Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 512.552.7

ПОЛНЫЕ РАДИКАЛЫ НЕКОТОРЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

А. И. Корнев

Аннотация: Продолжается изучение полных и редуцированных в смысле Л. М. Мартынова ассоциативных колец. Доказана редуцированность группы обратимых элементов редуцированного ассоциативного кольца. Вычислены полный радикал группового кольца над кольцом целых чисел и полный радикал групповой алгебры над произвольной алгеброй над простым конечным полем.

Ключевые слова: групповое кольцо, полное кольцо, полный радикал, радикал Куроша — Амицура.

В теории абелевых групп важную роль играют понятия полноты (делимости) и редуцированности. Оказывается, к этим понятиям возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. Это обстоятельство позволило Л. М. Мартынову определить их аналоги в общей универсально-алгебраической ситуации [1]. Проблемы, которые при этом возникают, интересны как для универсальных алгебр, так и для «классических» алгебр (групп, полугрупп, модулей, колец и др.). Понятия полноты и редуцированности изучались для модулей в [2–4], для линейных алгебр — в [5], для полугрупп — в [6, 7], для ассоциативных колец — в [8–10].

Следуя [11], определение полного ассоциативного кольца можно сформулировать следующим образом. Пусть M — некоторое множество многообразий. Ассоциативное кольцо называется *M-полным*, если оно не имеет ненулевых гомоморфизмов в кольца из множества M. В частности, если M состоит из атомов решетки многообразий колец, то M-полное кольцо называется *полным*. Напомним, что последние исчерпываются следующими сериями многообразий: многообразиями $\mathbf{Z}_p$, задаваемыми тождествами $xy = 0$, $px = 0$, и многообразиями $\mathbf{F}_p$ с тождествами $px = 0$, $x^p - x = 0$ по всем простым p. Ассоциативное кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых полных подколец. Условимся в дальнейшем под кольцом понимать ассоциативное кольцо.

Как заметил Л. М. Мартынов в [11], в любом кольце R существуют наибольшее по включению полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом, и отображение $R \to C(R)$ в абстрактном классе колец — строгий радикал в смысле Куроша [12]. Этот радикал называется *полным*. Для групповых алгебр над конечными простыми полями он охарактеризован в [9].

Хорошо известно, что атомы решетки многообразий групп исчерпываются серией многообразий $\mathbf{A}_p$ абелевых групп экспоненты p по всем простым p. Следуя [13], группу G назовем *$\mathbf{A}_p$-полной*, если из нее нет гомоморфизмов на неединичные группы из $\mathbf{A}_p$. Легко понять, что группа G является $\mathbf{A}_p$-полной тогда и только тогда, когда $G'G^p = G$. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Группа называется π-*полной*, если она является $\mathbf{A}_p$-полной для каждого простого p из π. Используя замечание 3 из [13], легко показать, что для любого множества π простых чисел во всякой группе существует наибольшая π-полная подгруппа, являющаяся нормальным делителем. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то группа называется *полной*. Группа называется *редуцированной*, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Наибольшую полную подгруппу группы G будем обозначать через $C(G)$.

Основные результаты статьи следующие.

Теорема 1. *Если кольцо R с единицей редуцировано, то группа R^* редуцирована.*

Теорема 2. *Для произвольной группы G выполняется* $\mathrm{C}(\mathbf{Z}G) = w(C(G))$.

Теорема 3. *Для произвольных алгебры R над полем $GF(p)$ и группы G выполняется $C(RG) = wH + C(R)G$, где H является наибольшей A_p-полной подгруппой группы $G'G^{p-1}$.*

Прежде чем приступить к доказательству основных результатов, приведем еще некоторые определения, условимся о системе обозначений и докажем вспомогательные утверждения.

