Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.1+519.5

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМЫХ МОДЕЛЕЙ

Е. Б. Фокина

Аннотация: Изучаются индексные множества класса d-разрешимых моделей и класса d-разрешимых счетно-категоричных моделей для произвольной арифметической тьюринговой степени d. Доказано, что первое из них является m-полным $\Sigma_3^{0,d}$, а второе — m-полным $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$ в универсальной вычислимой нумерации вычислимых моделей сигнатуры с одним бинарным предикатом.

Ключевые слова: индексное множество, вычислимая модель, разрешимая модель, счетно-категоричная теория.

1. Введение

Одним из направлений теории вычислимых моделей является изучение связей между определимостью и вычислимостью. Исследования по изучению алгоритмической сложности различных классов вычислимых моделей проводились в работах С. С. Гончарова, Дж. Найт, Н. Когабаева, В. Харизановой, Р. Миллера и многих других авторов. На основе разработанных ранее методов и теории вычислимых нумераций мы исследуем алгоритмическую сложность для следующих естественных классов вычислимых моделей: разрешимых моделей и разрешимых моделей со счетно категоричной теорией.

Введем основные определения. Зафиксируем вычислимую гёделевскую нумерацию языка L. Считаем, что носители моделей содержатся в ω, которое мы рассматриваем как вычислимое множество констант. Модель $\mathfrak{A}$ языка L *вычислима*, если ее основное множество вычислимо, базисные операции и предикаты равномерно вычислимы. Мы отождествляем формулы с их гёделевскими номерами. Тогда вычислимость модели эквивалентна условию, что атомная диаграмма $\mathscr{D}(\mathfrak{A})$ этой модели вычислима. Модель $\mathfrak{A}$ языка L *разрешима*, если полная диаграмма $\mathscr{FD}(\mathfrak{A})$ вычислима. Полная теория T называется α-*категоричной*, или *категоричной в мощности* α, если все модели теории T мощности α изоморфны. Модель $\mathfrak{M}$ называется α-*категоричной*, если теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ этой модели α-категорична.

Для вычислимых моделей предикатной сигнатуры существует универсальная вычислимая нумерация. *Индексным множеством* для модели $\mathfrak{A}$ этой сигнатуры называется множество $I(\mathfrak{A})$ всех номеров для вычислимых (изоморфных) копий $\mathfrak{A}$ в этой нумерации. Для класса моделей K, замкнутого относительно изоморфизма, *индексным множеством* называется множество $I(K)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00819) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4413.2006.1),

всех индексов вычислимых моделей из K. Существует достаточно много работ, посвященных индексным множествам (см., например, [1–10]).

Пусть Γ — класс сложности (например, Σ_3^0). $I(K)$ является *m-полным* Γ, если $I(K)$ есть Γ и для любого $S \in \Gamma$ существует вычислимая функция f такая, что

$$n \in S \text{ тогда и только тогда, когда } \ f(n) \in I(K).$$

Это условие эквивалентно тому, что существует равномерно вычислимая последовательность моделей $(\mathfrak{C}_n)_{n\in\omega}$, для которой

$$n \in S \text{ тогда и только тогда, когда } \ \mathfrak{C}_n \in K.$$

В данной работе мы рассматриваем индексные множества классов d-разрешимых моделей и d-разрешимых счетно категоричных моделей сигнатуры с одним бинарным предикатом, где d — произвольная арифметическая тьюрингова степень. Первое из них является m-полным $\Sigma_3^{0,d}$-множеством, а второе — m-полным $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$-множеством. Для доказательства этих утверждений сначала строим последовательности моделей $\{L_n\}_{n\in\omega}$ ($\{\mathfrak{C}_n\}_{n\in\omega}$) конечной сигнатуры такие, что L_n d-разрешима ($\mathfrak{C}_n$ d-разрешима и счетно категорична) тогда и только тогда, когда $n \in A$, где A есть $\Sigma_3^{0,d}$ $\left(\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}\right)$. После этого применяем метод понижения сложности моделей, разработанный С. С. Гончаровым и Б. Хусаиновым в [11], и получаем вычислимые последовательности вычислимых моделей некоторой конечной сигнатуры, обладающие нужными свойствами. После этого по ним строим вычислимые последовательности вычислимых моделей сигнатуры графов, в которых сохранены все необходимые свойства.

В разд. 2 и 3 даны сведения о маркеровских расширениях и однозначном представлении Σ_2^0-множеств, которые необходимы для построения вычислимых моделей по d-вычислимым, где d — произвольная арифметическая степень. В разд. 4 мы показываем, как по модели произвольной конечной сигнатуры построить модель сигнатуры графов с сохранением всех нужных свойств. А именно, рассматриваем определенные С. С. Гончаровым в [12, 13] функторы между моделями различных сигнатур и проверяем нужные свойства. В разд. 5 непосредственно доказываем принадлежность индексных множеств указанным классам сложности и их m-полноту. Как следствие получаем, что данные результаты верны для моделей произвольной нетривиальной конечной сигнатуры.

2. Конструкция Маркера

Для доказательства основных результатов этой статьи нам потребуется определить два оператора. Конструкция этих операторов основана на идеях Маркера из [14]. В этом разделе коротко сформулируем их определения и свойства. Ниже будет показано, что применение этих операторов позволяет получить модели более низкой сложности, которые при этом сохраняют нужные нам свойства. За более подробным изложением можно обратиться к [11].

Пусть L — конечный язык, не содержащий функциональных символов, $\mathfrak{A} = \left(A, P_0^{n_0}, \dots, P_m^{n_m}\right)$ — алгебраическая система языка L. Предполагаем, что для каждого P этой системы множества P и $A^k \setminus P$ бесконечны, где k — местность P. Возьмем некоторый k-местный предикат P системы $\mathfrak{A}$.

$\exists$-расширение Маркера этого предиката, обозначаемое через $P_\exists$, определяется следующим образом. Пусть X — бесконечное множество, не пересекающееся

с A. Тогда $P_\exists$ есть $(k+1)$-местный предикат, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Если $P_\exists(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$, то $P(a_1, \dots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

2. Для каждого $a_{k+1} \in X$ существует единственный набор $(a_1, \dots, a_k)$ такой, что $P_\exists(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$.

3. Если $P(a_1, \dots, a_k)$, то существует единственный элемент a такой, что $P_\exists(a_1, a_2, \dots, a_k, a)$.

$\forall$-*расширение Маркера* предиката P, обозначаемое через $P_\forall$, определяется следующим образом. Пусть X — бесконечное множество, не пересекающееся с A. Тогда $P_\forall$ есть $(k+1)$-местный предикат, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Если $P_\forall(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$ то $a_1, \dots, a_k \in A$ и $a_{k+1} \in X$.

