ν называется *негативной*, если $A^2 \setminus \eta_\nu$ — Σ-предикат; ν называется *разрешимой*, если она является позитивной и негативной одновременно.

Определение 3.3. $\mathbb{A}$-нумерацию ν семейства S назовем *однозначной*, если найдется всюду определенная унарная Σ-функция f на $\mathbb{A}$, что $\eta_\nu = \{\langle a,b\rangle \in A^2 \mid f(a) = f(b)\}$.

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathscr{I}$ *— неглавный идеал и* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$. *Тогда не существует позитивной вычислимой* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$*-нумерации семейства всех* Σ*-подмножеств.*

Доказательство. Предположим, что ν — позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0))$. Тогда множества $\{\langle a,b\rangle \mid b \in \nu(a),\ a \in HF(M_0)\}$ и η_ν определимы соответственно некоторыми Σ-формулами $\Phi_0(x_0,x_1,s_0,\ldots,s_{k-1})$ и $\Phi_1(x_0,x_1,s_0,\ldots,s_{k-1})$ с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$ из $\mathrm{Code}(\mathfrak{M}_0)$. Поскольку идеал $\mathscr{I}$ неглавный, существует числовое множество $A \nleq_e \bigoplus_{i<k} \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_i)$. Пусть a_0 таково, что $\nu(a_0) = A$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{sp}(a_0) \subseteq \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$. Из доказательства теоремы 1.1 в [1]

вытекает, что $A \leqslant_e \bigoplus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(\mathrm{sp}(a_0))$ и, следовательно, $\mathrm{sp}(a_0) \nsubseteq \{s_0, \ldots, s_{k-1}\}$; $B \in \lambda_{\mathfrak{M}_0}(\mathrm{sp}(a_0) \setminus \{s_0, \ldots, s_{k-1}\})$ для некоторого $B \neq \omega$. Найдется автоморфизм $f : (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0), s_0, \ldots, s_{k-1}) \to (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0), s_0, \ldots, s_{k-1})$, для которого $\mathrm{sp}(a_0) \cap \mathrm{sp}(f(a_0)) \subseteq \{s_0, \ldots, s_{k-1}\}$. В частности, $\nu(a_0) = \nu(f(a_0)) = A$ и $\langle a_0, f(a_0)\rangle \in \eta_\nu$. Пусть $g : T \to \{x \mid \langle a_0, x\rangle \in \eta_\nu\}$ — некоторая Σ-функция, для которой $g(z) = f(a_0)$ для некоторого z, и T — множество кортежей из $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$, удовлетворяющих условию $\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}(g(a)) \setminus \{s_0, \ldots, s_{k-1}\}$. Существование такой функции обеспечивает описание Σ-подмножеств в наследственно конечных надстройках [11]. По следствию 2.1 существует b_0, для которого $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(\mathrm{sp}(b_0) \setminus \{s_0, \ldots, s_{k-1}\}) = \{\omega\}$ и $\langle a_0, b_0\rangle \in \eta_\nu$. Однако

$$\nu(b_0) \leqslant_e \bigoplus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(\mathrm{sp}(b_0 \cup \{s_0, \ldots, s_{k-1}\})) \leqslant_e \bigoplus_{i<k} \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_i);$$

противоречие. $\square$

Непосредственно из доказательства предложения вытекает

Следствие 3.1. *При условиях предложения* 3.1 *не существует позитивной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$-нумерации семейства S, если $S \supseteq \mathscr{I}^*$.*

Теорема 3.1. *Существует допустимое множество $\mathbb{A}$, не имеющее разрешимой вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{A})$.*

В [12] приводятся примеры допустимых множеств $\mathbb{A}$ с однозначными вычислимыми $\mathbb{A}$-нумерациями $\Sigma(\mathbb{A})$, имеющих разрешимые вычислимые $\mathbb{A}$-нумерации $\Sigma(\mathbb{A})$, но не имеющих однозначных вычислимых $\mathbb{A}$-нумераций $\Sigma(\mathbb{A})$.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{I}$ — неглавный идеал и $\mathscr{R}$ — $\mathscr{I}$-минимальный класс. Тогда не существует позитивной вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации семейства всех Σ-подмножеств для любого допустимого множества $\mathbb{A} \in \mathscr{R}$.*

Доказательство. В силу ω-однородности и реализуемости одних и тех же типов в моделях класса $\mathscr{R}$ достаточно доказать утверждение теоремы хотя бы для одного допустимого множества из класса $\mathscr{R}$. Возьмем произвольное допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ из класса $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$. Тогда найдутся $\mathbb{A}_0 \in \mathscr{R}$ и $\nu : \mathbb{A}_0 \sqsubseteq_E \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$. Допустим, что утверждение теоремы не выполняется и θ — позитивная вычислимая $\mathbb{A}_0$-нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{A}_0)$. Тогда $\theta \circ \nu$ — позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$-нумерация некоторого семейства Σ-подмножеств, при этом можно считать, что данное семейство содержит $\mathscr{I}^*$. Осталось применить следствие 3.1. $\square$

Непосредственно из доказательства теоремы получаем

Следствие 3.2. *При условиях теоремы 3.2 не существует позитивной вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации семейства S, если $S \supseteq \mathscr{I}^*$ и $\mathbb{A} \in \mathscr{R}$.*

Следствие 3.3. *Пусть $\mathscr{I}$ — неглавный идеал и $\mathbb{A} \in \mathscr{R}_{\alpha,\mathscr{I}}$ для некоторого кардинала α. Тогда в $\mathbb{A}$ не существует позитивной вычислимой $\mathbb{A}$-нумерации семейства всех $\mathbb{A}$-в. п. множеств, если $\mathbb{A}$ — наименьшее относительно e-сводимости в $\mathscr{R}_{\alpha,\mathscr{I}}$.*

Обозначим через $\mathbb{R}$ поле действительных чисел. Из следствия 3.2 и теоремы 2.2 в [10] следует

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{I}$ — любой идеал и $\mathscr{R}$ — $\mathscr{I}$-минимальный класс. Тогда $\mathbb{R} \not\leqslant_\Sigma \mathbb{A}$ для любого допустимого множества $\mathbb{A} \in \mathscr{R}$.*

Пусть $\mathscr{R}'$ — любой L_e-минимальный класс. Тогда для любого $\mathbb{A} \in \mathscr{R}'$ семейство $\mathscr{P}(\omega)$ вычислимо в $\mathbb{A}$ и по теореме 2.1 из [10] $\mathbb{R}$ определимо в $\mathbb{A}$. Таким образом, в каждом допустимом множестве класса $\mathscr{R}'$ поле действительных чисел определимо, но не Σ-определимо.