Прежде всего отметим, что определение полного кольца можно дать на более привычном языке. Пусть $\mathbf{Z}_p(R) = pR + R^2$ и $\mathbf{F}_p(R) = pR + (r^p - r \mid r \in R)$ суть вербалы кольца R относительно многообразий $\mathbf{Z}_p$ и $\mathbf{F}_p$ соответственно. Кольцо R является $\mathbf{Z}_p$-полным, если $\mathbf{Z}_p(R) = R$, и $\mathbf{F}_p$-полным, если $\mathbf{F}_p(R) = R$. Кольцо R полное, если и только если оно $\mathbf{Z}_p$-полное и $\mathbf{F}_p$-полное по всем простым p. Определим α-й вербал $\mathbf{Z}_p^\alpha(R)$ кольца R для произвольного ординала α: $\mathbf{Z}_p^0(R) = R$, $\mathbf{Z}_p^\alpha(R) = \mathbf{Z}_p\big(\mathbf{Z}_p^{\alpha-1}(R)\big)$ для непредельного α и $\mathbf{Z}_p^\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \mathbf{Z}_p^\beta$ для предельного α.

Будем использовать следующие обозначения: R^* — группа обратимых элементов кольца R с единицей; R^+ — аддитивная группа кольца R; $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R; $H \lhd G$ — подгруппа H группы G, нормальная в G. Если H — подгруппа группы G, то wH — правый идеал группового кольца RG, порожденный элементами вида $(e-h)$, где $h \in H$. Если $H \lhd G$, то wH является идеалом кольца RG [14]. Кроме того, $w_gH = \{r \in RG \mid \mathrm{supp}(r) \subseteq Hg\}$. Если γ — произвольный ординал и R — кольцо, то через R^γ будем обозначать соответствующую степень γ кольца R ($R^1 = R$, $R^{i+1} = R \cdot R^i$, и если β есть предельный ординал, то $R^\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} R^\alpha$).

Лемма 1. *Пусть G — группа, $H \lhd G$, R — кольцо с единицей, $J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_\alpha \supset \dots$, $\alpha < \beta$ — убывающая цепь правых идеалов подкольца w_eH кольца RG. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} (J_\alpha G) = \big(\bigcap\limits_{\alpha<\beta} J_\alpha\big)G$.*

Доказательство. Включение $\big(\bigcap\limits_{\alpha<\beta} J_\alpha\big)G \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\beta} (J_\alpha G)$ очевидно. Пусть $x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} (J_\alpha G)$, т. е. $x = \sum\limits_{i=1}^{n_\alpha} r_{\alpha,i} g_{\alpha,i}$ для каждого $\alpha < \beta$, где $r_{\alpha,i} \in J_\alpha$, $g_{\alpha,i} \in G$. Если $A = \{a_i \in G \mid i \in I\}$ — полное множество представителей, попарно несравнимых по H, и $g_{\alpha,i} = h_{\alpha,i} a_{\alpha,i}$, то $x = \sum\limits_{i=1}^{n_\alpha} (r_{\alpha,i} h_{\alpha,i}) a_{\alpha,i}$, где $r_{\alpha,i} h_{\alpha,i} \in J_\alpha$. В силу леммы 7 из [9] для любых $\alpha < \beta$, $\gamma < \beta$ выполняются $n_\alpha = n_\gamma$ и $r_{\alpha,i} h_{\alpha,i} = r_{\gamma,i} h_{\gamma,i}$. Поэтому $x \in \big(\bigcap\limits_{\alpha<\beta} J_\alpha\big)G$. $\square$

Лемма 2. *Для произвольных кольца R, группы G, ее нормальной подгруппы H и простого числа p подкольцо wH кольца R является $\mathbf{Z}_p$-редуцированным тогда и только тогда, когда w_eH является $\mathbf{Z}_p$-редуцированным.*

Доказательство. Очевидно, так как $w_eH \subseteq wH$, то из $\mathbf{Z}_p$-редуцированности wH следует $\mathbf{Z}_p$-редуцированность w_eH.

Обратно, предположим, что w_eH является $\mathbf{Z}_p$-редуцированным. Из этого вытекает, что найдется трансфинитное число γ такое, что $\mathbf{Z}_p^\gamma(w_eH) = \{0\}$. Покажем, что $\mathbf{Z}_p^\gamma(wH) = \big(\mathbf{Z}_p^\gamma(w_eH)\big)G$. При $\gamma = 1$ получаем очевидное равенство

$$\mathbf{Z}_p(wH) = (wH)^2 + p(wH) = (w_eH)^2G + p(w_eH)G = \mathbf{Z}_p(w_eH)G.$$

