

УДК 512.54+512.53

ОБ ИНВЕРСНЫХ МОНОИДАХ КОС И ОТРАЖЕНИЙ ТИПА B

В. В. Вершинин

Аннотация. Хорошо известны связи между группой кос и симметрической группой, между группами кос Артина — Брискорна и группами Кокстера: последние являются фактор-группами групп кос Артина — Брискорна. Инверсный моноид кос аналогичным образом связан с инверсным симметрическим моноидом. В настоящей работе мы показываем, что аналогичные связи существуют между инверсным моноидом кос типа B и инверсным моноидом отражений типа B . Это дает копредставление последнего моноида.

Ключевые слова: коса, инверсный моноид кос, группа отражений типа B , представление, моноид отражений.

Юрию Григорьевичу Решетняку по случаю его 80-летия

1. Введение

Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство ($\dim V = n$) с евклидовой структурой. Пусть W — конечная подгруппа группы $GL(V)$, порожденная отражениями. Мы предполагаем, что W *существенна*, т. е. что множество неподвижных векторов по отношению к действию W состоит только из нуля: $V^W = 0$. Пусть $\mathcal{M}$ — множество гиперплоскостей в пространстве V такое, что группа W порождена ортогональными отражениями по отношению к $M \in \mathcal{M}$. Мы предполагаем, что для каждого элемента $w \in W$ и для каждой гиперплоскости $M \in \mathcal{M}$ гиперплоскость $w(M)$ принадлежит $\mathcal{M}$.

Рассмотрим комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V и комплексификации $M_{\mathbb{C}}$ гиперплоскостей $M \in \mathcal{M}$. Пусть $Y_W = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M_{\mathbb{C}}$. Группа W действует свободно на Y_W . Пусть $X_W = Y_W/W$, тогда Y_W есть накрытие над X_W , соответствующее группе W .

Обобщенная группа кос $Br(W)$, соответствующая группе Кокстера W , определяется как фундаментальная группа пространства X_W регулярных орбит действия W , и соответствующая группа крашенных кос $P(W)$ определяется как фундаментальная группа пространства Y_W . Таким образом, для обобщенных групп кос имеем $Br(W) = \pi_1(X_W)$, $P(W) = \pi_1(Y_W)$. Группы $Br(W)$ были определены Брискорном [1] и называются также *группами кос Артина — Брискорна*. Брискорн [1] и Делинь [2] доказали, что пространства X_W и Y_W суть пространства типа $K(\pi, 1)$.

Накрытие, соответствующее действию группы W на пространстве Y_W , порождает точную последовательность

$$1 \rightarrow \pi_1(Y_W) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X_W) \rightarrow W \rightarrow 1.$$

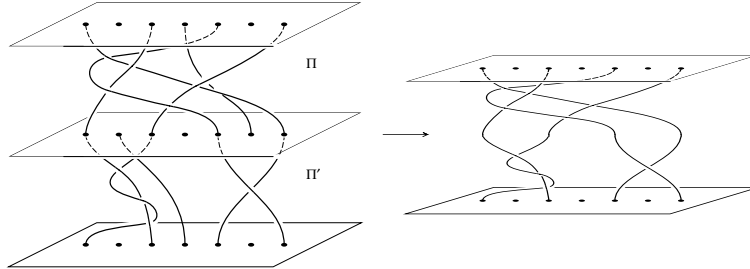


Рис. 1.

Таким образом, имеется естественным образом определенный гомоморфизм

$$\rho : Br(W) \rightarrow W.$$

Геометрическая коса как система n кривых в $\mathbb{R}^3$ естественным образом ведет к понятию частичной косы, у которой некоторые k , $0 \leq k \leq n$, из этих n кривых могут быть удалены; частичные косы образуют *инверсный моноид кос* IB_n [3]. По определению моноид называется *инверсным*, если для любого его элемента a существует единственный элемент b (называемый *обратным*) такой, что $a = aba$ и $b = bab$. Это понятие введено В. В. Вагнером в 1952 г. [4]. Книги [5, 6] являются стандартными ссылками по теории инверсных полугрупп.