§ 4. Принцип редукции для минимальных классов

Говорят, что допустимое множество $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу *редукции*, если для любых $B_0, B_1 \in \Sigma(\mathbb{A})$ найдутся непересекающиеся множества $C_0, C_1 \in \Sigma(\mathbb{A})$, для которых $C_i \subseteq B_i$, $i = 0, 1$; $B_0 \cup B_1 = C_0 \cup C_1$.

Предложение 4.1. *В $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ не справедлив принцип редукции для любой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}$.*

Доказательство. Пусть $X_0 = \{x \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \mid 0 \in \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x)\}$ и $X_1 = \{x \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \mid 1 \in \lambda_{\mathfrak{M}_0}(x)\}$. Очевидно, данные множества Σ-определимы, а по предложению 2.1, если Σ-подмножества $Y_i \subseteq X_i$, $i = 0, 1$, удовлетворяют условию $X_0 \cup X_1 = Y_0 \cup Y_1$, то найдется $a \in Y_0 \cap Y_1$ с условием $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(a) = \{0, 1\}$. □

Замечание 4.1. В доказательстве предложения 4.1 можно было взять вместо $\{0\}$ и $\{1\}$ два любых конечных несравнимых по включению подмножества ω.

Теорема 4.1. *Если $\mathscr{I} \in \mathscr{J}(L_e)$ — неглавный идеал и $\mathscr{R}$ — $\mathscr{I}$-минимальный класс, то в $\mathbb{A}$ не выполняется принцип редукции для $\mathbb{A} \in \mathscr{R}$.*

Доказательство. Ввиду ω-однородности моделей класса $\mathscr{R}$ и реализуемости одних и тех же типов на них, достаточно показать, что хотя бы одна модель $\mathbb{A}_0 \in \mathscr{R}$ не удовлетворяет принципу редукции.

Возьмем произвольную наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$. Тогда найдутся допустимые множества $\mathbb{A}_0 \in \mathscr{R}$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}$, для которых $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \sqsubseteq_E \mathbb{A}_0$ и $\mathbb{A}_0 \sqsubseteq_E \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$. Пусть ν_0 и ν_1 осуществляют E-сводимости $\mathbb{A}_0$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$ к $\mathbb{A}_0$ соответственно. Тогда, очевидно, $\nu_1 \circ \nu_0$ осуществляет E-сводимость $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$.

Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1} \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$, $k < \omega$, — все параметры, участвующие в определении сигнатурных предикатов и предиката равенства на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$. Положим $A_0 = \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_0) \oplus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_1) \oplus \cdots \oplus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(s_{k-1})$. Тогда

$$\lambda_{\mathfrak{M}_1}(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_1}) \cup \{\varnothing\} = \mathscr{I}^* = \{\Theta_n(R, A_0) \mid n \in \omega,\ R \in \mathscr{I}^*\}$$

для некоторой вычислимой последовательности $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$ операторов перечисления по теореме 1.3. При этом будем считать, что индекс n однозначно определяет строение элемента из $HF(M_0)$ относительно параметров $s_0, \ldots, s_{k-1}$ (другими словами, если элементы a и a' являются прообразами кодов некоторых множеств $\Theta_n(R, A_0)$ и $\Theta_n(R', A_0)$ соответственно, то существует изоморфизм

$$\begin{aligned} f : \langle &\mathrm{TC}(\{\langle a, s_0, \ldots, s_{k-1}, \varnothing\rangle\}), \in^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)} \restriction \mathrm{TC}(\{\langle a, s_0, \ldots, s_{k-1}, \varnothing\rangle\}), \mathrm{sp}(a)\rangle \\ &\to \langle \mathrm{TC}(\{\langle a', s_0, \ldots, s_{k-1}, \varnothing\rangle\}), \in^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)} \restriction \mathrm{TC}(\{\langle a', s_0, \ldots, s_{k-1}, \varnothing\rangle\}), \mathrm{sp}(a')\rangle). \end{aligned}$$

Поскольку идеал $\mathscr{I}$ неглавный, существует множество $A_1 \in \mathscr{I}^*$ такое, что $A_1 \not\leqslant_e A_0$. Пусть n_0 таково, что $A_1 = \Theta_{n_0}(R_0, A_0)$ для некоторого $R_0 \in \mathscr{I}^*$. Тогда, очевидно, $R_0 \not\leqslant_e A_0$ и, в частности, R_0, $\omega \setminus R_0$ бесконечны. Кроме того,

$\Theta_{n_0}(R_0, A_0) \subsetneq \Theta_{n_0}(\omega, A_0)$. Выберем по меньшей мере двухэлементное конечное множество $F \subset \omega$, для которого $F \subseteq \Theta_{n_0}(\omega, A_0) \setminus \Theta_{n_0}(R_0, A_0)$. Определим теперь вычислимые $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$-нумерации μ_0 и μ_1 по следующим правилам:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_1}, & \text{если } x = \langle y, n\rangle \text{ и} \\ & \quad \langle z, y, n\rangle \in Q^{\mathfrak{M}_1} \text{ для некоторых } z, y, n; \\ \varnothing & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mu_1(x) \equiv \{a \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_1} \mid F \subseteq \lambda_{\mathfrak{M}_1}(a)\}.$$

Докажем, что для

$$T_0 \leftrightharpoons (\nu_1 \circ \nu_0)^{-1}(\{\langle x, y\rangle \mid y \in \mu_0(x)\}), \quad T_1 \leftrightharpoons (\nu_1 \circ \nu_0)^{-1}(\{\langle x, y\rangle \mid y \in \mu_1(x)\})$$

не выполняется свойство редукции. Допустим, что $S_0 \subseteq T_0$, $S_1 \subseteq T_1$ — не пересекающиеся в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ Σ-подмножества, для которых $S_0 \cup S_1 = T_0 \cup T_1$. Тогда предикат

$$S_1^* \leftrightharpoons \{\langle n, a\rangle \mid \exists y(\langle\langle(\nu_1 \circ \nu_0)(a), n\rangle, y\rangle \in (\nu_1 \circ \nu_0)(S_1))\}$$