2. Для всех $(a_1, \dots, a_k) \in A$ существует не более одного $a_{k+1} \in X$ такого, что $\neg P_\forall(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$.

3. Если $P_\forall(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$ для всех $a_{k+1} \in X$, то $P(a_1, \dots, a_k)$.

4. Для каждого $a_{k+1} \in X$ существует единственный набор $(a_1, \dots, a_k)$ такой, что $\neg P_\forall(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$.

Множество X для $\exists$- и $\forall$-расширений Маркера предиката P называется *спутником* P.

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{A} = \left(A, P_0^{n_0}, \dots, P_m^{n_m}\right)$ — модель.

1. *Модель* $\mathfrak{A}_\exists$ — это модель

$$\left(A \cup X_0 \cup \dots \cup X_m, P_0^{n_0+1}, \dots, P_m^{n_m+1}, X_0, \dots, X_m\right),$$

где каждый $P_i^{n_i+1}$, $i = 0, \dots, m$, — маркеровское $\exists$-расширение $P_i^{n_i}$ такое, что все множества X_i являются спутниками для $P_i^{n_i}$ и попарно не пересекаются.

2. *Модель* $\mathfrak{A}_\forall$ — это модель

$$\left(A \cup X_0 \cup \dots \cup X_m, P_0^{n_0+1}, \dots, P_m^{n_m+1}, X_0, \dots, X_m\right),$$

где каждый $P_i^{n_i+1}$, $i = 0, \dots, m$, — маркеровское $\forall$-расширение $P_i^{n_i}$ такое, что все множества X_i являются спутниками для $P_i^{n_i}$ и попарно не пересекаются.

Теорема 2.1. *Маркеровские расширения модели* $\mathfrak{A}$ *обладают следующими свойствами.*

1. *Модель* $\mathfrak{A}$ *определима в каждом из расширений.*

2. *Если теория модели* $\mathfrak{A}$ $\aleph_0$*-категорична, то таковыми являются теории каждого из расширений.*

3. *Если теория модели* $\mathfrak{A}$ $\aleph_1$*-категорична, то таковыми являются теории каждого из расширений.*

4. *Если теория модели* $\mathfrak{A}$ *почти сильно минимальна, то таковыми являются теории каждого из расширений.*

5. *Любой автоморфизм модели* $\mathfrak{A}$ *может быть продолжен до автоморфизма каждого из расширений.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, w — слово в алфавите $\{\exists, \forall\}$. По индукции определим $\mathfrak{A}_w$. Если w — пустая строка, то $\mathfrak{A}_w = \mathfrak{A}$. Предположим, что $w = w'\exists$ или $w = w'\forall$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{w'}$. Тогда положим $\mathfrak{A}_{w'\exists} = \mathfrak{B}_\exists$ и $\mathfrak{A}_{w'\forall} = \mathfrak{B}_\forall$. Получаем

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, w — слово в алфавите $\{\exists, \forall\}$. Тогда*

1) *модель $\mathfrak{A}$ определима в $\mathfrak{A}_w$;*
2) *если теория $\mathfrak{A}$ $\aleph_0$-категорична ($\aleph_1$-категорична), то такова теория $\mathfrak{A}_w$;*
3) *любой автоморфизм $\mathfrak{A}$ может быть продолжен до автоморфизма $\mathfrak{A}_w$.*

3. Однозначное представление Σ^0_2-множеств

Следующие определение и леммы взяты из [11]. Они понадобятся для доказательства основных результатов статьи.

Определение 3.1. Σ^0_2-множество A *однозначно представимо*, если для некоторого вычислимого предиката $Q \subset \omega^3$ выполнены следующие свойства.

1. $\forall n \in \omega\ \exists a\ \forall b\ Q(n, a, b)$ тогда и только тогда, когда $n \in A$.
2. $\forall n \in \omega\ \exists a\ \forall b\ Q(n, a, b)$ тогда и только тогда, когда $\exists^{=1} a\ \forall b\ Q(n, a, b)$[1)].
3. $\forall b\ \exists^{=1} \langle n, a\rangle\ \neg Q(n, a, b)$.
4. $\forall \langle n, a\rangle$ либо $\exists^{=1} b\ \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b\ Q(n, a, b)$.
5. $\forall a\ \exists^{=1} n\ \forall b\ Q(n, a, b)$.

Лемма 3.1. *Пусть A — кобесконечное Σ^0_2-множество, содержащее бесконечное вычислимое подмножество S такое, что $A \setminus S$ бесконечно. Тогда у A есть однозначное представление.*

Определение однозначного представления Σ^0_2-множества можно релятивизовать относительно оракула X. Релятивизованная версия леммы потребуется для доказательства теорем и формулируется следующим образом.

Лемма 3.2. *Пусть A — кобесконечное $\Sigma^{0,X}_2$-множество, содержащее бесконечное X-вычислимое подмножество S такое, что $A \setminus S$ бесконечно. Тогда существует X-вычислимое множество $Q \subset \omega^3$ такое, что Q — однозначное представление A.*

Следующие две теоремы вытекают из леммы 3.2 и следствия 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть d — произвольная арифметическая тьюрингова степень. Пусть $\mathfrak{M}_0, \dots, \mathfrak{M}_n, \dots$ — равномерно вычислимая последовательность d'-вычислимых моделей таких, что в каждой из $\mathfrak{M}_i$ для каждого $P \in \sigma$ существует равномерно вычислимое по i и P бесконечное вычислимое подмножество $S_{i,P}$ и $P \setminus S_{i,P}$ бесконечно. Тогда существует равномерно вычислимая последовательность d-вычислимых моделей $(\mathfrak{M}_0)_{\forall\exists}, \dots, (\mathfrak{M}_n)_{\forall\exists}, \dots$ такая, что для каждого i и для каждого $P' \in \sigma_{\forall\exists}$ существует равномерно вычислимое по i и P' бесконечное вычислимое подмножество $S_{i,P'} \subseteq P$ и $P' \setminus S_{i,P'}$ бесконечно.*

Доказательство. Из доказательства леммы 3.1 в [11] следует, что конструкцию однозначного представления можно проводить равномерно для всех n. Используя равномерную версию леммы 3.1, можно построить последовательность $(\mathfrak{M}_0)_{\forall\exists}, \dots, (\mathfrak{M}_n)_{\forall\exists}, \dots$ и показать, что каждое из расширений $(\mathfrak{M}_n)_{\forall\exists}$ является d-вычислимым и каждое расширение предикатов обладает указанными свойствами.