Умножение частичных кос показано на рис. 1. На конечной стадии удаляются все неполные нити, т. е. те, которые не имеют пересечений либо с верхней, либо с нижней полуплоскостью.

Таким образом, классическая группа кос (которая соответствует случаю $W = \Sigma_n$, симметрической группы) вложена в инверсный моноид кос IB_n .

Наиболее важным примером инверсного моноида является моноид частичных (т. е. определенных на подмножестве) инъективных отображений множества в себя. Для конечного множества это приводит к понятию *симметрического инверсного моноида* I_n , которое обобщает и включает классическую симметрическую группу Σ_n . Копредставление симметрического инверсного моноида получено Л. М. Поповой [7], см. также формулы (2)–(4) ниже.

Пусть теперь W — группа Кокстера типа B_n . Соответствующий инверсный моноид $IB(B_n)$ изучался в [8], а моноид отражений $I(B_n)$ — в [9].

Цель настоящей заметки — показать, что в случае типа B ситуация во многом схожая: существует отображение $\rho_B : IB(B_n) \rightarrow I(B_n)$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Br(B_n) & \longrightarrow & W(B_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ IB(B_n) & \xrightarrow{\rho_B} & I(B_n), \end{array} \quad (1)$$

где вертикальные стрелки обозначают вложение группы обратимых элементов в моноид.

2. Инверсный моноид кос и тип B

Пусть N — конечное множество мощности n , скажем $N = \{v_1, \dots, v_n\}$. Инверсный симметрический моноид I_n может быть интерпретирован как моноид

частичных мономорфизмов множества N в себя. Оснастим элементы множества N знаками, т. е. пусть $SN = \{\delta_1 v_1, \dots, \delta_n v_n\}$, где $\delta_i = \pm 1$. Группа Вейля $W(B_n)$ типа B может быть интерпретирована как группа перестановок со знаками множества SN :

$$W(B_n) = \{\sigma - \text{биекция } SN : (-x)\sigma = -(x)\sigma \text{ для } x \in SN\}.$$

Моноид *частичных перестановок со знаками* $I(B_n)$ определяется следующим образом: $I(B_n) = \{\sigma - \text{частичная биекция } SN : (-x)\sigma = -(x)\sigma \text{ для } x \in SN \text{ и } x \in \text{dom } \sigma \text{ тогда и только тогда, когда } -x \in \text{dom } \sigma\}$, где $\text{dom } \sigma$ означает область определения мономорфизма σ .

Напомним, что моноид M *факторизуем*, если $M = EG$, где E — множество идемпотентов моноида M , а G — подгруппа моноида M . Очевидным образом моноид $I(B_n)$ факторизуем [9], так как каждая частичная перестановка, учитывающая знаки, может быть продолжена до элемента группы единиц моноида $I(B_n)$, т. е. до перестановки, учитывающей знаки с областью определения, равной SN .

Обычно группа кос Br_n задается следующим копредставлением Артина [10]. Оно имеет образующие σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, и два типа соотношений:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ если } |i - j| > 1, \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (2)$$

Следующее копредставление инверсного моноида кос было получено в [3]. Оно имеет образующие σ_i, σ_i^{-1} , $i = 1, \dots, n-1$, ϵ , и соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1, \text{ для всех } i, \quad \epsilon \sigma_i = \sigma_i \epsilon \text{ для } i \geq 2, \\ \epsilon \sigma_1 \epsilon = \sigma_1 \epsilon \sigma_1 \epsilon = \epsilon \sigma_1 \epsilon \sigma_1, \quad \epsilon = \epsilon^2 = \epsilon \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \epsilon \end{aligned} \quad (3)$$

плюс соотношения кос (2).

Геометрически образующая ϵ обозначает частичную косу, построенную из тривиальной косы удалением первой нити.