будет Σ-предикатом на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, а $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$-нумерация

$$\rho(x) = \begin{cases} \{n \mid \langle n, x\rangle \in S_1^*\}, & \text{если } x \in \mathrm{Pr}_2(S_1^*), \\ \varnothing & \text{в противном случае} \end{cases}$$

вычислима. Заметим, что найдутся a_0 и b_0, для которых

$$\lambda_{\mathfrak{M}_1}((\nu_1 \circ \nu_0)(a_0)) = \Theta_{n_0}(R_0, A_0), \quad \lambda_{\mathfrak{M}_1}((\nu_1 \circ \nu_0)(b_0)) = \Theta_{n_0}(\omega, A_0)$$
$$\rho(a_0) = \omega \setminus \Theta_{n_0}(R_0, A_0), \quad \rho(b_0) = \omega \setminus \Theta_{n_0}(\omega, A_0).$$

Возьмем теперь оператор перечисления Θ^* такой, что

$$\Theta^*(R_0, B_0) = \omega \setminus \Theta_{n_0}(R_0, A_0), \quad \Theta^*(\omega, B_0) = \omega \setminus \Theta_{n_0}(\omega, A_0)$$

для какого-то $B_0 \subseteq \omega$, существование которого противоречит монотонности оператора и выбору R_0 и n_0 Осталось заметить, что на паре Σ-подмножеств $\nu_0(T_0)$ и $\nu_0(T_1)$ в $\mathbb{A}_0$ нарушается принцип редукции. $\square$

Из доказательства теоремы непосредственно получаем

Следствие 4.1. *Пусть $\mathscr{I}$ — неглавный идеал и $\mathbb{A} \in \mathscr{R}_{\alpha,\mathscr{I}}$ для некоторого кардинала α. Тогда в $\mathbb{A}$ не выполняется принцип редукции, если $\mathbb{A}$ — наименьшее относительно E-сводимости в $\mathscr{R}_{\alpha,\mathscr{I}}$.*

Пусть $\mathscr{R}$ — M-класс, а $\mathscr{I}$ — счетный неглавный идеал. Нетрудно построить счетную возрастающую последовательность $\mathbf{a_0} <_e \mathbf{a_1} <_e \dots <_e \mathbf{a_n} <_e \dots$, для которой $\mathscr{I} = \langle \mathbf{a_n} \mid n \in \omega\rangle$. С данной последовательностью естественным образом связана Σ_1-цепь $\{\mathbb{A}_n\}_{n\in\omega}$ допустимых множеств из класса $\mathscr{R}$ такая, что $\mathscr{I}_e(\mathbb{A}_n) = \widehat{\mathbf{a}}_\mathbf{n}$ и $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathbb{A}_n \in \mathscr{R}$ (см. предложение 1.7). Таким образом, из доказательства теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.2. *Для любого счетного неглавного идеала $\mathscr{I}$ существует e-степень $\mathbf{a} \in \mathscr{I}$, для которой в допустимых множествах класса $\mathscr{R}_{\widehat{\mathbf{b}}}$ не справедлив принцип редукции, как только $\widehat{\mathbf{a}} \leqslant \widehat{\mathbf{b}} \leqslant \mathscr{I}$.*

Из доказательства теоремы 4.1 также нетрудно извлечь, что если $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ — неглавные идеалы, для которых $\mathscr{I} \leqslant \mathscr{J}$, то в моделях класса $\mathscr{R}_{\mathscr{J}}$ (рассматриваемых как Σ_1-расширения моделей класса $\mathscr{R}_{\mathscr{I}}$) свойство редукции нарушается на подмножествах, определимых Σ-формулами, которые определяют множества $\nu_0(T_0)$ и $\nu_0(T_1)$ в моделях класса $\mathscr{R}_{\mathscr{I}}$ из доказательства. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 4.2. *Пусть $\mathscr{R}$ — M-класс. Тогда существует $F \subseteq L_e$ такое, что $F \cap \mathscr{I} \neq \varnothing$ для любого неглавного идеала, и в моделях $\mathscr{R}_{\mathscr{J}}$ не выполняется принцип редукции, как только $\mathscr{J} \in \mathscr{J}(L_e)$ и $\mathscr{J} \cap F \neq \varnothing$.*

Открытый вопрос. Справедливо ли следующее утверждение: если $F \subseteq L_e$ плотно в семействе неглавных идеалов (т. е. $F \cap \mathscr{I} \neq \varnothing$ для любого неглавного идеала $\mathscr{I}$), то $F \supseteq L_e \setminus \{\mathbf{0}\}$?

В завершение данного параграфа приведем пример M-класса $\mathscr{R}$ такого, что в моделях класса $\mathscr{R}_{\mathbf{0}}$ справедлив принцип редукции. Для этого достаточно в $\mathscr{K}^0$ заменить подкласс $\mathscr{K}^0_{\mathbf{0}} \leftrightharpoons \{\mathbb{A} \in \mathscr{K}^0 \mid \mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \mathbf{0}\}$ классом $\mathscr{R}_{\mathbf{0}}$ наследственно конечных надстроек, основания которых удовлетворяют всем прежним свойствам, за исключением серии свойств $8'_\alpha$, 9, и к тому же

$8 \gg .\ \exists^\infty x(\{n \mid \mathfrak{M} \models \exists z Q(z,x,\underline{n})\} = \omega)$;

$9 \gg .\ \neg\exists x(\{n \mid \mathfrak{M} \models \exists z Q(z,x,\underline{n})\} \neq \omega)$.

§ 5. О принципах в допустимых множествах

Данный параграф посвящен изучению вычислимых принципов, которые сохраняются на минимальных классах с идеалов.

