Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.518+519.651

КОНСТАНТЫ ВЛОЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В. Л. Васкевич

Аннотация. Получены явные представления норм операторов вложения периодических пространств Соболева в пространство непрерывных функций (нормы такого типа принято называть константами вложения). Соответствующие формулы для констант вложения дают их выражения через значения известной дзета-функции Эпштейна, зависящей от гладкости s рассматриваемых пространств и от размерности n независимых переменных. Установлено, что существуют функции рассматриваемых вложений, совпадающие с точностью до постоянного слагаемого и скалярного сомножителя со значениями соответствующей дзета-функции Эпштейна. Найдена асимптотика констант вложения при $s \to n/2$.

Ключевые слова: оператор вложения, пространства Соболева, константа вложения, дзета-функция Эпштейна, оценки погрешности.

Посвящаю памяти моего учителя
Сергея Львовича Соболева

1. Введение

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей и единичным объемом служит областью задания функций из некоторого банахова пространства $X = X(\Omega)$. Предположим, что X вложено ограниченным образом в пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных в замыкании Ω функций. Иными словами, существует конечная *константа вложения* (см., например, [1]) — минимальное положительное число $A_n = A_n(X)$, для которого имеют место неравенства

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| \leq A_n \|\varphi \mid X\| \quad \forall\, \varphi \in X. \tag{1}$$

Указанная константа A_n представляет собой норму действующего из X в $C(\overline{\Omega})$ оператора вложения. Функцию u из X, доставляющую равенство в оценке (1), будем называть *функцией вложения*.

Предположим, что тождественно единичная функция принадлежит X, имея при этом единичную же норму. В этом случае справедлива оценку снизу $A_n \geq 1$.

Далее область задания Ω — единичный куб

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 0 \leq x_j < 1,\ j = 1, 2, \dots, n\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00207 и 07–01–00585).

а X — периодическое пространство Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$ порядка s, возможно, дробного, $s > n/2$. Известно [2], что при $s > n/2$ пространство $\widetilde{H}^s(Q)$ вложено в $C(\overline{Q})$.

Соответствующая константа вложения, обозначаемая через $\widetilde{A}_n^s$, представлена далее явно в виде суммы кратного абсолютно сходящегося ряда. Устанавливается также, что существует функция рассматриваемого вложения, совпадающая с точностью до постоянного слагаемого и скалярного сомножителя с известной дзета-функцией Эпштейна. Отдельно получено асимптотическое разложение $\widetilde{A}_n^s$ при $s \to n/2$ (найденная формула уточняет в случае пространства $\widetilde{H}^s(Q)$ асимптотическую формулу из [1]). Отметим, что представления и оценки чисел $\widetilde{A}_n^s$ в виде явных и достаточно просто устроенных функций от n и s востребованы в оценках чисел обусловленности вычислительных процессов (см., например, [3, 4]).

2. Пространства $\widetilde{H}^s(Q)$

Пространство Соболева $\widetilde{H}^s(Q)$ порядка $s > n/2$ по определению представляет собой пополнение пространства конечных сумм вида

$$\varphi(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c[\beta]e^{-i2\pi\beta x},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta x = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ и лишь конечное число коэффициентов $c[\beta]$ отлично от нуля, т. е. пополнение пространства тригонометрических полиномов, по норме

$$\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\| = \Big\{|c[0]|^2 + \sum_{\beta\neq 0} |2\pi\beta|^{2s}|c[\beta]|^2\Big\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Здесь $|2\pi\beta|^{2s} = (2\pi)^{2s}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)^s$, а суммирование производится по всем ненулевым β из $\mathbb{Z}^n$. Этого же соглашения по суммированию мы придерживаемся и далее.

Равенство (2) дает выражение нормы произвольного элемента $\varphi(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ через его коэффициенты Фурье

$$c[\beta] = c_\varphi[\beta] = \int\limits_Q \varphi(x)e^{i2\pi\beta x}\,dx, \quad \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Пространство $\widetilde{H}^s(Q)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\widetilde{H}^s} = c_\varphi[0]\bar{c}_\psi[0] + \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n,\,\beta\neq 0} |2\pi\beta|^{2s}c_\varphi[\beta]\bar{c}_\psi[\beta].$$

Если $s = m$ — натуральное число, то $\widetilde{H}^s(Q)$ совпадает с $\widetilde{W}_2^m(Q)$ — пространством периодических с единичной матрицей периодов функций из $L_2(Q)$, обобщенные производные которых до порядка m включительно также принадлежат $L_2(Q)$ [5, с. 559]. Периодичность функции $\varphi(x)$ означает, что

$$\varphi(x + \gamma) = \varphi(x) \quad \forall\gamma \in \mathbb{Z}^n.$$

Норма в $\widetilde{W}_2^m(Q)$ задается равенством [5, с. 559]

$$\left\|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\right\| = \left[\left|\int\limits_Q \varphi(x)\,dx\right|^2 + \int\limits_Q \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}|D^\alpha\varphi|^2\,dx\right]^{1/2}$$

и совпадает с нормой $\|\varphi \mid \widetilde{H}^m(Q)\|$, определяемой соотношением (2).