Если заменим первое соотношение в (3) следующим набором соотношений:

$$\sigma_i^2 = 1 \text{ для всех } i, \quad (4)$$

и удалим лишние соотношения $\epsilon = \epsilon \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \epsilon$, то получим копредставление симметрического инверсного моноида I_n [7]. Мы можем также просто добавить соотношения (7), если нас не беспокоит наличие излишних соотношений. Получаем канонический гомоморфизм [3]

$$\rho_n : IB_n \rightarrow I_n,$$

который является естественным продолжением соответствующего гомоморфизма для групп (кос и симметрической).

Более сбалансированный набор соотношений для инверсного моноида кос получен в [11]. Пусть ϵ_i — тривиальная коса с удаленной i -й нитью, т. е. $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_{i+1} = \sigma_i^{\pm 1} \epsilon_i \sigma_i^{\pm 1}$. Таким образом, в качестве образующих берем σ_i, σ_i^{-1} , $i = 1, \dots, n-1$, ϵ_i , $i = 1, \dots, n$, а соотношениями являются следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1 \text{ для всех } i, \quad \epsilon_j \sigma_i = \sigma_i \epsilon_j \text{ для } j \neq i, i+1, \\ \epsilon_i \sigma_i = \sigma_i \epsilon_{i+1}, \quad \epsilon_{i+1} \sigma_i = \sigma_i \epsilon_i, \quad \epsilon_i = \epsilon_i^2, \\ \epsilon_{i+1} \sigma_i^2 = \sigma_i^2 \epsilon_{i+1} = \epsilon_{i+1}, \quad \epsilon_i \epsilon_{i+1} \sigma_i = \sigma_i \epsilon_i \epsilon_{i+1} = \epsilon_i \epsilon_{i+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

плюс соотношения кос (2).

Пусть EF_n — некоторый моноид частичных изоморфизмов свободной группы F_n , определенный следующим образом. Пусть a — элемент симметрического инверсного моноида I_n , $a \in I_n$, т. е. a — частичный изоморфизм множества $\{1, \dots, n\}$. Пусть $J_k = \{j_1, \dots, j_k\}$ — образ a и элементы $i_1, \dots, i_k$, принадлежат области определения a . Моноид EF_n состоит из изоморфизмов

$$\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle \rightarrow \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle,$$

выражаемых формулой $f_a : x_i \mapsto w_i^{-1} x_{a(i)} w_i$, если i принадлежит множеству $i_1, \dots, i_k$, и отображение f_a не определено на x_i в противном случае, а w_i — слово из букв $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$. Композиция f_a и g_b , $a, b \in I_n$, определена для x_i , принадлежащего области определения $a \circ b$. Положим $x_{j_m} = 1$ в слове w_i , если x_{j_m} не принадлежит области определения g_b . Если положим $w_i = 1$, то получаем вложение I_n в EF_n . Отображая каждый $f_a \in EF_n$ в $a \in I_n$, получаем гомоморфизм $EF_n \rightarrow I_n$.

Предложение 1. Канонические гомоморфизмы $I_n \rightarrow EF_n$ и $EF_n \rightarrow I_n$ дают следующее расщепление $I_n \rightarrow EF_n \rightarrow I_n$. $\square$

Напомним, что группы кос Артина — Брискорна типа B изоморфны группам кос диска с фиксированной точкой [12–14]. По отношению к классической группе кос эта группа имеет одну дополнительную образующую τ и соотношения типа B :

$$\begin{aligned} \tau \sigma_1 \tau \sigma_1 &= \sigma_1 \tau \sigma_1 \tau, & \tau \sigma_i &= \sigma_i \tau, \text{ если } i > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \text{ если } |i - j| > 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Моноид $IB(B_n)$ частичных кос типа B можно также рассматривать как подмоноид моноида IB_{n+1} , состоящий из частичных кос с фиксированной первой нитью. Интерпретация как моноида классов изотопии гомеоморфизмов также возможна. Как обычно, рассмотрим диск D^2 с данными $n + 1$ точками. Обозначим множество этих точек через Q_{n+1} . Рассмотрим гомеоморфизмы диска D^2 на копию этого диска с условием, что первая точка всегда отображается на себя и среди остальных n точек только k точек, $k \leq n$ (скажем $i_1, \dots, i_k$), отображаются биективно на k точек (скажем $j_1, \dots, j_k$) из множества Q_{n+1} (без первой точки) второй копии диска D^2 . Классы изотопии таких гомеоморфизмов образуют моноид $IB(B_n)$.