Будем говорить, что допустимое множество $\mathbb{A}$ удовлетворяет принципу *тотальной продолжимости*, если для любой частичной Σ-функции $\varphi(x)$ найдется всюду определенная Σ-функция $f(x)$, для которой $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

Предложение 5.1. *В $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ не справедлив принцип тотальной продолжимости для любой наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ из $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение не выполняется для некоторой наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ из $\mathscr{K}$. Рассмотрим частичную Σ-функцию $\varphi(x,y)$, для которой $\varphi(x,y) = z \Leftrightarrow Q(z,y,x)$. Пусть $f(x,y)$ — всюду определенная Σ-функция, для которой $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$. Отметим, что

$$n \notin \lambda_{\mathfrak{M}_0}(a) \Leftrightarrow \exists z[\neg Q(z,a,n) \wedge (f(n,a) = z)],$$

поэтому $\mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0))$ с необходимостью замкнут относительно операции скачка. Далее, предположим, что $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$ — параметры из $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$, участвующие в определении Γ_f. Тогда возьмем любое $b \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$, для которого $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(b) \neq \omega$ и b не является параметром. Тогда из следствия 2.1 получаем, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \exists z[\neg Q(z,b',n) \wedge (f(n,b') = z)]$ для некоторых $b' \in \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$ с условием $\lambda_{\mathfrak{M}_0}(b') = \omega$ и $n \in \omega \setminus \lambda_{\mathfrak{M}_0}(b)$; противоречие. □

Таким образом, на класс $\mathscr{K}$ не переносится свойство тотальной продолжимости с идеалов. Перейдем к построению модифицированного класса допустимых множеств, в котором отсутствует данный недостаток. Построенный класс будет M-классом.

Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ — наследственно конечная надстройка из $\mathscr{K}^0$. Построим модель $\mathfrak{M}'_0$ предикатной сигнатуры $\{Q^3, s^2, 0^1\}$, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, по следующему правилу:

- $M'_0 \leftrightharpoons \widetilde{\omega} \cup \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0} \cup \{\langle z,k\rangle \mid k \in \widetilde{\omega}, z \in M_0 \setminus (\widetilde{\omega} \cup \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})\}$;
- $0^{\mathfrak{M}'_0} \leftrightharpoons 0^{\mathfrak{M}_0}$; $s^{\mathfrak{M}'_0} \leftrightharpoons s^{\mathfrak{M}_0}$;
- $Q^{\mathfrak{M}'_0} \leftrightharpoons \{\langle\langle a_0,a_1\rangle,b,c\rangle \mid a_1 \in \widetilde{\omega}, \langle a_0,b,c\rangle \in Q^{\mathfrak{M}_0}\}$.

Фактически основной особенностью построенных моделей является наличие счетного числа неразличимых свидетелей для попадания натурального числа в множество (напомним, что попадание натурального числа в множество в моделях класса $\mathscr{K}^0$ обеспечивается лишь одним свидетелем). В модели $\mathfrak{M}_0'$ множество $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}$ будем обозначать через $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0'}$. Очевидно, $\mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)) \leqslant \mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'))$; из Σ-определимости $\mathfrak{M}_0'$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ следует и обратное включение. Таким образом, $\mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)) = \mathscr{I}_e(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'))$.

Класс наследственно конечных надстроек, построенных по данному правилу, исходя из моделей класса $\mathscr{K}^0_{\mathscr{I}} \leftrightharpoons \{\mathbb{A} \in \mathscr{K}^0 \mid \mathscr{I}_e(\mathbb{A}) = \mathscr{I}\}$, обозначим через $\mathscr{K}'_{\mathscr{I}}$, т. е. $\mathscr{K}'_{\mathscr{I}} \leftrightharpoons \{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \in {\mathscr{K}_{\mathscr{I}}}^0\}$; $\mathscr{K}' \leftrightharpoons \cup_{\mathscr{I}\in\mathscr{J}(L_e)}{\mathscr{K}_{\mathscr{I}}}'$.

Остальную часть параграфа посвятим изучению свойств, которые будут переноситься на класс $\mathscr{K}'$ с идеалов.

Предложение 5.2. *Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ — допустимое множество из $\mathscr{K}^0$, а $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \in \mathscr{K}'$ построена по $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ по правилу, приведенному выше. Пусть также $A \subseteq (\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})^l$, $l \geq 1$. Тогда $A \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0))$, если и только если $A \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'))$.*

Доказательство. Сначала определим два отображения $\nu : HF(M_0) \twoheadrightarrow HF(M_0')$ и $\mu : HF(M_0') \twoheadrightarrow HF(M_0)$:

$$\nu_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \widetilde{\omega} \cup \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}, \\ x, & \text{если } x \in (M_0 \setminus (\widetilde{\omega} \cup \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})) \times \widetilde{\omega}, \\ \{\nu_0(z) \mid z \in x'\}, & \text{если } x = \langle \varnothing, x' \rangle \text{ и } \nu_0(z) \text{ определено} \\ & \qquad\qquad \text{для любого } z \in x'; \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu_0(x), & \text{если } \nu_0(x) \text{ определено}, \\ \varnothing & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$\mu_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \widetilde{\omega} \cup \mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}, \\ z, & \text{если } Q^{\mathfrak{M}_0'}(x,y,n) \text{ и } Q^{\mathfrak{M}_0}(z,y,n) \\ & \qquad\qquad \text{для некоторых } y, n, \\ \{\mu_0(z) \mid z \in x'\}, & \text{если } x = \langle \varnothing, x' \rangle \text{ и } \mu_0(z) \text{ определено} \\ & \qquad\qquad \text{для любого } z \in x', \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_0(x), & \text{если } \mu_0(x) \text{ определено}, \\ \varnothing & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Из определений следует, что $\nu \restriction HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0}) = \mu \restriction HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0'})$ и к тому же $h \leftrightharpoons \nu \restriction HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})$ является Σ-функцией как на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, так и на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$, причем $\nu(HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})) = \mu(HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})) = HF(\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})$. Кроме того, отображения ν и μ осуществляют E-сводимости $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$ к $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ соответственно, поскольку для них выполняется достаточное условие, приведенное в п. 1.2.

Пусть теперь $A \subseteq (\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0})^l$, $l \geq 1$. Если $A \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0))$, то $\mu^{-1}(A) \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'))$ и, следовательно, $A = h(\mu^{-1}(A)) \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'))$. Аналогично доказывается, что $A \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'))$ влечет $A \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0))$. $\square$

Непосредственно из предложения 5.2 и доказательства предложения 4.1 (X_0 и X_1 из доказательства являются семействами кодов) вытекает

Следствие 5.1. *В $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$ не выполняется принцип редукции для любой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \in \mathscr{K}'$.*

Теперь приведем основное техническое утверждение, позволяющее с единых позиций рассматривать ряд свойств дескриптивной теории множеств на моделях класса $\mathscr{K}'$. При первом прочтении работы доказательство леммы рекомендуется опустить. Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$ — произвольная наследственно конечная надстройка из $\mathscr{K}'$.