Пусть равенство имеет место при всех $\alpha < \beta$ и β — предельный ординал. Тогда

$$\mathbf{Z}_p^\beta(wH) = \bigcap_{\alpha<\beta} \mathbf{Z}_p^\alpha(wH) = \bigcap_{\alpha<\beta} (\mathbf{Z}_p^\alpha(w_eH)G) = \Big(\bigcap_{\alpha<\beta} \mathbf{Z}_p^\alpha(w_eH)\Big)G = \mathbf{Z}_p^\beta(w_eH)G,$$

где предпоследнее равенство следует из леммы 1. Таким образом, равенство доказано. Далее, $\mathbf{Z}_p^\gamma(wH) = \big(\mathbf{Z}_p^\gamma(w_eH)\big)G = 0$, и, значит, wH является $\mathbf{Z}_p$-редуцированным. □

Лемма 3. *Пусть A — идеал кольца R и K — произвольное поле. Любой гомоморфизм колец $f : A \to K$ продолжается до гомоморфизма $\hat{f} : R \to K$.*

Доказательство. Если $f = 0$, то утверждение очевидно. Если $f \neq 0$, то найдется a из A такой, что $f(a) \neq 0$. Покажем, что $f(ar) = f(ra)$ для каждого r из R. Имеем

$$\begin{aligned} f(a)(f(ar) - f(ra)) &= f(a^2r) - f(ara) = f(a^2r) - f(ar)f(a) \\ &= f(a^2r) - f(a)f(ar) = f(a^2r) - f(a^2r) = 0. \end{aligned}$$

Так как $f(a) \neq 0$ и K — поле, то $f(ar) - f(ra) = 0$. Определим отображение $\hat{f} : R \to K$ следующим образом:

$$\hat{f}(r) = \frac{f(ar)}{f(a)}.$$

Очевидно, $\hat{f}$ является гомоморфизмом абелевых групп, и $\hat{f}(x) = f(x)$ для каждого x из A. Покажем, что $\hat{f}(xy) = \hat{f}(x)\hat{f}(y)$. Из вышедоказанного равенства следует, что

$$\hat{f}(x)\hat{f}(y) = \frac{f(ax)}{f(a)}\frac{f(ay)}{f(a)} = \frac{f(ax)f(ya)}{(f(a))^2} = \frac{f(axya)}{(f(a))^2} = \frac{f(a^2xy)}{(f(a))^2} = \frac{f(axy)}{f(a)} = \hat{f}(xy)$$

для всех x и y из R. □

Очевидным следствием леммы 3 является

Предложение 1. *Для произвольного кольца R выполняется:*
1) если J — идеал кольца R и $J \subseteq \mathbf{F}_p(R)$, то J является $\mathbf{F}_p$-полным кольцом;
2) $\mathbf{F}_p(R)$ является $\mathbf{F}_p$-полным кольцом.

Предложение 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $M(\pi) = \{\mathbf{Z}_p \mid p \in \pi\} \cup \{\mathbf{F}_p \mid p \in \pi\}$. Для произвольного кольца R с единицей и* *наибольшей π-полной подгруппы H группы $\bigcap\limits_{p\in\pi}(R^*)'(R^*)^{p-1}$ правый идеал $C = (1-h \mid h \in H)$ является $M(\pi)$-полным кольцом.*

Доказательство. Так как H является $M(\pi)$-полной группой, то для каждого h из H и p из π найдутся h_i из H такие, что $h = [h_1, h_2]\dots[h_{s-2}, h_{s-1}]h_s^p$. Из равенств

$$1-[h_i,h_{i+1}] = (h_{i+1}h_i - h_ih_{i+1})h_i^{-1}h_{i+1}^{-1} = ((1-h_{i+1})(1-h_i)-(1-h_i)(1-h_{i+1}))h_i^{-1}h_{i+1}^{-1},$$

$$(1-h^p) = (1-h)^p - \sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l C_p^l(1-h^l)$$

при $p \neq 2$,

$$(1-h^2) = (1-h)(1+h) = (1-h)^2 + 2h(1-h), \quad (1-h_1h_2) = (1-h_1)h_2 + (1-h_2)$$

следует $\mathbf{Z}_p$-полнота кольца C для всех p из π.