В принятых в [6, с. 140] обозначениях $\widetilde{H}^s(Q)$ как множество совпадает с пространством $\widetilde{H}_2^s$ из бесселевой шкалы гильбертовых пространств с нулевым пространством $\widetilde{L}_2$ и весовой функцией $\mu(\xi) = (1+|2\pi\xi|^2)^{s/2}$. Норма в $\widetilde{H}_2^s$ задается соотношением

$$\|\varphi \mid \widetilde{H}_2^s\| = \Big\{\sum_\beta (1+|2\pi\beta|^2)^s |c_\varphi[\beta]|^2\Big\}^{1/2}. \tag{2′}$$

При этом, как нетрудно убедиться, справедливы неравенства

$$\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2 \le \left\|\varphi \mid \widetilde{H}_2^s\right\|^2 \le 2^s\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2,$$

т. е. нормы (2) и (2′) эквивалентны.

3. Константы и функции вложения $\widetilde{H}^s(Q)$ в $C(\overline{Q})$

В этом разделе выводятся явные представления чисел $\widetilde{A}_n^s$ в виде сумм кратных абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Константа вложения $\widetilde{A}_n^s$ пространства $\widetilde{H}^s(Q)$ в $C(\overline{Q})$ представима в виде*

$$\widetilde{A}_n^s = \left\{1 + \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n,\,\beta\ne0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

причем ряд в правой части равенства (3) при $s > n/2$ сходится.

Доказательство. Произвольная функция $\varphi(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ разлагается в сходящийся по норме этого пространства ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_\varphi[\beta]e^{-i2\pi\beta x}.$$

Через коэффициенты Фурье $c_\varphi[\beta]$ норма функции $\varphi(x)$ выражается формулой (2). Учитывая это и пользуясь неравенством Коши для сумм, имеем

$$\sup_{x\in\overline{Q}}|\varphi(x)| \le |c_\varphi[0]| + \sum_{\beta\ne0}\frac{1}{|2\pi\beta|^s}(|2\pi\beta|^s|c_\varphi[\beta]|) \le \left\{1+\sum_{\beta\ne0}\frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\right\}^{1/2}\|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\|. \tag{4}$$

Ряд в правой части (4) тот же, что и в (3), и оба они сходятся, как это следует из условия $s > n/2$ и известного соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_j^2 \ge j\big(\beta_1^2\beta_2^2\ldots\beta_j^2\big)^{1/j} \quad \text{для } 1\le j\le n.$$

В силу произвольности функции $\varphi(x)\in\widetilde{H}^s(Q)$ из (4) заключаем, что

$$\widetilde{A}_n^s \le \left\{1+\sum_{\beta\ne0}\frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Убедимся, что в оценке (4) точное равенство реализуется на функции

$$u_0(x) = 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\, e^{-i2\pi\beta x}. \tag{6}$$

В силу условия $s > n/2$ ряд (6) сходится абсолютно. При этом

$$|u_0(x)| \leq 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} \Rightarrow \sup_{x \in \overline{Q}} |u_0(x)| \leq 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} = u_0(0). \tag{7}$$

Следовательно,

$$u_0(0) = \sup_{x \in \overline{Q}} |u_0(x)| = 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}.$$

Из (2) и (6) заключаем также, что

$$\|u_0 \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2 = 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} < \infty. \tag{8}$$

Таким образом, функция u_0 принадлежит $\widetilde{H}^s(Q)$. Учитывая это и пользуясь (8), имеем для $\widetilde{A}_n^s$ следующую оценку снизу:

$$\widetilde{A}_n^s \geq \frac{\sup_{x \in \overline{Q}} |u_0(x)|}{\|u_0 \mid \widetilde{H}^s(Q)\|} = \left\{1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}\right\}^{1/2}.$$