Лемма 5.1. *Существуют Δ-предикаты $\mathscr{F} \subseteq HF(M_0')^2 \times (M_0')^{<\omega}$ и* $\mathrm{Cons} \subseteq \mathrm{Ord}\,\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \times HF(M_0') \times (M_0')^{<\omega}$, *для которых выполняются условия:*

(i) *для любых $x \in HF(M_0')$ и набора $s \in (M_0')^{<\omega}$ существует, и притом единственное, n такое, что справедливо* $\mathrm{Cons}(n, x, s)$;

(ii) *пусть $\langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle \in (M_0')^k$, $k \geq 0$, и A_0, A_1 — подмножества, определимые некоторыми Σ-формулами с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$, для которых справедливо следующее:*

1) $A_0 \cap A_1 = \varnothing$;

2) $A_0 \cup A_1 \subseteq \{a \mid \mathrm{Cons}(n, a, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle)\}$ *для некоторого n;*

тогда $A_0 = \varnothing$ или $A_1 = \varnothing$;

(iii) *пусть $s \in (M_0')^{<\omega}$ и n таковы, что выполняются $\mathscr{F}(x, y, s)$ и* $\mathrm{Cons}(n, \langle x, y\rangle, s)$ *для некоторых $x, y \in HF(M_0')$; тогда* $\{\langle a, b\rangle \mid \mathrm{Cons}(\mathrm{n}, \langle \mathrm{a}, \mathrm{b}\rangle, \mathrm{s})\}$ *является графиком некоторой Σ-функции;*

(iv) *пусть для $x, y \in HF(M_0')$ существует Σ-функция f, параметрами, участвующими в определении которой являются $s_0, \ldots, s_{k-1} \in M_0'$, $k \geq 0$, переводящая x в y; тогда справедливо $\mathscr{F}(x, y, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle)$.*

Доказательство. Обогатим модель $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$ до $\hbar \leftrightharpoons (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0'), \mathrm{Step}, \mathrm{Code}, \mathrm{Nat}, \{n\}_{n\in\omega}, \varphi, \varphi_0, \zeta, \theta)$ так, что

- $\mathrm{Step}(a) \Leftrightarrow \exists b \exists c Q(a, b, c) \Leftrightarrow (\mathrm{U}(a) \wedge \neg\exists b \exists c (Q(b, a, c) \vee Q(b, c, a)))$;
- $\mathrm{Code}(a) \Leftrightarrow \exists b \exists c Q(b, a, c) \Leftrightarrow (\mathrm{U}(a) \wedge \neg\exists b \exists c (Q(a, b, c) \vee Q(b, c, a)))$;
- $\mathrm{Nat}(a) \Leftrightarrow \exists b \exists c Q(b, c, a) \Leftrightarrow (\mathrm{U}(a) \wedge \neg\exists b \exists c (Q(b, a, c) \vee Q(a, b, c)))$;
- $\zeta(a, b) \Leftrightarrow \exists c \exists d (Q(a, c, d) \wedge Q(b, c, d))$;
- $\theta(a, b) \Leftrightarrow \exists c (\exists d Q(a, c, d) \wedge \exists d' Q(b, c, d'))$;
- $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \exists n Q(x, y, n)$;
- $\varphi_0(x) = n \Leftrightarrow \exists z Q(x, z, n)$.

Непосредственно из определения следует, что $\hbar$ является Δ-обогащением $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$. Все обозначения, введенные для определения $\hbar$, будут использоваться исключительно в этом доказательстве.

Под *конструкцией с параметрами* $s_0, \ldots, s_{k-1}$ будем понимать класс элементов X, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Для любых $x, y \in X$ существует изоморфизм

$$f : (\hbar, \{s_0\}, \ldots, \{s_{k-1}\}) \restriction \mathrm{TC}(\{x\}) \to (\hbar, \{s_0\}, \ldots, \{s_{k-1}\}) \restriction \mathrm{TC}(\{y\}),$$

для которого

$$\text{в } \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \text{ выполняется } \varphi_0(u) = \varphi_0(f(u)) \text{ для любого } u \in \mathrm{sp}(x) \cap \mathrm{Step}\,. \tag{2}$$

2. Если $x \in X$ и для x, y найдется f из первого условия, то $y \in X$.

Теперь каждой конструкции можно сопоставить, и притом однозначно, число, которое будем называть *кодом конструкции* (не путать с кодами, которые являются элементами $\mathrm{Code}_{\mathfrak{M}_0'}$!). Из рассмотрений вычислимой модели из класса $\mathscr{K}_0'$ следует, что кодировку можно выбрать так, чтобы предикат «n является кодом конструкции элемента x с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}''$ был Δ-предикатом на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$. Покажем, что данный предикат можно взять в качестве Cons.

(i) Пусть $\langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle \in (M_0')^k$, $k \geq 0$. Поскольку каждый элемент $x \in HF(M_0')$ имеет некоторую конструкцию с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$, найдется, и притом единственное, n, для которого $\mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle)$.

(ii) Пусть $\langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle \in (M_0')^k$, $k \geq 0$, и A_0, A_1 — непустые подмножества, определимые некоторыми Σ-формулами с параметрами $s_0, \dots, s_{k-1}$ и удовлетворяющие условию 2 леммы. Покажем, что в этом случае найдутся $x_0 \in A_0$, $x_1 \in A_1$, которые переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$, действующим тождественно на элементах $s_0, \dots, s_{k-1}$. Отсюда, в частности, будет следовать соотношение $A_0 \cap A_1 \neq \varnothing$. Приведем только способ нахождения $x_0 \in A_0$; для $x_1 \in A_1$ рассуждения идентичны.