Пусть $f : C \to GF(p)$ — гомоморфизм колец. Так как H является нормальной подгруппой в R^*, по лемме 3 f можно продолжить до гомоморфизма $\hat f : R \to GF(p)$. При этом $\hat f(1-h) = \hat f(1) - \hat f(h) = 1-1$ для каждого h из $H \subseteq \bigcap\limits_{p\in\pi}(R^*)'(R^*)^{p-1}$, т. е. если $h \in H$, то $f(1-h) = \hat f(1-h) = 0$ и поэтому $f = 0$, что показывает $\mathbf{F}_p$-полноту кольца C для каждого p из π. Следовательно, C — $M(\pi)$-полное кольцо. $\square$

Доказательство теоремы 1. Легко показать, что

$$C(R^*) \subseteq \bigcap_{p\ \text{простое}} (R^*)'(R^*)^{p-1},$$

где $C(R^*)$ — наибольшая полная подгруппа в R^*. Выбирая в предложении 2 в качестве π множество всех простых чисел, получим, что идеал $J = (1-h \mid h \in C(R^*))$ — полное кольцо. Из редуцированности кольца R следует, что $1-h=0$ для любого h из $C(R^*)$, т. е. $C(R^*) = \{1\}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как $C(G)$ является полной группой, для каждого простого p выполняется $(C(G))'(C(G))^p = C(G)$. Поэтому $C(G)$ содержится в каждой подгруппе вида $G'G^{p-1}$ для всех простых p. Применяя предложение 2 для случая, когда π — множество всех простых чисел, получим, что $w(C(G))$ является полным кольцом.

Докажем теперь, что $w(C(G))$ есть наибольшее полное подкольцо. Для этого достаточно показать, что $\mathbf{Z}G/w(C(G)) \cong \mathbf{Z}(G/C(G))$ является редуцированным. Пусть $G_0 = G/C(G)$. Понятно, что G_0 является редуцированной группой. Следовательно, существует нормальный ряд $G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n \triangleleft \dots \triangleleft G_\gamma = \{e\}$ с коммутативными факторами G_{i+1}/G_i, удовлетворяющими условию $(G_{i+1}/G_i)^{p_i} = \{e\}$ для некоторого ординала γ, где p_i — простое число, зависящее от i. Этому ряду соответствует убывающая цепь идеалов кольца $\mathbf{Z}G_0$: $wG_0 \triangleleft wG_1 \triangleleft \dots \triangleleft wG_n \triangleleft \dots \triangleleft wG_\gamma = \{0\}$. Покажем трансфинитной индукцией по α, что $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq wG_\alpha$ для всех α, не превосходящих γ. Рассмотрим гомоморфизм тривиализации $f : \mathbf{Z}G_0 \to \mathbf{Z}$. Понятно, что $\ker f = wG_0$. Из редуцированности кольца $\mathbf{Z}$ следует, что $f(\mathbf{Z}G_0) = 0$, поэтому $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq wG_0$. Предположим, что утверждение доказано для всех $\alpha < \beta$. Нужно показать, что $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq wG_\beta$. Если β — предельный ординал, то $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq wG_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$, поэтому $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\beta} wG_\alpha = w(\bigcap\limits_{\alpha<\beta} G_\alpha)$ (последнее равенство следует из леммы 7 из [9]). Таким образом, $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq wG_\beta$. Предположим, что β не является предельным. Покажем, что $\mathbf{Z}G_0/wG_\beta \cong \mathbf{Z}(G_0/G_\beta) = \mathbf{Z}\overline{G}_0$ является редуцированным. По предположению индукции $C(\mathbf{Z}G_0) \subseteq wG_{\beta-1}$, следовательно, $C(\mathbf{Z}\overline{G}_0) \subseteq wG_{\beta-1}/G_\beta$ (это вытекает из редуцированности кольца $\mathbf{Z}\big(\overline{G}_0/w\overline{G}_{\beta-1}\big) \cong \mathbf{Z}\big(G_0/wG_{\beta-1}\big)$). Таким образом, доказательство сводится к доказательству редуцированности кольца $w\big(G_{\beta-1}/G_\beta\big)$, которое по лемме 2 получится из доказательства $\mathbf{Z}_p$-редуцированности кольца $w_e\big(G_{\beta-1}/G_\beta\big)$. Обозначим $G_{\beta-1}/G_\beta$ через H. По построению H — коммутативная группа и $H^p = \{e\}$ для некоторого простого p. Для простоты стоит заметить, что подкольцо w_eH кольца $\mathbf{Z}\overline{G}_0$, $H \lhd \overline{G}_0$, изоморфно подкольцу wH кольца $\mathbf{Z}H$. Пусть A есть наибольшее $\mathbf{Z}_p$-полное подкольцо кольца wH, $wH \subseteq \mathbf{Z}H$. Равенство $p(wH) = (p\mathbf{Z})H \cap wH$ легко следует из леммы 7 в [9]. Поэтому $wH/p(wH)$ является подкольцом кольца $\mathbf{Z}H/(p\mathbf{Z})H \cong (GF(p))H$, а именно, $wH/p(wH) = wH \subseteq (GF(p))H$, т. е. $\overline{A} = A/p(wH) \subseteq wH \subseteq (GF(p))H$. Так как $H^p = \{e\}$, то $H'H^{p-1} = H$ и по лемме 6 из [9] получаем $\mathbf{Z}_p((GF(p))H) = wH$. Поскольку A — наибольшее $\mathbf{Z}_p$-полное подкольцо, то A — идеал кольца $wH \subseteq \mathbf{Z}H$, поэтому $\overline{A}$ — идеал в $wH \subseteq (GF(p))H$. Из предложения 1 следует $\mathbf{F}_p$-полнота кольца $\overline{A}$. Если q — простое число и $q \neq p$, то $\mathbf{Z}_p$-полнота и $\mathbf{F}_p$-полнота кольца $\overline{A}$ очевидны. Таким образом, $\overline{A}$ — полное подкольцо кольца $(GF(p))H$. Но по теореме 2 из [9] кольцо $(GF(p))H$ редуцировано и $\overline{A} = 0$, т. е. $A \subseteq p(wH)$. Далее,