Теорема 3.2. *Для каждой тьюринговой степени d модель $\mathfrak{M}$ d-разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\forall$ и $\mathfrak{M}_\exists$ разрешимы.*

Доказательство. По теореме 2.1 модель $\mathfrak{M}$ определима в каждом из расширений $\mathfrak{M}_\forall$ и $\mathfrak{M}_\exists$. Следовательно, если $\mathfrak{M}_\forall$ или $\mathfrak{M}_\exists$ d-разрешима, то таковой

[1)] $\exists^{=1} x P(x)$ означает, что существует единственный x, удовлетворяющий P.

является и $\mathfrak{M}$. С другой стороны, свойства $\mathfrak{M}_\forall$ или $\mathfrak{M}_\exists$ полностью определяются моделью $\mathfrak{M}$. Поэтому если $\mathfrak{M}$ d-разрешима, то $\mathfrak{M}_\forall$ и $\mathfrak{M}_\exists$ d-разрешимы.

4. Сведение конечной сигнатуры к сигнатуре графов

Для сведения проблем исследования алгоритмических свойств моделей произвольной сигнатуры к графам и частичным порядкам в работах [12, 13] построены функторы между моделями разной сигнатуры. Они позволяют сохранять свойства относительной вычислимости для различных степеней. В этом разделе покажем, что подобное сведение произвольной конечной сигнатуры к сигнатуре графов сохраняет вычислимость, разрешимость и счетную категоричность моделей.

Предложение 4.1. *Для любой конечной сигнатуры σ_0 существует сигнатура σ_1, состоящая из единственного предикатного символа P такая, что для любой модели $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ_0 существует модель $\mathfrak{A}'$ сигнатуры σ_1, для которой*

1) $\mathfrak{A}$ *вычислима* $\Leftrightarrow \mathfrak{A}'$ *вычислима;*

2) $\mathfrak{A}$ *d-разрешима* $\Leftrightarrow \mathfrak{A}'$ *d-разрешима;*

3) $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ $\aleph_0$-*категорична* $\Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$ $\aleph_0$-*категорична.*

Доказательство. Пусть $\sigma_0 = \left\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots, P_k^{n_k}\right\rangle$ и $\mathfrak{A}$ — модель сигнатуры σ_0 с основным множеством A. Рассмотрим предикатный символ P местности $n = \sum\limits_{i=0}^{k} n_i$ и сигнатуру $\sigma_1 = \langle P^n\rangle$.

Строим модель $\mathfrak{A}'$ сигнатуры σ_1 следующим образом. В качестве основного множества рассматриваем множество $A' = \{\infty\} \cup A$. На A' определяем P следующим образом: $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in P$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \infty$;

b) существуют $i \le k$ и $y_1, \dots, y_{n_i}$ такие, что $x_{j+m_i} = y_j$ для всех j таких, что $1 \le j \le n_i$ и $\mathfrak{A} \models P_i(y_1, \dots, y_{n_i})$, и $x_j = \infty$ для всех j таких, что $1 \le j \le m_i$ или $m_i + n_i + 1 \le j \le n$; здесь $m_0 = 0$ и $m_i = \sum\limits_{l=0}^{i-1} n_l$ для $i > 1$.

Из определения следует, что если $\mathfrak{A}$ вычислима, то $\mathfrak{A}'$ вычислима.

Пусть $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ и $T' = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\mathfrak{B} = \langle B, P\rangle$ — произвольная модель теории T'. Определим модель $\mathfrak{B}^* = \langle B^*, P_1, \dots, P_k\rangle$ следующим образом. В качестве основного множества возьмем $B^* = B \setminus \{\infty\}$, где ∞ определяется формулой $P(y, y, \dots, y)$, и положим $\mathfrak{B}^* \models P_i(y_1, \dots, y_{n_i}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P(x_1, \dots, x_n)$, где $x_j = \infty$ при $1 \le j \le m_i$ или $m_{i+1} + 1 \le j \le n$ и $y_j = x_{j+m_i}$ для всех j таких, что $1 \le j \le n_i$. Тогда ясно, что для любой модели $\mathfrak{A}_1$ теории T выполнено $\mathfrak{A}_1 \cong {\mathfrak{A}_1'}^*$. Для любой модели $\mathfrak{B}_1$ теории T' выполнено $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_1^{*\prime}$.

Из определения следует, что если $\mathfrak{A}'$ вычислима, то $\mathfrak{A}'^*$ вычислима и, значит, $\mathfrak{A}$ вычислима, так как она вычислимо изоморфна $\mathfrak{A}'^*$; п. 1 предложения доказан.

Пусть $\mathfrak{A}$ d-разрешима. Покажем, что тогда $\mathfrak{A}'$ d-разрешима. Для этого докажем, что $\mathscr{F}\mathscr{D}(\mathfrak{A}')$ d-рекурсивно аксиоматизируема и полна, а следовательно, d-разрешима. В качестве аксиом рассмотрим следующие предложения.

1. $\exists^{=1} y P(y, y, \dots, y)$.

2. $\forall y_1, \dots, y_n P(y_1, \dots, y_n) \to \Bigg[(y_1 = \dots = y_n) \vee \bigvee\limits_{i=1}^{k} \bigwedge\limits_{l \le m_i} P(y_l, \dots, y_l)$

$$\& \bigwedge_{l>m_{i+1}} P(y_l,\dots,y_l) \& \bigwedge_{l=m_i+1}^{m_{i+1}} \neg P(y_l,\dots,y_l)\Bigg].$$

3. Для каждого предложения ψ из $\mathscr{F}\mathscr{D}(\mathfrak{A})$ в множество аксиом помещаем предложение ψ', которое определяем следующим образом. Считаем, что ψ в пренексной нормальной форме. Если ψ — бескванторная формула, то ψ' получается из ψ заменой всех $P_i(x_1,\dots,x_{n_i})$ их определениями через P вида $\exists x(P(x,\dots,x)\&P(x,\dots,x,x_1,\dots,x_{n_i},x,\dots,x))$. Если $\psi=\exists x\psi_1$, то полагаем $\psi'=\exists x(\neg P(x,\dots,x)\&\psi_1')$. Если $\psi=\forall x\psi_1$, то положим $\psi'=\forall x(\neg P(x,\dots,x)\to\psi_1')$.