Возьмем произвольное $x \in A_0$. Если

$$\mathrm{sp}(x) \subseteq \mathrm{Nat} \cup \{s_0, \dots, s_{k-1}\} \cup \varphi(\{s_0, \dots, s_{k-1}\}),$$

то из определения конструкции следует, что $A_0 = \{x\}$ и в качестве x_0 возьмем x. Теперь предположим, что

$$\mathrm{sp}(x) \nsubseteq \mathrm{Nat} \cup \{s_0, \dots, s_{k-1}\} \cup \varphi(\{s_0, \dots, s_{k-1}\}).$$

По теореме 1 из [11] существует Σ-функция $g_{n_0} : T \twoheadrightarrow A_0$ для некоторого Σ-подмножества $T \subseteq \mathrm{Step}^l \times \mathrm{Code}^m$, $l, m \geq 0$, $l + m > 0$, состоящего из множества кортежей с попарно различными координатами, удовлетворяющая условию

$$\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}(g_{n_0}(a)) \setminus (\mathrm{Nat} \cup \{s_0, \dots, s_{k-1}\} \cup \varphi(\{s_0, \dots, s_{k-1}\}))$$

для любого $a \in T$. Пусть

$$T' \leftrightharpoons \{\langle \varphi(u_0), \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_{l-1}); v_0, \dots, v_{m-1}\rangle \\ \mid \langle u_0, u_1, \dots, u_{l-1}; v_0, \dots, v_{m-1}\rangle \in T\},$$

а T'' получено из T' выкидыванием из кортежей координат, являющихся параметрами. Разберем два случая.

1. $T'' = \{\varnothing\}$. Это означает, что $T \subseteq \mathrm{Step}^l$ и все координаты под действием φ переходят в $\{s_0, \dots, s_{k-1}\} \cup \varphi(\{s_0, \dots, s_{k-1}\})$. По определению конструкции с параметрами любые два элемента $\{a \mid \mathrm{Cons}(n_0, a, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle)\}$ переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$, действующим тождественно на параметрах. Положим $x_0 = x$.

2. Не выполняется случай 1. Тогда T'' так же, как и T', будет Σ-подмножеством и к тому же $T'' \subseteq \mathrm{Code}^s$ для некоторого $s > 0$. Без ограничения общности можно считать, что кортежи из T'' имеют попарно различные координаты. По предложению 5.2 и следствию 2.1 найдется $w'' \in T''$, для которого $\lambda_{\mathfrak{M}_0'}(u) = \omega$ для всех $u \in \mathrm{sp}(w'')$. В свою очередь, существует $w' \in T'$, из которого w'' может быть получено удалением координат. В конце концов, получаем некоторое $w \in T$, по которому строится w'. Положим $x_0 = g_{n_0}(w)$.

Пусть $\mathscr{F}$ — множество всех кортежей $\langle x, y, s\rangle \in HF(M_0')^2 \times (M_0')^{<\omega}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathrm{sp}(y) \subseteq \mathrm{Nat} \cup \mathrm{sp}(x) \cup \varphi(\mathrm{sp}(x)) \cup \{s_0, \dots, s_{k-1}\} \cup \varphi(\{s_0, \dots, s_{k-1}\})$;

2) каждый автоморфизм π модели $(\hbar, \{s_0\}, \dots, \{s_{k-1}\}) \restriction \mathrm{TC}(\{x\})$ с условием (2) действует инвариантно на $\mathrm{sp}(y)$, и перестановка $\pi \restriction \mathrm{sp}(y)$ продолжается до некоторого автоморфизма $(\hbar, \{s_0\}, \dots, \{s_{k-1}\}) \restriction \mathrm{TC}(\{y\})$.

Очевидно, $\mathscr{F}$ — Δ-предикат.

(iii) Предположим, что справедлива посылка, но не выполняется заключение для некоторых s и n. Тогда найдутся $\langle a, b_0\rangle$, $\langle a, b_1\rangle$ такие, что

$$\mathrm{Cons}(n, \langle a, b_0\rangle, s), \quad \mathrm{Cons}(n, \langle a, b_1\rangle, s) \quad \text{и} \quad b_0 \neq b_1.$$

Из $\mathscr{F}(a, b_0, s)$ и $\mathscr{F}(a, b_1, s)$ вытекает, что

$$\mathrm{sp}(\{b_0, b_1\}) \subseteq \mathrm{Nat} \cup \mathrm{sp}(\{a, s\}) \cup \varphi(\mathrm{sp}(\{a, s\})).$$

Следовательно, любая перестановка из условия 2 определения $\mathscr{F}$ будет иметь не более одного продолжения. Осталось лишь заметить, что существует изоморфизм π_0 между $(\hbar, \{s_0\}, \ldots, \{s_{k-1}\}) \upharpoonright \mathrm{TC}(\{\langle a, b_0\rangle\})$ и $(\hbar, \{s_0\}, \ldots, \{s_{k-1}\}) \upharpoonright \mathrm{TC}(\{\langle a, b_1\rangle\})$, где $s = \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle$, действующий инвариантно на $\mathrm{sp}(b_0)$, для которого $\pi_0(a) = a$; противоречие.

(iv) Пусть x, y, $s_0, \ldots, s_{k-1}$ и f из условия. Допустим сначала, что не выполняется условие 1 определения $\mathscr{F}$. Тогда нетрудно построить автоморфизм h наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, действующий тождественно на параметрах и элементе x, но $h(y) \neq y$; противоречие с тем, что f — определимая функция. Предположим теперь, что справедливо условие 1, но не выполняется условие 2. Пусть n_0 такое, что $\mathrm{Cons}(n_0, x, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle)$ и $g_{n_0} : T \twoheadrightarrow A_0$ — Σ-функция, где

$$A_0 \rightleftharpoons \{a \mid \mathrm{Cons}(n, a, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle) \wedge \exists b((f(a) = b) \wedge \neg \mathscr{F}(a, b, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle))\},$$

а T определяется так же, как и в рассмотрении случая (ii) данного доказательства. Как и в случае (ii), найдем $a_0 \in A_0$ такой, что любой автоморфизм $(\hbar, \{s_0\}, \ldots, \{s_{k-1}\}) \upharpoonright \mathrm{TC}(\{a_0\})$ продолжается до некоторого автоморфизма $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0)$. Возьмем теперь перестановку π_0, для которой не выполняется условие 2 (при замене x на a_0, y на $f(a_0)$). Тогда $f(a_0) = f(\pi_0(a_0)) \neq \pi_0(f(a_0))$, противоречие с тем, что f — определимая функция. $\square$

Начнем описание свойств с принципа отделимости. Отметим, что данное свойство не выполняется в классической вычислимости. Будем говорить, что идеал $\mathscr{I}$ удовлетворяет принципу *отделимости*, если для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathscr{I}^*$ найдется C такое, что $C \oplus \overline{C} \in \mathscr{I}^*$ и $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. Говорят, что допустимое множество $\mathbb{A}$ удовлетворяют принципу *отделимости*, если для любых непересекающихся Σ-подмножеств B, C найдется Δ-подмножество D, для которого $C \subseteq D \subseteq \overline{B}$.