$$A = \mathbf{Z}_p(A) \subseteq \mathbf{Z}_p(wH) = (wH)^2 + pwH \subseteq p^2(wH)^2 + p^2wH \subseteq p^2wH.$$

Индукцией по n легко показать, что $A \subseteq p^n(wH)$ для каждого натурального n. Значит, $A \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n(wH)$, и подкольцо $wH \subseteq \mathbf{Z}H$ является $\mathbf{Z}_p$-редуцированным. Отсюда по лемме 2 вытекает $\mathbf{Z}_p$-редуцированность, а следовательно, и редуцированность кольца $w\overline{G}_0$. $\square$

Лемма 4. *Если A и B — алгебры над полем $K = GF(p)$, то для каждого ординала γ выполняется $\mathbf{Z}_p^\gamma(A \otimes_K B) = \mathrm{Im}(f_\gamma \otimes_K g_\gamma)$, где $f_\alpha : \mathbf{Z}_p^\alpha(A) \to A$, $g_\alpha : \mathbf{Z}_p^\alpha(B) \to B$ — естественные вложения.*

Доказательство. При $\gamma = 0$ утверждение очевидно. Пусть теперь утверждение справедливо при всех γ, меньших некоторого δ, т. е. $\mathbf{Z}_p^\gamma(A \otimes_K B) = \mathrm{Im}(f_\gamma \otimes_K g_\gamma)$. Если δ не является предельным, то найдется такой δ_0, что $\delta = \delta_0 + 1$ и, очевидно,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_p^{\delta_0+1}(A \otimes_K B) = \mathbf{Z}_p(\mathbf{Z}_p^{\delta_0}(A \otimes_K B)) = (\mathbf{Z}_p^{\delta_0}(A \otimes_K B))^2 \\ = (\mathrm{Im}(f_\delta \otimes g_\delta))^2 = \mathrm{Im}(f_{\delta+1} \otimes g_{\delta+1}).\end{aligned}$$

Если δ — предельный ординал и для всех $\gamma < \delta$ выполняется

$$\mathbf{Z}_p^\gamma(A \otimes_K B) = \mathrm{Im}(f_\gamma \otimes_K g_\gamma),$$

то

$$\mathbf{Z}_p^\delta(A \otimes_K B) = \bigcap_{\gamma<\delta} \mathbf{Z}_p^\gamma(A \otimes_K B) = \bigcap \mathrm{Im}(f_\gamma \otimes_K g_\gamma).$$

Покажем, что

$$\bigcap_{\gamma<\delta} \mathrm{Im}(f_\gamma \otimes_K g_\gamma) = \mathrm{Im}(f_\delta \otimes_K g_\delta).$$