Теорема 1 [8]. Добавление к копредставлению группы кос типа B (6) образующей ϵ и соотношений

$$\begin{aligned} \tau \tau^{-1} &= \tau^{-1} \tau = 1, & \sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1 \text{ для всех } i, & \epsilon \sigma_i &= \sigma_i \epsilon \text{ для } i \geq 2, \\ \epsilon \sigma_1 \epsilon &= \sigma_1 \epsilon \sigma_1 \epsilon, & \epsilon &= \epsilon^2 = \epsilon \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \epsilon, & \epsilon \tau &= \tau \epsilon = \epsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

даёт копредставление моноида $IB(B_n)$. Добавление к копредставлению (5) моноида IB_n одной образующей τ , соотношений типа B (6) и соотношений

$$\tau \tau^{-1} = \tau^{-1} \tau = 1, \quad \epsilon_1 \tau = \tau \epsilon_1 = \epsilon_1.$$

приводит к другому копредставлению моноида $IB(B_n)$. Это факторизуемый инверсный моноид.

Определим действие моноида $IB(B_n)$ на множестве SNc помощью частичных изоморфизмов следующим образом:

$$\sigma_i(\delta_j v_j) = \begin{cases} \delta_i v_{i+1}, & \text{если } j = i, \\ \delta_{i+1} v_i, & \text{если } j = i + 1, \\ \delta_j v_j, & \text{если } j \neq i, i + 1; \end{cases} \quad (8)$$

$$\tau(\delta_j v_j) = \begin{cases} -\delta_1 v_1, & \text{если } j = 1, \\ \delta_j v_j, & \text{если } j \neq 1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{dom } \epsilon = \{\delta_2 v_2, \dots, \delta_n v_n\}; \quad (10)$$

$$\epsilon(\delta_j v_j) = \delta_j v_j, \quad \text{если } j = 2, \dots, n; \quad (11)$$

$$\text{dom } \epsilon_i = \{\delta_1 v_1, \dots, \widehat{\delta_i v_i}, \dots, \delta_n v_n\}; \quad (12)$$

$$\epsilon_i(\delta_j v_j) = \delta_j v_j, \quad \text{если } j = 1, \dots, \widehat{i}, \dots, n. \quad (13)$$

Прямая проверка показывает, что соотношения инверсного моноида кос типа B выполнены для соответствующих суперпозиций частичных изоморфизмов, определяемых элементами σ_i , τ и ϵ_i .

Теорема 2. Действие, заданное формулами (8)–(13), определяет гомоморфизм инверсных моноидов $\rho_B : IB(B_n) \rightarrow I(B_n)$ такой, что диаграмма (1) коммутативна. $\square$

Теорема 3. Гомоморфизм $\rho_B : IB(B_n) \rightarrow I(B_n)$ является эпиморфизмом. Если в копредставлении $IB(B_n)$ заменить первое соотношение из (3) набором соотношений $\sigma_i^2 = 1$ для всех i и удалить излишние соотношения $\epsilon = \epsilon \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \epsilon$, а также заменить первое соотношение из (7) соотношением $\tau^2 = 1$, то получается копредставление моноида $I(B_n)$,

Доказательство. Обозначим временно через IV_n моноид, имеющий копредставление, данное в формулировке теоремы. Для доказательства того, что гомоморфизм ρ_B есть эпиморфизм, используем тот факт, что моноид $I(B_n)$ факторизуем, так что каждый его элемент может быть записан в виде ϵg , где ϵ принадлежит множеству идемпотентов, а g — элемент группы Вейля $W(B_n)$ типа B . Для группы Вейля гомоморфизм ρ_B есть эпиморфизм, $W(B_k) = Br(B_k)/P(B_k)$, множества идемпотентов моноидов $IB(B_n)$ и $I(B_n)$ совпадают и гомоморфизм ρ_B , ограниченный на множество $E(IB(B_n))$ идемпотентных элементов моноида $IB(B_n)$, тождествен.