Предложение 5.3. *Пусть e-идеал $\mathscr{I}$ таков, что в $\mathscr{I}$ выполняется свойство отделимости. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0)$ также справедлив принцип отделимости для любой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0) \in \mathscr{K}'_{\mathscr{I}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{I}$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0)$ удовлетворяют условиям предложения. Возьмем непересекающиеся Σ-подмножества A и B и построим Δ-подмножество C, для которого $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. Предположим, что A и B определимы Σ-формулами с одними и теми же параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$. Тогда положим

$$A_0 \rightleftharpoons \{n \mid \exists x(\mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle) \wedge x \in A)\}$$

$$B_0 \rightleftharpoons \{n \mid \exists x(\mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle) \wedge x \in B)\}.$$

По лемме 5.1 $A_0 \cap B_0 = \varnothing$ и $A_0, B_0 \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0))$. В частности, $A_0, B_0 \in \mathscr{I}^*$. По принципу отделимости для $\mathscr{I}$ найдется $C_0 \oplus \overline{C_0} \in \mathscr{I}^*$ такое, что $A_0 \subseteq C_0 \subseteq \overline{B_0}$.

Пусть теперь

$$C \rightleftharpoons \{x \mid \exists n(\mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle) \wedge n \in C_0)\},$$

$$C' \rightleftharpoons \{x \mid \exists n(\mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle) \wedge n \in \overline{C_0})\}.$$

По лемме 5.1 C, C' — Σ-подмножества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0)$ и $A \subseteq C$, $B \subseteq C'$. Кроме того, $C \cup C' = HF(M'_0)$ и $C \cap C' = \varnothing$. Таким образом, C — Δ-подмножество, и $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. $\square$

Оставшуюся часть параграфа посвятим изучению свойств Σ-функций $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0) \in \mathscr{K}'$. Сначала определим Σ-операторы $\mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}$ и $\mathrm{F}_1^{s_0,\dots,s_{k-1}}$, действующие на $\mathscr{P}(HF(M'_0)^2)$, следующим образом:

$$\langle n, m\rangle \in \mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}(R) \Leftrightarrow \exists x \exists y(\langle x, y\rangle \in R \\ \wedge \mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \wedge \mathrm{Cons}(m, \langle x, y\rangle, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle));$$

$$\langle x, y\rangle \in \mathrm{F}_1^{s_0,\dots,s_{k-1}}(R) \Leftrightarrow \exists n \exists m((\langle n, m\rangle \in R \wedge \mathrm{Cons}(n, x, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \\ \wedge \mathrm{Cons}(m, \langle x, y\rangle, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \wedge \mathscr{F}(x, y, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \\ \vee \exists a \exists z((\neg(a \text{ — упорядоченная пара}) \wedge \mathrm{Cons}(m, a, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle)) \\ \vee (\mathrm{Cons}(m, \langle x, z\rangle, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \wedge \neg\mathscr{F}(x, z, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle)))) \wedge y = \varnothing)).$$

Σ-оператор будем называть *рекурсивным*, если он переводит Σ-функции в Σ-функции.

Лемма 5.2. *Пусть $s_0, \dots, s_{k-1} \in M'_0$ и F — Σ-функция такая, что параметры, которые участвуют в ее определении, входят в $s_0, \dots, s_{k-1}$. Тогда справедливы следующие свойства:*

(i) $\{\langle x, y, s\rangle \mid x \in \mathrm{F}_i^s(y)\}$, $i = 0, 1$, *являются Σ-предикатами;*

(ii) *Σ-оператор F_1^s рекурсивен для любого $s \in (M'_0)^{<\omega}$;*

(iii) $\mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}(F)$ — *Σ-функция;*

(iv) $F \subseteq \mathrm{F}_1^{s_0,\dots,s_{k-1}}\big(\mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}(F)\big)$.

Доказательство. Пп. (i), (iv) следуют из определения операторов F_0^s и F_1^s для любого $s \in (M'_0)^{<\omega}$.

(ii) Рекурсивность F_1^s для любого $s \in (M'_0)^{<\omega}$ вытекает из леммы 5.1(ii), (iii).

(iii) Допустим, что существуют $s_0, \dots, s_{k-1} \in M'_0$ и Σ-функция F с условиями из леммы, для которых $\mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}(F)$ не является Σ-функцией. Тогда найдутся n, m_0 и m_1 такие, что $\langle n, m_0\rangle, \langle n, m_1\rangle \in \mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}(F)$. Из того, что F — функция, следует, что непустые множества

$$A_0 \risingdotseq \{a \mid \mathrm{Cons}(n, a, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \\ \wedge \exists y(\langle a, y\rangle \in F \wedge \mathrm{Cons}(m_0, \langle a, y\rangle, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle))\},$$

$$A_1 \risingdotseq \{a \mid \mathrm{Cons}(n, a, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle) \\ \wedge \exists y(\langle a, y\rangle \in F \wedge \mathrm{Cons}(m_1, \langle a, y\rangle, \langle s_0, \dots, s_{k-1}\rangle))\}$$

не пересекаются, а по лемме 5.1(ii), $A_0 = \varnothing$ или $A_1 = \varnothing$; противоречие. $\square$

Вернемся к изучению свойств на допустимых множествах класса $\mathscr{K}'$. Говорят, что идеал $\mathscr{I}$ удовлетворяет принципу *тотальной продолжимости*, если для любой частичной функции $\varphi \in \mathscr{I}^*$ найдется всюду определенная функция $\psi \in \mathscr{I}^*$, для которой $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_\psi$.