Для доказательства полноты полученной теории рассмотрим произвольные две ее насыщенные модели $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2$ мощности ω_1 и покажем, что они изоморфны. В каждой из моделей существует единственный элемент b^j_∞, $j=1,2$, выделяемый формулой $P(y,\dots,y)$. На оставшихся множествах $B_j\setminus\{b^j_\infty\}$ зададим предикаты P_i, пользуясь их определениями через P. Полученные модели $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2$ будут насыщенными моделями $\mathscr{F}\mathscr{D}(\mathfrak{A})$, так что они изоморфны. Пусть $\varphi: A_1\to A_2$ задает этот изоморфизм. Определим

$$\varphi'(x) \coloneqq \begin{cases} b^2_\infty, & \text{если } x=b^1_\infty,\\ \varphi(x), & \text{если } x\neq b^1_\infty. \end{cases} \tag{$*$}$$

Пусть $\mathfrak{B}_1\models P(b_1,\dots,b_n)$. Если все $b_i=b^1_\infty$, то $\varphi'(b_i)=b^2_\infty$ и $\mathfrak{B}_2\models P(\varphi'(b_1),\dots,\varphi'(b_n))$. Если существует $b_i\neq b^1_\infty$, то по п. 2 аксиом для некоторого $1\le j\le k$ имеем $b_1=\dots=b_{m_j}=b_{m_{j+1}+1}=\dots=b_n=b^1_\infty$, а для $1\le l\le n_i$ будет $b_{m_j+l}\neq b^1_\infty$ и, в частности, $m_j+1\le i\le m_{j+1}$. Тогда по п. 3 $\mathfrak{A}_1\models P_j(b_{m_j+1},\dots,b_{m_{j+1}})$. Отсюда $\mathfrak{A}_2\models P_j(\varphi(b_{m_j+1}),\dots,\varphi(b_{m_{j+1}}))$, и тогда $\mathfrak{B}_2\models P(\varphi'(b_1),\dots,\varphi'(b_n))$. Таким образом, $\mathfrak{B}_1\cong\mathfrak{B}_2$, следовательно, теория $\mathscr{F}\mathscr{D}(\mathfrak{A}')$ аксиоматизируема d-разрешимым множеством аксиом и полна, поэтому d-разрешима.

Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — произвольные счетные модели теории T', и пусть T счетно категорична. $\mathfrak{B}_1^*$ и $\mathfrak{B}_2^*$ являются моделями T и тем самым они изоморфны. Пусть φ осуществляет этот изоморфизм. Тогда отображение $(*)$ осуществляет изоморфизм между $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$. Следовательно, T' счетно-категорична, и п. 3 доказан.

Предложение 4.2. *Пусть σ_1 — произвольная сигнатура с единственным n-местным предикатным символом, где $n\ge 3$. Тогда для любой модели $\mathfrak{B}$ сигнатуры σ_1 существует граф $\widetilde{\mathfrak{B}}$ такой, что*

1) *$\mathfrak{B}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\widetilde{\mathfrak{B}}$ вычислима;*

2) *$\mathfrak{B}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\widetilde{\mathfrak{B}}$ d-разрешима;*

3) *$\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ $\aleph_0$-категорична $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}(\widetilde{\mathfrak{B}})$ $\aleph_0$-категорична.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{B}=\langle B,P\rangle$ сигнатуры σ_1, где P — n-местный предикат. Рассмотрим множества $I=\{0,1,\dots,n\}$ и $B'=I\times B^n\cup B$.

По $\mathfrak{B}$ построим граф $\widetilde{\mathfrak{B}}=\langle\widetilde{B},R\rangle$, где $\widetilde{B}\coloneqq B'\cup\{a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8\}$, а R — бинарный предикат. Здесь предполагаем, что все элементы множества $\{a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8\}$ новые и попарно различные.

Элементы $a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8$ будут выделяться $\exists$-формулами. Можем считать эти элементы зафиксированными.

Определим R на $\widetilde{B}$ следующим образом. Пусть $x,y,\in\widetilde{B}$. Полагаем $\langle x,y\rangle\in R$ в случае выполнения одного из следующих условий:

a) $x = a_i \& y = c_j$, $1 \le i \le 3$ и $(i = 0 \& j \in \{0,1\}) \vee (i = 1 \& j \in \{2,3,4\}) \vee (i = 2 \& j \in \{5,6,7,8\})$;

b) $x = c_j \& y = b_i$, $1 \le i \le 3$ и $(i = 0 \& j \in \{0,1\}) \vee (i = 1 \& j \in \{2,3,4\}) \vee (i = 2 \& j \in \{5,6,7,8\})$;

c) $x \in B \& y \in I \times B^n \& y = \langle i, x_1, \dots, x_n \rangle \& x = x_i$ и $n \ge i \ge 1$;

d) $x, y \in I \times B^n \& x = \langle i, x_1, \dots, x_n \rangle \& y = \langle i+1, x_1, \dots, x_n \rangle$ и $0 \le i \le n-1$;

e) $x = a_0 \& y \in B$;

f) $x = a_1 \& y = \langle 0, y_1, \dots, y_n \rangle \in I \times B^n \& \mathfrak{B} \models P(y_1, \dots, y_n)$;

g) $x = a_2 \& y = \langle 0, y_1, \dots, y_n \rangle \in I \times B^n \& \mathfrak{B} \not\models P(y_1, \dots, y_n)$.

Таким образом, мы определили модель $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Ясно, что если $\mathfrak{B}$ вычислима, то и $\widetilde{\mathfrak{B}}$ вычислима.

Пусть $T_1 = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, $T_2 = \mathrm{Th}(\widetilde{\mathfrak{B}})$. Пусть $\mathfrak{C} = \langle C, R \rangle \models T_2$ — произвольная модель теории T_2. Определим множество $\widehat{C} = \{x \in C \mid \mathfrak{C} \models R(a_0, x)\}$. На $\widehat{C}$ зададим предикат P^n следующим образом:

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in P^n \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models (\exists y_0 \dots y_n)\big(y_0 R \dots R y_n \& \big(\bigwedge_{1 \le i \le n} x_i R y_i\big) \& a_1 R y_0\big),$$

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \notin P^n \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models (\exists y_0 \dots y_n)\big(y_0 R \dots R y_n \& \big(\bigwedge_{1 \le i \le n} x_i R y_i\big) \& a_2 R y_0\big).$$

Получаем модель $\widehat{\mathfrak{C}} = \langle \widehat{C}, P \rangle$ сигнатуры σ_1. При этом если $\mathfrak{C}$ вычислима, то и $\widehat{\mathfrak{C}}$ вычислима. Легко проверить, что тогда модели $\mathfrak{B}$, $\widehat{\widetilde{\mathfrak{B}}}$ вычислимо изоморфны и $\mathfrak{C}$, $\widetilde{\widehat{\mathfrak{C}}}$ также вычислимо изоморфны. Следовательно, первое свойство доказано.