Отсюда и из (5) вытекает искомое представление (3). $\square$

Следствие 1. *При $s > n/2$ справедливо равенство*

$$\left(\widetilde{A}_n^s\right)^2 = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{j=1}^{n} 2^j \binom{n}{j} \sum_{\beta_1=1}^{\infty} \sum_{\beta_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{\beta_j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_j^2\right)^s}. \tag{9}$$

При $n = 1$ формула (9) принимает вид

$$\left(\widetilde{A}_1^s\right)^2 = 1 + \frac{2}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} = 1 + \frac{2\zeta(2s)}{(2\pi)^{2s}}, \tag{9$'$}$$

где $\zeta(\cdot)$ — известная дзета-функция Римана. Взяв в (9$'$) s равным натуральному числу m и воспользовавшись известным представлением числа Бернулли B_{2m} в виде ряда [7, с. 608, формула 23.1.18]

$$B_{2m} = (-1)^{m-1} 2 \frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}},$$

получим представление константы $\widetilde{A}_1^m$ через число Бернулли:

$$\widetilde{A}_1^m = \left\{1 + \frac{|B_{2m}|}{(2m)!}\right\}^{1/2}. \tag{9$''$}$$

Несколько приближенных значений для $\widetilde{A}_1^m$ найдено по формуле (9$''$) с помощью известных таблиц для чисел Бернулли B_{2m} (см. табл.).

Таблица

Константы вложения $\widetilde{A}_1^m$

m	1	2	3	4	5	6
$\widetilde{A}_1^m$	1.04083300	1.00069420	1.00001653	1.00000041	1.00000001	1.00000000

Следствие 2. *При натуральных m имеют место неравенства*

$$1 + \frac{1}{\pi^{2m}2^{2m-1}} < \big(\widetilde{A}_1^m\big)^2 < 1 + \frac{1}{\pi^{2m}(2^{2m-1}-1)}.$$

Указанные неравенства вытекают из оценок [7, с. 608, формула 23.1.15]

$$\frac{1}{\pi^{2m}2^{2m-1}} < \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} < \frac{1}{\pi^{2m}(2^{2m-1}-1)}.$$

В случае произвольной размерности n при $s > n/2$, оставляя в правой части (9) ровно одно слагаемое, соответствующее $j = 1$, получаем соотношения

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 - 1 = \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} \geq \frac{2n}{(2\pi)^{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}}.$$

Отсюда, в частности, вытекает следующая простейшая оценка:

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 > 1 + \frac{2n}{(2\pi)^{2s}}.$$

Функция вложения $u_0(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$, реализующая в оценке (4) точное равенство, представляет собой (с точностью до постоянного слагаемого и скалярного сомножителя) частный случай *обобщенной дзета-функции Эпштейна* [8]:

$$Z_A(p; c, d) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n}{}' \frac{1}{|A\beta - d|^p} e^{i2\pi c\cdot A\beta}. \tag{10}$$

Здесь A — вещественная положительно определенная матрица размера $n \times n$, p — число, c и d — векторы из $\mathbb{R}^n$, а суммирование производится по всевозможным мультииндексам β, представляющим собой узлы n-мерной целочисленной решетки, причем штрих над суммой означает, что любые возникающие в процессе суммирования особенности из суммы исключаются.

Как легко видеть из (6) и (10), имеет место равенство

$$u_0(x) = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} Z_E(2s; x, \mathbf{0})$$

(здесь E — единичная матрица и $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$). В частности, константа вложения и дзета-функция Эпштейна связаны между собой соотношением

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 = 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2s}} Z_E(2s; \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 1 + \frac{\zeta(s; E)}{(2\pi)^{2s}}. \tag{11}$$

Обозначение $\zeta(s; E) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n}{}' |\beta|^{-2s}$ для дзета-функции Эпштейна заимствовано из [9]. Из равенства (11), пользуясь известными свойствами функции $\zeta(s; E)$ (см. [9, 10]), заключаем, что $\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2$ как функция переменной s допускает аналитическое продолжение с множества $s > n/2$ во всю комплексную плоскость, за исключением точки $s = n/2$. Указанное аналитическое продолжение при $s = n/2$ имеет простой полюс с вычетом $\frac{1}{2^n\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}$ (см., например, [10]). Таким образом, в окрестности точки $s = n/2$ имеет место асимптотическое разложение

$$\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2 = \frac{1}{2^n\pi^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{1}{s - n/2} + O(1) \quad \text{при } s \to \frac{n}{2}.$$

Функция $\zeta(s;E)$, как известно (см., например, [9]), удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s;E)=\pi^{s-n/2}\Gamma(n/2-s)\zeta(n/2-s;E).$$

Подставляя сюда соотношение $\zeta(s;E)=(2\pi)^{2s}\big(\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2-1\big)$, получаем функциональное уравнение для $\big(\widetilde{A}_n^s\big)^2$.