Предложение 5.4. *Пусть e-идеал $\mathscr{I}$ таков, что в $\mathscr{I}$ выполняется свойство тотальной продолжимости. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0)$ также справедлив принцип тотальной продолжимости для любой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}'_0) \in \mathscr{K}'_{\mathscr{I}}$.*

Доказательство. Пусть f — Σ-функция и $s_0, \dots, s_{k-1}$ — набор параметров, участвующих в ее определении. Тогда по лемме 5.2(iii) $\mathrm{F}_0^{s_0,\dots,s_{k-1}}(f)$ —

числовая Σ-функция и, по принципу тотальной продолжимости для $\mathscr{I}$, найдется числовая всюду определенная Σ-функция g, для которой $\mathrm{F}_0^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(f) \subseteq g$. Далее, из лемм 5.2(ii), (iv) и 5.1(i) следует, что

$$f \subseteq \mathrm{F}_1^{s_0,\ldots,s_{k-1}}\big(\mathrm{F}_0^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(f)\big) \subseteq \mathrm{F}_1^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(g)$$

и $\mathrm{F}_1^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(g)$ — всюду определенная Σ-функция. □

Будем говорить, что идеал $\mathscr{I}$ имеет *универсальную функцию*, если найдутся $A \in \mathscr{I}^*$ и вычислимая последовательность $\{\Theta_n\}_{n\in\omega}$ операторов перечисления, для которых класс $\{\Theta_n(R \oplus A) \mid n \in \omega, R \in \mathscr{I}^*\}$ состоит в точности из графиков всех частичных функций из $\mathscr{I}^*$.

Σ-функция $f(x, y)$ в допустимом множестве $\mathbb{A}$ называется *универсальной*, если класс $\{f(a, y) \mid a \in A\}$ состоит из всех частичных Σ-функций допустимого множества $\mathbb{A}$.

Предложение 5.5. *Пусть e-идеал $\mathscr{I}$ таков, что в $\mathscr{I}$ имеется универсальная Σ-функция. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0')$ существует универсальная функция для любой $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0') \in \mathscr{K}_{\mathscr{I}}'$.*

Доказательство. Так как в $\mathscr{I}$ имеется универсальная функция, то существует Σ-предикат Q, универсальный для класса всех графиков числовых Σ-функций. Пусть Q_a — график функции, имеющий код a в Q. Обозначим через S Σ-предикат, универсальный для класса всех Σ-подмножеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, а через S_b — множество с кодом b в S. Тогда Σ-предикат

$$T \rightleftharpoons \big\{\langle\langle a, b, s\rangle, c\rangle \mid s \in (M_0')^{<\omega}, a, b \in HF(M_0'), c \in S_b \cap \mathrm{F}_1^s(Q_a)\big\}$$

будет универсальным для класса всех графиков частичных Σ-функций. Действительно, по лемме 5.2(i), (ii) T является Σ-предикатом и состоит только из графиков функций. Покажем, что график любой Σ-функции имеет некоторый код в T. Пусть F — Σ-функция и $s_0, \ldots, s_{k-1} \in M_0'$ — параметры, участвующие в определении Γ_F. Тогда $\Gamma_F = S_{b_0}$ для некоторого b_0 в силу универсальности Σ-предиката S и по лемме 5.2(iii) $Q_{a_0} = \mathrm{F}_0^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(F)$ для некоторого a_0. Кроме того, ввиду леммы 5.2(iv)

$$F \subseteq \mathrm{F}_1^{s_0,\ldots,s_{k-1}}\big(\mathrm{F}_0^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(F)\big) = \mathrm{F}_1^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(Q_{a_0})$$

и, следовательно, $S_{b_0} \cap \mathrm{F}_1^{s_0,\ldots,s_{k-1}}(Q_{a_0}) = \Gamma_F$. Значит,

$$F(x) = y \Leftrightarrow T(\langle a_0, b_0, \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle\rangle, \langle x, y\rangle). \qquad \square$$

Из предложений 5.3–5.5 получается

Теорема 5.1. *Существует M-класс, для которого переносятся принципы отделимости, существования универсальной функции и тотальной продолжимости с идеалов.*

Добиться нарушений рассматриваемых принципов на M-классах довольно просто. Из результатов § 4 следует, что свойство редукции не сохраняется для любого M-класса. Как показано в данном параграфе, свойство тотальной продолжимости не сохраняется в классе $\mathscr{K}^0$. Пусть $\mathfrak{N}$ — вычислимая модель, построенная в [13], для которой в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ отсутствует универсальная Σ-функция. Тогда класс $\{\mathbb{HF}(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \in \mathscr{K}^0\}$ также будет M-классом и в нем не будет сохраняться свойство существования универсальной Σ-функции. Рассмотрим теперь счетно насыщенную вычислимую модель $\mathfrak{B}$

теории алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики. Аналогично класс $\{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{B}) \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \in \mathscr{K}^0\}$ является M-классом, но в нем не будет сохраняться принцип отделимости, поскольку любое $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{B})$-в. п. подмножество $X \subseteq |\mathfrak{B}|$ либо будет коконечным в $\mathfrak{B}$, либо $X \subseteq \mathrm{cl}(F)$ для некоторого конечного множества $F \subseteq |\mathfrak{B}|$ (следствие представимости Σ-подмножеств с помощью вычислимых дизъюнкций и подмодельной полноты $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$).

Детальное изучение соотношений между принципами на допустимых множествах начато в [2]. Там же можно найти историческую справку о принципах в допустимых множествах, а также соотношения между свойствами на главных идеалах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
2. *Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О принципах вычислимости на допустимых множествах // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–71.
3. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
4. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987.
5. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга; М.: Экономика, 2000.
6. *Кейслер Г., Чен Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
7. *Ершов Ю. Л.* Σ-определимость в допустимых множествах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 792–795.
8. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
9. *Морозов А. С.* Об отношении Σ-сводимости между допустимыми множествами // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 634–652.
10. *Пузаренко В. Г.* Обобщенные нумерации и определимость поля $\mathbb{R}$ в допустимых множествах // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, № 2. С. 107–117.
11. *Пузаренко В. Г.* О вычислимости над моделями разрешимых теорий // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.
12. *Пузаренко В. Г.* О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$-нумерациях // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 568–584.
13. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–435.

Статья поступила 29 октября 2004 г.

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vagrig@math.nsc.ru