Пусть $\mathfrak{B}$ d-разрешима. Покажем, что тогда $\widetilde{\mathfrak{B}}$ d-разрешима. Для этого докажем, что $\mathscr{F}\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{B}})$ d-рекурсивно аксиоматизируема и полна, а значит, d-разрешима.

Пусть $\varphi(x_0, x_1, x_2, y_0, \dots, y_8, z_0, z_1, z_2)$ — формула, утверждающая, что все x_i, y_j, z_k попарно различны и

1) $R(x_0, y_0) \& R(x_0, y_1) \& R(y_0, z_0) \& R(y_1, z_0)$ и никаких других связей между x_0, y_0, y_1, z_0, а также с остальными x_i, y_j, z_k нет;

2) $R(x_1, y_2) \& R(x_1, y_3) \& R(x_1, y_4) \& R(y_2, z_1) \& R(y_3, z_1) \& R(y_4, z_1)$ и никаких других связей между x_1, y_2, y_3, y_4, z_1, а также с остальными x_i, y_j, z_k нет;

3) $R(x_2, y_5) \& R(x_2, y_6) \& R(x_2, y_7) \& R(x_2, y_8) \& R(y_5, z_2) \& \dots \& R(y_8, z_2)$ и никаких других связей между $x_2, y_5, \dots, y_8, z_2$, а также с остальными x_i, y_j, z_k нет.

Навешиванием кванторов можем получить формулы $\varphi_{a_i}(x_i)$, $\varphi_{c_j}(y_j)$, $\varphi_{b_k}(z_k)$, однозначно определяющие элементы a_i, c_j, b_k соответственно, где $i \le 3$, $j \le 8$, $k \le 3$. Обозначим

$$C(x) \leftrightharpoons \varphi_{a_0}(x) \vee \varphi_{a_1}(x) \vee \varphi_{a_2}(x) \vee \varphi_{b_0}(x) \vee \dots \vee \varphi_{c_8}(x),$$

$$M(x) \leftrightharpoons \exists v (\varphi_{a_0}(v) \& R(a_0, x)),$$

$$M_1(x) = \exists v, u_0 \dots u_n \big(\bigvee_i (x = u_i) \& v R u_0 R u_1 \dots R u_n \& \varphi_{a_1}(v)\big),$$

$$M_2(x) = \exists v, u_0 \dots u_n \big(\bigvee_i (x = u_i) \& v R u_0 R u_1 \dots R u_n \& \varphi_{a_2}(v)\big).$$

Определим аксиомы:

1) $\exists^{=1} x (\varphi_{a_i}(x)) \& \forall u (\varphi_{a_i}(u) \to \neg M(u) \& \neg M_1(u) \& \neg M_2(u))$, $i = 1, 2, 3$;

2) $\exists^{=1} y (\varphi_{c_j}(y)) \& \forall u (\varphi_{c_j}(u) \to \neg M(u) \& \neg M_1(u) \& \neg M_2(u))$, $1 \le j \le 8$;

3) $\exists^{=1} z(\varphi_{b_k}(z))\&\forall u(\varphi_{b_k}(u) \to \neg M(u)\&\neg M_1(u)\&\neg M_2(u))$, $k = 1, 2, 3$;
4) $M(u) \leftrightarrow \neg M_i(u)$, $i = 1, 2$, $M_1(u) \leftrightarrow \neg M_2(u)$;
5) $M_1(u)\&\neg\exists x(\varphi_{a_1}(x)\&xRu) \to \exists^{=1} v(M(v)\&vRu)$;
$M_2(u)\&\neg\exists x(\varphi_{a_2}(x)\&xRu) \to \exists^{=1} v(M(v)\&vRu)$;
6) $R(x, y)\&R(x', y')\&M(x)\&M(x')\&x \neq x' \to y \neq y'$;
7) $M_1(u)\&\exists x(\varphi_{a_1}(x)\&xRu) \to \forall v\neg(M(v)\&vRu)$;
$M_2(u)\&\exists x(\varphi_{a_2}(x)\&xRu) \to \forall v\neg(M(v)\&vRu)$;
8) $M_1(u)\&\exists x, v_0 \dots v_n\big[(\varphi_{a_1}(x)\&xRv_0R\dots Rv_n) \to \big(\big(\bigvee\limits_{1\le i\le n-1} u = v_i\big) \to$
$\exists^{=1} u_1, u_2(M_1(u_1)\&M_1(u_2)\&u_1RuRu_2)\big)\&(u = v_0 \to$
$\exists^{=1} u_1, u_2(\varphi_{a_1}(u_1)\&M_1(u_2)\&u_1RuRu_2))\&(u = v_n \to$
$\exists^{=1} u_1\forall u_2(M_1(u_1)\&u_1Ru\&(M_1(u_2) \to \neg uRu_2)))\big]$;

аналогичное предложение для M_2:

9) $M_1(u) \to \exists vu_0 \dots u_n\big(vRu_0R\dots Ru_n\&\big(\bigvee\limits_i x = u_i\big)\&(\varphi_{a_1}(v) \vee \varphi_{a_2}(v))\big)$;
10) $(\forall x, y)\big[(R(x, y)\&M(x)) \to (\exists! u_0 \dots u_n, x_0 \dots x_n)\big(\bigvee\limits_i (y = u_i\&x = x_i)\&$
$\bigwedge\limits_i (M(x_i)\&x_iRu_i)\&(\exists v)vRu_0R\dots Ru_n\&(\varphi_{a_1}(v) \vee \varphi_{a_2}(v))\big)\big]$;
11) $(\forall x_1 \dots x_n)\big[\bigvee\limits_i M(x_i) \to (\exists^{=1} vu_0 \dots u_n)(vRu_0R\dots Ru_n\&(\varphi_{a_1}(v) \vee \varphi_{a_2}(v))$
$\&\forall w(\varphi_{a_1}(v)\&\varphi_{a_2}(w) \to \neg R(w, u_0))\&(\varphi_{a_2}(v)\&\varphi_{a_1}(w) \to \neg R(w, u_0)))\big]$;
12) $R(x, y)\&\varphi_{a_i}(x) \to \exists^{=1} u_0 \dots u_n x_1 \dots x_n\big(u_0R\dots Ru_n\&\bigwedge\limits_i x_iRu_i\&y = u_0\big)$;
13) $R(x, y)\&\neg M(x)\&\neg M(y)\&\neg C(x)\&\neg C(y) \to$
$\exists! u_0 \dots u_n\big(u_0R\dots Ru_n\&\bigvee\limits_i (x = u_i\&y = u_{i+1})\big)$;

14) для каждого предложения ψ из $\mathscr{F}\mathscr{D}(\mathfrak{B})$ в множество аксиом помещаем предложение ψ', которое определяем следующим образом: считаем, что ψ в пренексной нормальной форме, все позитивные вхождения $P(x_1, \dots, x_n)$ заменяем на

$$M(x_1)\&\dots\&M(x_n)\&(\exists x, y_0 \dots y_n)\big(xRy_0R\dots Ry_n\&\big(\bigwedge_{1\le i\le n} x_iRy_i\big)\&\varphi_{a_1}(x)\big),$$

все негативные вхождения P в ψ заменяем на

$$M(x_1)\&\dots\&M(x_n)\&(\exists x, y_0 \dots y_n)\big(xRy_0R\dots Ry_n\&\big(\bigwedge_{1\le i\le n} x_iRy_i\big)\&\varphi_{a_2}(x)\big),$$

все кванторы ограничиваем на $M(x)$.