Из этого будет следовать равенство $\mathbf{Z}_p^\delta(A\otimes_K B) = \mathrm{Im}(f_\delta\otimes_K g_\delta)$. Так как $\mathrm{Im}(f_\delta\otimes_K g_\delta) \subseteq \mathrm{Im}(f_\gamma\otimes_K g_\gamma)$ при всех γ, $\gamma < \delta$, то включение

$$\bigcap_{\gamma<\delta} \mathrm{Im}(f_\gamma\otimes_K g_\gamma) \supset \mathrm{Im}(f_\delta\otimes_K g_\delta)$$

очевидно.

Докажем обратное включение. Предположим, что

$$x = a_1 \otimes b_1 + \dots + a_s \otimes b_s \tag{1}$$

принадлежит подпространству $\bigcap\limits_{\gamma<\delta} \mathrm{Im}(f_\gamma\otimes_K g_\gamma)$. При этом, очевидно, можно предполагать, что $b_1, b_2, \dots, b_s$ — линейно независимая система векторов. Пусть $\varphi < \gamma$. По предположению индукции найдутся такие $a'_1, \dots, a'_l$ из $\mathrm{Im}(f_\varphi)$ и $b'_1, \dots, b'_l$ из $\mathrm{Im}(g_\varphi)$, что

$$x = a'_1 \otimes b'_1 + \dots + a'_l \otimes b'_l. \tag{2}$$

При этом можно считать, что $b'_1, \dots, b'_l$ — линейно независимая система векторов. Если хотя бы один из векторов $b_1, b_2, \dots, b_s$ не принадлежит подпространству $\langle b'_1, \dots, b'_l\rangle$, то в максимально линейно независимой подсистеме C системы векторов $b_1, b_2, \dots, b_s, b'_1, \dots, b'_l$ найдется хотя бы один вектор b_i, где i принадлежит множеству $\{1, \dots, s\}$. Отсюда следует, что, используя равенства (1) и (2), можно разложить вектор x двумя различными способами по базису $\{a_i \otimes c \mid a_i — \text{базис } \mathrm{Im}(f_\varphi),\ c \in C\}$ пространства $\mathrm{Im}(f_\varphi) \otimes_K \langle C\rangle$, что невозможно в силу того, что векторные пространства являются плоскими модулями. Полученное противоречие показывает, что все b_i лежат в $\mathrm{Im}(g_\varphi)$. Аналогично показывается, что все a_i принадлежат $\mathrm{Im}(f_\varphi)$, т. е. x принадлежит $\mathrm{Im}(f_\varphi\otimes_K g_\varphi)$. Поэтому $\bigcap\limits_{\gamma<\delta} \mathrm{Im}(f_\gamma\otimes_K g_\gamma) = \mathrm{Im}(f_\delta\otimes_K g_\delta)$. □

Предложение 3. *Если A и B являются редуцированными алгебрами над полем $K = GF(p)$, то $A \otimes_K B$ — редуцированная K-алгебра.*

Доказательство. Покажем сначала, что если R является p-кольцом и B — редуцированная K-алгебра, то $R\otimes_K B$ — редуцированная K-алгебра. Пусть $\alpha : \mathbf{F}_p(B) \to B$ — вложение. Покажем, что $\mathbf{F}_p(R \otimes B) = \mathrm{Im}(1_R \otimes \alpha)$. Пусть $x \in \mathrm{Im}(1_R\otimes\alpha)$. Найдутся $b_1, b_2, \dots, b_s$, $l_1, l_2, \dots, l_s$, $t_1, t_2, \dots, t_s \in B^1$ и $r_1, r_2, \dots, r_s \in R$ такие, что

$$\begin{aligned}x = \sum_{i=1}^s r_i \otimes l_i\big(b_i^p - b_i\big)t_i = \sum_{i=1}^s r_i^{p-1} \otimes l_i\big(r_i \otimes b_i^p - r_i \otimes b_i\big) r_i^{p-1} \otimes t_i \\ = \sum_{i=1}^s \big(r_i^{p-1} \otimes l_i\big)\big((r_i \otimes b_i)^p - r_i \otimes b_i\big)\big(r_i^{p-1} \otimes t_i\big) \in \mathbf{F}_p(R \otimes_K B).\end{aligned}$$