В заключение раздела приведем две формулы, упрощающие представление (3) в случае малых размерностей. При $n=2$ формула (3) принимает вид

$$\big(\widetilde{A}_2^s\big)^2=1+\frac{1}{(2\pi)^{2s}}\sum_{(\beta_1,\beta_2)\neq 0}\frac{1}{\big(\beta_1^2+\beta_2^2\big)^s}=1+\frac{4\zeta(s)\beta(s)}{(2\pi)^{2s}}, \tag{12}$$

где $\beta(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{-s}$ — функция Дирихле. Равенство (12) вытекает из соответствующего представления функции $Z_{E_2}(2s;\mathbf{0}_2,\mathbf{0}_2)$, приведенного в [8, с. 7]. Суммы $\beta(s)$ при натуральных s можно вычислить с помощью формул [7, с. 611]

$$\beta(2m+1)=\frac{(\pi/2)^{2m+1}}{2(2m)!}|E_{2m}|,\quad \beta(2m)=\frac{(-1)^m(\pi)^{2m}}{4(2m-1)!}\int\limits_0^1 E_{2m-1}(x)\sec(\pi x)\,dx.$$

Здесь E_{2m} — числа Эйлера, а $E_{2m-1}(x)$ — полиномы Эйлера. В частности, $\beta(1)=\pi/4$, $\beta(3)=\pi^2/32$, $\beta(2)$ — постоянная Каталана: $\beta(2)\approx 0.915965594$.

При $n=4$ формула (3) принимает вид

$$\big(\widetilde{A}_4^s\big)^2=1+\frac{\zeta(s;E_4)}{(2\pi)^{2s}}=1+\frac{8(1-2^{2-s})\zeta(s)\zeta(s-1)}{(2\pi)^{2s}}.$$

Соответствующее выражение для $\zeta(s;E_4)$ приведено в [9, с. 690].

4. Константы вложения в оценках погрешностей

Константы вложения естественным образом возникают в оценках погрешностей вычислительных алгоритмов [3, 4]. Рассмотрим здесь еще один пример использования констант такого рода в оценках приближения периодической функции тригонометрическими полиномами.

Начнем с выбора в $\mathbb{Z}^n$ конечного содержащего начало координат подмножества B из N узловых точек:

$$B\equiv B(N)=\{\beta^{(k)}\mid k=0,1,\dots,N-1\},\quad N\geq 1,\quad \beta^{(0)}=0.$$

Предположим, что при всех N множество $B(N)$ симметрично, т. е. если $\beta\in B(N)$, то и $-\beta\in B(N)$. Это означает, в частности, что N нечетно: $N=2L+1$. Пусть также справедливы вложения $B(2L+1)\subset B(2L+3)$, $L=0,1,2,\dots$.

При выбранном множестве узлов $B(N)$ рассмотрим в $\widetilde{H}^s(Q)$ подпространство $\widetilde{H}_B^s$ функций, ортогональных всем экспонентам вида $e^{-i2\pi\beta x}$, где $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in B(N)$. Ясно, что пространство $\widetilde{H}_B^s$ вложено в $C(\overline{\Omega})$, причем константа $\tilde{a}_n^s(B(N))$ этого вложения не превосходит величины $\widetilde{A}_n^s$.

Константы $\tilde{a}_n^s(B(N))$ естественным образом появляются в оценках погрешности приближения функции $\varphi(x)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ тригонометрическими полиномами.

Поясним это утверждение подробнее. Среди всех тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{\beta \in B(N)} c[\beta] e^{-i2\pi\beta x}$$

существует ближайший к $\varphi(x)$ по норме пространства $\widetilde{H}^s(Q)$. Обозначив его через $\Sigma_N(\varphi \mid x)$, имеем, очевидно, представление

$$\Sigma_N(\varphi \mid x) = \sum_{\beta \in B(N)} c_\varphi[\beta] e^{-i2\pi\beta x},$$

где $c_\varphi[\beta] = \int\limits_Q \varphi(y) e^{i2\pi\beta y}\, dy$ при $\beta \in B(N)$. Если функция $\varphi(x)$ вещественна, то в силу симметричности узлового множества $B(N)$ полином $\Sigma_N(\varphi \mid x)$ также вещественен. Заметим, что $\Sigma_N(\varphi \mid x)$ является тригонометрическим полиномом, ближайшим к $\varphi(x)$ и в норме пространства $\widetilde{L}_2(Q)$.