Для доказательства полноты полученной теории рассмотрим произвольные две ее насыщенные модели $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ мощности ω_1 и покажем, что они изоморфны. В каждой из моделей существует ровно по одному элементу $a_1^1, \dots, c_1^1, \dots, b_1^1, \dots$ и $a_1^2, \dots, c_1^2, \dots, b_1^2, \dots$, которые удовлетворяют соответствующим формулам для специальных элементов. На множествах $B_1 = \{x \mid M^1(x)\}$ и $B_2 = \{x \mid M^2(x)\}$ зададим предикат P, пользуясь его определением через R. Полученные модели $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ будут насыщенными моделями $\mathscr{F}\mathscr{D}(\mathfrak{B})$, так что они изоморфны. Пусть $\varphi : B_1 \to B_2$ задает этот изоморфизм. Пользуясь аксиомами, определим отображение $\varphi' : C_1 \to C_2$ следующим образом. Выделенные элементы из $\mathfrak{C}_1$ переходят в соответствующие выделенные элементы в $\mathfrak{C}_2$. Элементы x, удовлетворяющие $M(x)$ в $\mathfrak{C}_1$, переходят в $\varphi(x)$. Каждый элемент из M_1^1 (или M_2^1) находится в цепочке из $n+1$ элементов $v_0, \dots, v_n$ в M_1^1 (M_2^1). Находим (однозначно) элементы $u_1, \dots, u_n$ из M^1, с которыми они связаны. С $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_1)$

связана единственная цепочка $w_0, w_1, \dots, w_n$ в M_1^2 (M_2^2 соответственно). В качестве $\varphi'(v_i)$, $0 \le i \le n$, берем w_i. Тогда φ' осуществляет изоморфизм $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$. Следовательно, $\mathscr{F}\mathscr{D}(\widetilde{\mathfrak{B}})$ является полной d-рекурсивно аксиоматизируемой теорией, т. е. она d-разрешима.

Пусть $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ — счетные модели теории T_2. Тогда соответствующие модели $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ и $\widehat{\mathfrak{C}}_2$ сигнатуры σ_1 являются моделями теории T_1. Пусть φ осуществляет изоморфизм $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ и $\widehat{\mathfrak{C}}_2$. Тогда по φ можно построить функцию φ', осуществляющую изоморфизм $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ аналогично п. 2, т. е. из счетной категоричности T_1 следует счетная категоричность T_2.

Следствие 4.1. *Для любой модели $\mathfrak{M}$ произвольной конечной сигнатуры σ существует граф G такой, что*

1) $\mathfrak{M}$ *вычислима* $\Leftrightarrow$ G *вычислим;*
2) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ $\aleph_0$*-категорична* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}(G)$ $\aleph_0$*-категорична;*
3) $\mathfrak{M}$ d*-разрешима* $\Leftrightarrow$ G d*-разрешим.*

Следствие 4.2. *Пусть $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$ — равномерно вычислимая последовательность моделей конечной сигнатуры σ. Тогда существует равномерно вычислимая последовательность графов $\{G_i\}_{i\in\omega}$ такая, что*

1) $\mathfrak{M}_i$ *вычислима* $\Leftrightarrow$ G_i *вычислим;*
2) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i)$ $\aleph_0$*-категорична* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}(G_i)$ $\aleph_0$*-категорична;*
3) $\mathfrak{M}_i$ d*-разрешима* $\Leftrightarrow$ G_i d*-разрешим.*

5. Индексные множества

Нас интересует сложность индексного множества вычислимых d-разрешимых моделей.

Более точно, пусть $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n, \dots$ — нумерация всех вычислимых моделей фиксированной сигнатуры. Для каждой арифметической степени d рассмотрим индексное множество

$$CK^d = \{n \mid \mathfrak{M}_n \text{ — } d\text{-разрешимая модель}\}.$$

Теорема 5.1. *Для любой арифметической тьюринговой степени d индексное множество CK^d всех d-разрешимых моделей является m-полным $\Sigma_3^{0,d}$ множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры с одним бинарным предикатом.*

Лемма 5.1. $CK^d \in \Sigma_3^{0,d}$.

Доказательство. $n \in CK^d$ тогда и только тогда, когда $(\exists m)$ [φ_m всюду определена, принимает значения только $\{0,1\}$ и

$(\forall k)$(если k — номер бескванторного предложения, то $\varphi_m(k) = 1 \Leftrightarrow$ предложение с номером k истинно в $\mathfrak{M}_n$)

$\&(\forall k)$(если k — номер конъюнкции двух предложений с номерами k_1, k_2, то $\varphi_m(k) = 1 \Leftrightarrow \varphi_m(k_1) = 1 \& \varphi_m(k_2) = 1$)

$\& \dots \& (\forall k)$(если k — номер предложения вида $\forall y \psi_{k'}$, то $\varphi_m(k) = 1 \Leftrightarrow$ $(\forall l)(\varphi_m(k_l) = 1$, где k_l — номер предложения, полученного из $\psi_{k'}$ заменой всех свободных вхождений переменной y на l))].

Это утверждение является $\Sigma_3^{0,d}$.

Лемма 5.2. *Для каждой степени d существует d-вычислимый линейный порядок $L_d = \langle N, \preceq_d \rangle$ типа $\omega + \omega*$ такой, что начальный отрезок типа ω не является вычислимо перечислимым относительно d.*

Доказательство. Эта лемма получается релятивизацией леммы из [15], где утверждается существование вычислимого порядка типа $\omega + \omega*$ такого, что начальный отрезок типа ω не является вычислимым. Нетрудно заметить, что в этом случае ω или $\omega*$ не является вычислимо перечислимым, так как в противном случае мы можем перечислить их оба. Тогда получим, что они оба вычислимы.