Обратно, пусть $x \in \mathbf{F}_p(R \otimes_K B)$. Понятно, что x можно представить в виде $x = l_1x_1t_1 + \dots + l_kx_kt_k$, где

$$\begin{aligned}x_i &= (r_1 \otimes b_1 + \dots + r_m \otimes b_m)^p - (r_1 \otimes b_1 + \dots + r_m \otimes b_m) \\ &= r_1^p \otimes b_1^p + \dots + r_m^p \otimes b_m^p - r_1 \otimes b_1 - \dots - r_m \otimes b_m \\ &+ \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=p,\\ k_i<p}} r_1^{k_1} r_2^{k_2} r_m^{k_m} \otimes (S(k_1, k_2, \dots, k_m)(b_1, b_2, \dots, b_m))\end{aligned}$$

$$= r_1 \otimes \big(b_1^p - b_1\big) + r_2 \otimes \big(b_2^p - b_2\big) + \dots + r_m \otimes \big(b_m^p - b_m\big) \\ + \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=p,\\ 0\le k_i<p}} r_1^{k_1} r_2^{k_2} r_m^{k_m} \otimes (S(k_1,k_2,\dots,k_m)(b_1,b_2,\dots,b_m)),$$

так как $r_i r_j = r_j r_i$ для всех i и j, не превосходящих m. Покажем, что если $k_1 + k_2 + \dots + k_m = p$ и $0 \le k_i < p$, то $S(k_1,k_2,\dots,k_m)(b_1,b_2,\dots,b_m) \in \mathbf{F}_p(B)$, где $b_i \in B$ для всех $i \le m$. Пусть $g : B \to B/\mathbf{F}_p(B)$ — канонический гомоморфизм колец. Хорошо известно, что количество мономов мультистепени $(k_1,k_2,\dots,k_m)$ равно $\frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$. Таким образом, из коммутативности кольца $B/\mathbf{F}_p(B)$ следует, что

$$g(S(k_1,k_2,\dots,k_m)(b_1,b_2,\dots,b_m)) \\ = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1!k_2!\dots k_m!} g(b_1)^{k_1} g(b_2)^{k_2} \dots g(b_m)^{k_m}.$$

Поскольку $k_1 + k_2 + \dots + k_m = p$ и $k_i < p$, получим, что $p \mid \frac{p!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$. Поэтому $g(S(k_1,k_2,\dots,k_m)(b_1,b_2,\dots,b_m)) = 0$, откуда $S(k_1,k_2,\dots,k_m)(b_1,b_2,\dots,b_m) \in \mathbf{F}_p(B)$, т. е. x_i, а значит, и x принадлежат $\mathrm{Im}(1_R \otimes_K \alpha)$. Поэтому, учитывая ранее доказанное включение, получаем, что $\mathbf{F}_p(R \otimes_K B) = \mathrm{Im}(1_R \otimes_K \alpha)$. Для данного ординала γ через α_γ обозначим вложение $\alpha_\gamma : \mathbf{Z}_p^\gamma(\mathbf{F}_p(B)) \to B$. Предположим, что $\mathbf{Z}_p^{\beta+1}(\mathbf{F}_p(B)) = \mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(B))$ для некоторого ординала β. Из леммы 3 следует, что в таком случае кольцо $\mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(B))$ является $\mathbf{F}_p$-полным. Учитывая, что $p \cdot B = 0$, получим, что $\mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(B))$ является полным. Так как B — редуцированное кольцо, то $\mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(B)) = 0$ для некоторого ординала β. Применяя очевидное равенство $\mathbf{Z}_p(R) = R$ и лемму 4, получаем

$$\mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(R \otimes_K B)) = \mathbf{Z}_p^\beta(\mathrm{Im}(1_R \otimes_K \alpha)) = \mathrm{Im}(1_R \otimes_K \alpha_\beta),$$

где $\alpha_\beta : \mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(B)) \to \mathbf{F}_p(B)$ — естественное вложение. Но $\mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(B)) = 0$, поэтому $\alpha_\beta = 0$. Таким образом, $\mathbf{Z}_p^\beta(\mathbf{F}_p(R \otimes_K B)) = 0$, и $R \otimes_K B$ редуцирована. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathbf{F}_p(A) \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{f} A/\mathbf{F}_p(A) \to 0.$$