Рассмотрим приближенную формулу

$$\varphi(x) \approx \Sigma_N(\varphi \mid x) \tag{13}$$

и соответствующий ей *оператор погрешности*, ставящий в соответствие данной непрерывной функции $\varphi = \varphi(y)$ непрерывную же функцию $\varphi(x) - \Sigma_N(\varphi \mid x)$. Условимся значения оператора погрешности обозначать через $l_N(\varphi \mid \cdot)$, т. е. полагаем

$$l_N(\varphi(y) \mid \cdot) = \varphi(\cdot) - \Sigma_N(\varphi \mid \cdot).$$

Оператор l_N, как легко видеть, обращается в нуль на экспонентах $e^{-i2\pi\beta y}$ при $\beta \in B(N)$, в то время как экспоненты $e^{-i2\pi\beta y}$ при $\beta \notin B(N)$ он оставляет на месте:

$$l_N(e^{-i2\pi\beta y} \mid x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \in B(N), \\ e^{-i2\pi\beta x} & \text{при } \beta \notin B(N). \end{cases} \tag{14}$$

Из соотношений (14) сразу же следует, что на подпространстве $\widetilde{H}^s_B$ операторы погрешности и вложения совпадают друг с другом. Тем самым константа вложения $\tilde{a}^s_n(B(N))$ представляет собой норму оператора погрешности l_N из $\widetilde{H}^s_B$ в $C(\overline{\Omega})$. В частности, для погрешности формулы (13) на всем пространстве $\widetilde{H}^s(Q)$ имеют место оценки

$$\sup_{x \in \overline{Q}} |\varphi(x) - \Sigma_N(\varphi \mid x)| \le \tilde{a}^s_n(B(N)) \|\varphi \mid \widetilde{H}^s(Q)\| \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^s(Q).$$

Найдем явные представления констант $\tilde{a}^s_n(B(N))$ в виде сумм кратных рядов.

Теорема 2. *При $N \ge 1$ справедливы равенства*

$$\tilde{a}^s_n(B(N)) = \left\{ \sum_{\beta \notin B(N)} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} \right\}^{1/2}. \tag{15}$$

Доказательство. В соответствии с общим определением норма оператора погрешности l_N из $\widetilde{H}^s_B$ в $C(\overline{\Omega})$ задается соотношением

$$\tilde{a}^s_n(B(N)) \equiv \|l_N\| = \sup_{\|\varphi | \widetilde{H}^s_B\| = 1} (\sup_{x \in \overline{Q}} |l_N(\varphi(y) \mid x)|) = \sup_{x \in \overline{Q}} (\sup_{\|\varphi | \widetilde{H}^s_B\| = 1} |l_N(\varphi(y) \mid x)|).$$

Учитывая, что в силу (14) для любой функции ψ из ортогонального дополнения к подпространству $\widetilde{H}^s_B$ в $\widetilde{H}^s(Q)$ функция $l_N(\psi(y) \mid \cdot)$ тождественно нулевая, для любого x из $\overline{Q}$ получаем равенство

$$\sup_{\|\varphi|\widetilde{H}^s_B\|=1} |l_N(\varphi(y) \mid x)| = \sup_{\|\varphi|\widetilde{H}^s(Q)\|=1} |l_N(\varphi(y) \mid x)|.$$

Подсчитаем точную верхнюю грань в его правой части.

Зафиксировав точку x из Q, заметим, что выражение

$$l_N(\varphi(y) \mid x) = \varphi(x) - \Sigma_N(\varphi \mid x)$$

представляет собой значение линейного *функционала погрешности* $l_N(\cdot \mid x)$ на варьируемом аргументе $\varphi = \varphi(y)$ из $\widetilde{C}(Q)$. Функционал $l_N(\cdot \mid x)$ ограничен на пространстве $\widetilde{C}(Q)$ непрерывных периодических функций, ибо

$$|l_N(\varphi(y) \mid x)| \le |\varphi(x)| + \sum_{k=0}^{N} |c_k(\varphi)| \le (N+1) \sup_{y \in \overline{Q}} |\varphi(y)| \quad \forall \varphi \in \widetilde{C}(Q).$$

Следовательно, функционал $l_N(\cdot \mid x)$ ограничен также и на пространстве $\widetilde{H}^s(Q)$.