Лемма 5.3. *Если $A \in \Sigma_3^{0,d}$, то существует d-вычислимый предикат $Q(n, x, y)$ такой, что*

1) $n \in A \Longleftrightarrow \exists x \, \exists^\infty y \; Q(n, x, y)$,

2) для всех $n \quad Q(n, 0, 0)$ и $Q(n, 0, 1)$.

Доказательство леммы 5.3 можно найти в [16].

Лемма 5.4. *Для любого множества $A \in \Sigma_3^{0,d}$ существует равномерно вычислимая последовательность $\{L_n\}$ d-вычислимых моделей такая, что*

$n \in A \Leftrightarrow L_n$ d-разрешима и счетно категорична;

$n \notin A \Leftrightarrow L_n$ не d-разрешима.

Доказательство леммы 5.4. Пусть L_d из леммы 5.2. Для всех $x \in L_d$ и для всех n рассмотрим множество $L_{(n,x)} = \{\langle x', y' \rangle \mid x' \leq x \text{ и } Q(n, x', y')\}$, которое является равномерно d-вычислимым. Также построим линейный порядок $R_{(n,x)}$ на $L_{(n,x)}$ такой, что

если множество $L_{(n,x)}$ бесконечно, то $(L_{(n,x)}, R_{(n,x)})$ имеет тип η и $\langle 0, 0 \rangle < \langle 0, 1 \rangle$;

если $L_{(n,x)}$ конечно, то $(L_{(n,x)}, R_{(n,x)})$ — линейный порядок.

Определим

$$L_n \leftrightharpoons \sum_{x \in L_d} L_{(n,x)}.$$

Если $n \in A$, то по лемме 5.3 $\exists x_0 \, \exists^\infty y \; Q(n, x_0, y)$. Значит, для всех x, для которых $x_0 \leq x$, множество $L_{(n,x)}$ бесконечно. По определению $R_{(n,x)}$

$$L_n \cong \sum_{k=0}^{r(n)} S_k + P_k,$$

где S_k конечны, а $P_k \cong \eta$ для всех $k \leq r(n)$, $r(n)$ конечно и зависит от n. Следовательно, L_n является d-разрешимым. Если $n \notin A$, то для всех x множество $L_{(n,x)}$ конечно и $L_n \cong \omega + \omega*$. По лемме 5.2 L_n является d-вычислимым (так как L_d d-вычислим). В то же время L_n не является d-разрешимым. Если бы L_n был d-разрешим, то мы могли бы перечислить ω с оракулом d и тогда ω был бы вычислимо перечислимым относительно d.

Доказательство теоремы 5.1. По лемме 5.1 $CK^d \in \Sigma_3^{0,d}$. Для доказательства полноты достаточно построить вычислимую последовательность вычислимых моделей сигнатуры графов такую, что

$n \in A \Leftrightarrow \mathfrak{A}_n$ d-разрешима и счетно категорична;

$n \notin A \Leftrightarrow \mathfrak{A}_n$ не d-разрешима, где A — произвольной $\Sigma_3^{0,d}$ множество.

Возьмем последовательность $\{L_n\}$ из леммы 5.4 и построим по ней последовательность вычислимых моделей с нужными свойствами. Последовательность

$\{L_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Существует такое m, что каждый R_n является кобесконечным Σ_0^m-множеством. Множество S_n всех пар $\langle 0,0\rangle$ и $\langle 0,1\rangle$ из всех $L_{(n,x)}$ образует бесконечное вычислимое подмножество.

Для всех n строим последовательность моделей L_n^i, $1 \le i \le m$, такую, что L_n^0 есть L_n, а каждая модель L_n^i есть $\forall\exists$-расширение L_n^{i-1}. По теоремам 3.1 и 3.2 каждая модель L_n^i $\mathbf{0}^{(m-i)}$-вычислима. По следствию 2.1 для всех n и для всех $i \le m$ модель L_n^i $\aleph_0$-категорична. В частности, L_n^m вычислима и $\aleph_0$-категорична. Если $n \in A$, то L_n^m d-разрешима, так как L_n d-разрешима, а если $n \notin A$, то L_n^m не является d-разрешимой, так как L_n не d-разрешима.

Получили вычислимую последовательность моделей, каждая из которых вычислима, счетно категорична и, если $n \in A$, d-разрешима. Применяем к каждой из L_n^m следствие 4.2. Полученная в результате последовательность моделей $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ сигнатуры с одним бинарным предикатом является искомой.

Следствие 5.1. *Индексное множество всех разрешимых моделей сигнатуры с одним бинарным предикатом имеет тьюрингову степень* $0^{(3)}$.

Следствие 5.2. *Для любой конечной нетривиальной сигнатуры, т. е. содержащей предикатный символ местности* ≥ 2 *или функциональный символ местности* ≥ 2, *индексное множество всех d-разрешимых моделей этой сигнатуры является m-полным* $\Sigma_3^{0,d}$ *в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей этой сигнатуры.*

Перейдем к вопросу о сложности индексного множества для d-разрешимых счетно категоричных моделей. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 5.1. *Пусть* $B \in \Pi_3^0$. *Тогда существует равномерно вычислимая последовательность* $\{\mathfrak{B}_n\}_{n\in\omega}$ *разрешимых моделей такая, что*

если $n \in B$, *то* $\mathfrak{B}_n$ *счетно категорична,*

если $n \notin B$, *то* $\mathfrak{B}_n$ *не является счетно категоричной.*

Доказательство. $B \in \Pi_3^0 \Leftrightarrow \forall k\, \exists^{<\infty} m\ P(n,k,m)$, где P — вычислимый предикат. Равномерно по n строим вычислимую функцию $f_n : \omega \to \omega$ такую, что $n \in B$ тогда и только тогда, когда у каждого k конечное число прообразов. Строим f_n по шагам. На шаге $t = \langle k, 0\rangle$ определяем $f_n^t(x) = k$ для первого x, на котором значение f_n еще не определено к шагу t. На шагах вида $t = \langle k, m+1\rangle$ если $P(n,k,m)$, то на первом еще не использованном значении x полагаем $f_n(x)$ равным k. В противном случае переходим к следующему шагу. Построенная таким образом функция будет обладать нужным свойством.

По f_n строится теория T_n сигнатуры с одним бинарным предикатом на основе конструкции Шмерла из [17] . Она всегда разрешима и является счетно категоричной только в случае, когда у f_n для любого k существует лишь конечное число прообразов, т. е. когда $n \in B$. По T_n берем ее разрешимую модель $\mathfrak{B}_n$. Полученная последовательность $\{\mathfrak{B}_n\}_{n\in\omega}$ искомая.