Из [15, лемма 1] следует, что $\ker(f \otimes 1_B) = \mathrm{Im}(\mu \otimes_K 1_B)$, и из плоскостности всех модулей как векторных пространств — что $\mathrm{Im}(\mu \otimes_K 1_B) \cong \mathbf{F}_p(A) \otimes_K B$. Доказанное выше влечет, что $(A/\mathbf{F}_p(A)) \otimes_K B$ — редуцированная алгебра. Доказательство редуцированности алгебры $\mathbf{F}_p(A) \otimes_K B \cong \mathrm{Im}(\mu \otimes_K 1_B)$ завершит доказательство предложения. Из леммы 3 вытекает, что найдется ординал α такой, что $\mathbf{Z}_p^\alpha(\mathbf{F}_p(A)) = 0$. Воспользовавшись леммой 4, как это сделано ранее, получим $\mathbf{Z}_p^\alpha(\mathbf{F}_p(A) \otimes_K B) = 0$, что и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 3. Доказательство полноты кольца wH аналогично доказательству теоремы 2 работы [9]. Получаем $wH \subseteq C(RG)$. Покажем, что $C(R)G$ является полной алгеброй. Пусть $r \in C(R)$ и $g \in G$. Из полноты алгебры $C(R)$ следует, что найдутся a_i, b_i, c_i из $(C(R))^1$ такие, что

$$r = \sum_{i=1}^n a_i\big(b_i^p - b_i\big)c_i.$$

Поэтому

$$rg = \sum_{i=1}^n a_i e((b_i e)^p - (b_i e))(eg) \in \mathbf{F}_p(C(R)G).$$

Аналогично ввиду полноты кольца $C(R)$ найдутся такие a_i и b_i из $C(R)$, для которых

$$r = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \quad \text{и} \quad rg = \sum_{i=1}^{k} (a_i e)(b_i g),$$

т. е. $C(R)G \subseteq C(RG)$.

Для доказательства обратного включения достаточно показать, что

$$RG/(C(R)G + wH) \cong (R/C(R))(G/H).$$

Очевидно, $(R/C(R))(G/H) \cong (R/C(R)) \otimes_K K(G/H)$. Алгебра $K(G/H)$ редуцирована по теореме 2 в [9]. Из предложения 3 заключаем, что $(R/C(R)) \otimes_K K(G/H)$ редуцирована.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martynov L. M.* On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras // Internat. conf. on modern algebra and its applications. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, May 14–18, 1996. Schudule and Abstracts. P. 79–80.
2. *Корнев А. И.* О полных модулях // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15, С. 30–37.
3. *Мартынов Л. М.* О примарных и редуцированных многообразиях модулей // Вестн. ОмГУ. 1999. Вып. 4. С. 29–31.
4. *Овчинников В. В.* О кольцах, над которыми каждый модуль является редуцированным // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 46–54.
5. *Мартынов Л. М.* О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 103–112.
6. *Финк Т. Ю.* Конечные полные полугруппы // Естественные науки и экология: Межвузовский сб. науч. тр. Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. Вып. 4. С. 8–14.
7. *Финк Т. Ю.* Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сб. науч. тр. Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. Вып. 1. С. 20–25.
8. *Корнев А. И., Павлова Т. В.* Конечные полные ассоциативные кольца // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сб. науч. тр. Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. Вып. 2. С. 43–45.
9. *Корнев А. И., Павлова Т. В.* Характеризация одного радикала групповых колец над конечными простыми полями // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 613–623.
10. *Павлова Т. В.* Полные ассоциативные артиновы кольца // Вестн. ОмГУ. 2005. Вып. 1. С. 17–19.
11. *Мартынов Л. М.* Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям // Вестн. ОмГУ. 2004. Вып. 2. С. 19–21.
12. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979.
13. *Мартынов Л. М.* О понятиях примарности, полноты, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. междунар. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.
14. *Общая алгебра* / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука. 1990. Т. 1.
15. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 24 апреля 2006 г., окончательный вариант — 10 января 2007 г.

Корнев Александр Иванович
Омский институт (филиал) Российского торгово-экономического университета,
кафедра математики и информатики,
ул. 10 лет Октября, 195, корп. 18, каб. 207, Омск 644009
kornev_omsk@mail.ru