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала на гильбертовом пространстве существует единственная функция $u_x(y)$ из $\widetilde{H}^s(Q)$ такая, что

$$l_N(\varphi(y) \mid x) = (\varphi, u_x)_{\widetilde{H}^s} = \int\limits_Q \varphi(y)\, dy \int\limits_Q \bar{u}_x(y)\, dy + \sum_{\beta \ne 0} |2\pi\beta|^{2s} c_\varphi[\beta] \bar{c}_{u_x}[\beta]. \tag{16}$$

При этом имеют место соотношения

$$\|l_N(\cdot \mid x) \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|^2 = l_N(u_x(y) \mid x) = \|u_x(y) \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2.$$

Воспользуемся последним равенством, отыскав прежде функцию $u_x(y)$ в явном виде.

Функционал $l_N(\cdot \mid x)$ точен на тождественно единичной функции, поэтому, как вытекает из (16), $\int\limits_Q u_x(y)\, dy = 0$. Учитывая это, получаем

$$l_N(\varphi(y) \mid x) = \sum_{\beta \ne 0} |2\pi\beta|^{2s} c_\varphi[\beta] \bar{c}_{u_x}[\beta] \quad \forall \varphi(y) \in \widetilde{H}^s(Q).$$

Последовательно выбирая здесь в качестве $\varphi(y)$ тригонометрические функции $\cos 2\pi\beta y$, $\sin 2\pi\beta y$, где $\beta \in \mathbb{Z}^n$, а также пользуясь соотношениями (14), приходим к равенствам

$$|2\pi\beta|^{2s} \int\limits_Q e^{-i2\pi\beta y} \bar{u}_x(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \in B(N), \\ e^{-i2\pi\beta x} & \text{при } \beta \notin B(N). \end{cases}$$

Тем самым имеем следующее разложение функции $u_x(y)$ в ряд Фурье:

$$u_x(y) = \sum_{\beta \notin B(N)} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} e^{i2\pi\beta(x-y)} = \sum_{\beta \notin B(N)} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} e^{i2\pi\beta(y-x)}.$$

Вычисляя квадрат нормы $\|u_x(y) \mid \widetilde{H}^s(Q)\|^2$ по формуле (2), получаем

$$\|l_N(\cdot \mid x) \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\|^2 = \sum_{\beta \notin B(N)} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}}.$$

Таким образом, для константы $\tilde{a}_n^s(B(N))$ справедливо представление

$$\tilde{a}_n^s(B(N)) = \sup_{x\in\overline{Q}} \|l_N(\cdot \mid x) \mid \widetilde{H}^{s*}(Q)\| = \left\{ \sum_{\beta\notin B(N)} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2s}} \right\}^{1/2},$$

т. е. искомое равенство (15) действительно имеет место. $\square$

Пусть $n = 1$ и $N = 2L+1$. Пользуясь представлением (15), заключаем, что минимум констант $\tilde{a}_n^s(B(N))$ по всевозможным узловым множествам $B(2L+1)$ достигается на множестве

$$B_0(2L+1) = \arg\inf \sup_{0\le x\le 1} \|l_N(\cdot \mid x) \mid \widetilde{H}^{s*}\| = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L\}.$$

Взяв $B_0(2L+1)$ в качестве множества узлов, получим равенство

$$\tilde{a}_n^s(B_0(2L+1)) = \left\{ 2 \sum_{k=L+1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^{2s}} \right\}^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Triebel H.* Sampling numbers and embedding constants // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2005. V. 248. P. 275–284.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. *Васкевич В. Л.* О возмущениях погрешности при малых шевелениях весов кубатурной формулы // Вычислит. технологии. 2006. Т 11. Специальный выпуск. С. 19–26.
4. *Васкевич В. Л.* Критерий гарантированной точности вычисления многомерных интегралов // Вычислит. технологии. 2004. Т 9. Специальный выпуск. С. 44–49.
5. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
6. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
7. *Справочник* по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. *Crandall R.* Fast evaluation of Epstein zeta functions // http://people.reed.edu/ crandell/ papers/epstein.pdf. 1998. P. 1–11.
9. *Steuding J.* On the zero-distribution of Epstein zeta functions // Math. Ann. 2005. V. 333. P. 689–697.
10. *Sarnak P., Strömbergsson A.* Minima of Epstein's zeta function and heights of flat tori // Invent. Math. 2006. V. 165. P. 115–151.

Статья поступила 30 мая 2008 г.

Васкевич Владимир Леонтьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vask@math.nsc.ru