Следствие 5.3. *Пусть* $B \in \Pi_3^{0,d}$. *Тогда существует равномерно вычислимая последовательность* $\{\mathfrak{C}_n\}_{n\in\omega}$ *вычислимых d-разрешимых моделей сигнатуры с одним бинарным предикатом такая, что*

если $n \in B$, *то* $\mathfrak{C}_n$ *счетно категорична,*

если $n \notin B$, *то* $\mathfrak{C}_n$ *не является счетно категоричной.*

Доказательство. Конструкцию предложения 5.1 можно релятивизовать относительно d, т. е. существует равномерно вычислимая последовательность

d-разрешимых моделей $\{\mathfrak{B}_n\}_{n\in\omega}$ с соответствующими свойствами. Рассмотрим последовательность моделей $\mathfrak{C}'_n = \langle B_n \cup M_n, R^2_n, B^1_n, M^1_n\rangle$, где множества B_n и M_n вычислимы и не пересекаются. На B_n с помощью R_n задается копия $\mathfrak{B}_n$, а на M_n полагаем R_n истинным на любых парах. Одноместные предикаты B_n и M_n выделяют соответствующие множества. Тогда каждая $\mathfrak{C}'_n$ d-разрешима, следовательно, d-вычислима и последовательность $\{\mathfrak{C}_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Применяя теорему 3.1 необходимое число раз, получим вычислимую последовательность $\{\mathfrak{C}''_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых d-разрешимых моделей конечной сигнатуры такую, что $\mathfrak{C}''_n$ счетно категорична тогда и только тогда, когда $n \in B$. Применяя к этой последовательности следствие 4.2, получаем нужную последовательность $\{\mathfrak{C}_n\}_{n\in\omega}$.

Теорема 5.2. *Для любой арифметической тьюринговой степени d индексное множество CK^d_0 всех d-разрешимых счетно категоричных моделей является m-полным $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$-множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры с одним бинарным предикатом.*

Доказательство. Множество CK^d_0 является m-полным $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$-множеством по алгоритму Тарского — Куратовского. А именно, $n \in CK^d_0$ тогда и только тогда, когда

(I) существует функция φ_e, обладающая свойствами 1–4 из доказательства леммы 5.1,

(II) для любой функции $\varphi_{e'}$ со свойствами 1–4 из доказательства леммы 5.1 при любом n существуют k и формулы $\psi_{e_1}, \dots, \psi_{e_k}$ от n переменных такие, что для каждой формулы ψ_l от n переменных выполняется $\varphi_{e'}(m) = 1$, где m — номер формулы $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \psi_l \leftrightarrow \psi_{e_i}$.

Так как все свойства 1–4 из доказательства леммы 5.1 могут быть записаны с помощью $\forall\exists$-предложений, CK^d_0 имеет указанную сложность.

Чтобы доказать сводимость $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$-множеств к CK^d_0, строим вычислимую последовательность вычислимых моделей $\mathfrak{N}_n$ такую, что $\mathfrak{N}_n$ d-разрешима и счетно категорична тогда и только тогда, когда $n \in A$, где A является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$-множеством. Строим последовательность моделей $\{\mathfrak{N}'_n\}$ следующим образом. Полагаем $\mathfrak{N}'_n = \langle A_n \cup C_n, R^2_n, A^1_n, C^1_n\rangle$, где множества A_n и C_n вычислимы и не пересекаются. На A_n с помощью R_n задается $\mathfrak{A}_n$ из теоремы 5.1, на C_n с помощью R_n задается $\mathfrak{C}_n$ из следствия 5.3, а одноместные предикаты выделяют соответствующие множества. Тогда $\mathfrak{N}_n$ является d-разрешимой счетно категоричной тогда и только тогда, когда $n \in A$. Применяем следствие 4.2 и получаем нужную последовательность.

Следствие 5.4. *Для любой конечной нетривиальной сигнатуры, т. е. содержащей предикатный символ местности ≥ 2 или функциональный символ местности ≥ 2, индексное множество всех d-разрешимых счетно категоричных моделей этой сигнатуры является m-полным $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$-множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей этой сигнатуры.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Calvert W.* The isomorphism problem for classes of computable fields // Archive Math. Logic. 2004. V. 34, N 3. P. 327–336.
2. *Calvert W.* The isomorphism problem for computable Abelian p-groups of bounded length // J. Symbolic Logic. 2005. V. 70, N 1. P. 331–345.

3. *Калверт У., Каммингс Д., Найт Дж. Ф., Миллер С.* Сравнение классов конечных структур // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 666–701.
4. *Калверт У., Харизанова В., Найт Дж. Ф., Миллер С.* Индексные множества вычислимых моделей // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 538–574.
5. *Csima B. F., Montalbán A., Shore R. A.* Boolean algebras, Tarski invariants, and index sets // Notre Dame J. Formal Logic. 2006. V. 47, N 1. P. 1–23.
6. *Добрица В. П.* Сложность индексного множества конструктивной модели // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 372–381.
7. *Гончаров С. С., Найт Дж. Ф.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.
8. *Lempp S., Slaman T.* The complexity of the index sets of $\aleph_0$-categorical theories and of Ehrenfeucht theories // Advances in logic (North Texas logic conf.), Providence RI: Amer. Math. Soc. 2007. P. 43–47.
9. *White W.* On the complexity of categoricity in computable structures // Math. Logic Quart. 2003. V. 49, N 6. P. 603–614.
10. *White W.* Characterizations for computable structures: PhD dissertation. Cornell Univ, 2000.
11. *Гончаров С. С., Хусаинов Б.* Сложность теорий вычислимых категоричных моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 650–665.
12. *Гончаров С. С.* Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 621–639.
13. *Goncharov S. S.* Computability and computable models, mathematical problems from applied logic. II // Logics for the XXIst century. Edited by D. M. Gabbay, S. S. Goncharov and M. Zakharyaschev. New York: Springer-Verl., 2006. P. 99–216. (Intern. Math. Ser., New York).
14. *Marker D.* Non-Σ_n-axiomatizable almost strongly minimal theories // J. Symbolic Logic. 1989. V. 54, N 3. P. 921–927.
15. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. 3. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1974.
16. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
17. *Schmerl J. H.* A decidable $\aleph_0$-categorical theory with a nonrecursive Ryll–Nardzewski function // Fund. Math. 1978. V. 98, N 2. P. 121–125.

Статья поступила 7 ноября 2006 г.

Фокина Екатерина Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
e_fokina@math.nsc.ru