Как следует из определения действия моноида $IB(B_n)$ на множестве SN , элементы τ^2 и σ_i^2 отображаются в единицу под действием гомоморфизма ρ_B . Таким образом, гомоморфизм ρ_B разлагается с помощью гомоморфизма $\tilde{\rho}_B : IV_n \rightarrow I(B_n)$ в следующую композицию: $\rho_B : IB(B_n) \rightarrow IV_n \rightarrow I(B_n)$. Чтобы показать, что $\tilde{\rho}_B$ есть изоморфизм, сравниваем мощности множеств IV_n и $I(B_n)$. Легко посчитать, что мощность (число элементов) множества $I(B_n)$ равна

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}^2 k!.$$

Пусть $\epsilon_{k+1,n}$ обозначает частичную косу с тривиальными первыми k нитями и отсутствующими остальными $n - k$ нитями. Она может быть выражена с использованием образующей ϵ или образующих ϵ_i следующим образом:

$$\epsilon_{k+1,n} = \epsilon \sigma_{n-1} \dots \sigma_{k+1} \epsilon \sigma_{n-1} \dots \sigma_{k+2} \epsilon \dots \epsilon \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \epsilon \sigma_{n-1} \epsilon,$$

$$\epsilon_{k+1,n} = \epsilon_{k+1} \epsilon_{k+2} \dots \epsilon_n.$$

Как доказано в [3], каждая частичная коса имеет представителя вида

$$\sigma_{i_1} \dots \sigma_1 \dots \sigma_{i_k} \dots \sigma_k \epsilon_{k+1,n} x \epsilon_{k+1,n} \sigma_k \dots \sigma_{j_k} \dots \sigma_1 \dots \sigma_{j_1},$$

$$k \in \{0, \dots, n\}, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1 \quad \text{и} \quad 0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n-1,$$

где $x \in Br_k$. То же самое верно и для $IB(B_n)$, где $x \in Br(B_k)$. Элементы τ^2 и σ_i^2 отображаются в 1 под действием ρ_B так, что все представители какого-либо класса эквивалентности по модулю группы крашенных кос типа B_k отображаются в тот же самый элемент моноида $I(B_n)$. Эти классы эквивалентности образуют группу Вейля $W(B_k)$. Порядок группы Вейля типа B_k равен $2^k k!$. Таким образом, множество мощности, меньшей или равной $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}^2 k!$, отображается эпиморфно на множество в точности этой мощности. Это означает, что эпиморфизм $\bar{\rho}_B$ есть изоморфизм. $\square$

Пусть $\mathcal{E}$ — моноид, порожденный единственной идемпотентной образующей ϵ .

Предложение 2. Абеленизация $\text{Ab}(IBB_n)$ моноида $IB(B_n)$ изоморфна моноиду $\mathcal{E} \oplus \mathbb{Z}^2$, профакторизованному по соотношениям $\epsilon + \tau = \epsilon$, $\epsilon + \sigma = \epsilon$, где τ и σ суть образующие $\mathbb{Z}^2$. Канонический гомоморфизм абеленизации $a : IB(B_n) \rightarrow \text{Ab}(IB(B_n))$ задается по формулам $a(\epsilon_i) = \epsilon$, $a(\tau) = \tau$, $a(\sigma_i) = \sigma$. Канонический гомоморфизм из $\text{Ab}(IB(B_n))$ в $\text{Ab}(I(B_n))$ состоит из факторизации $\mathbb{Z}^2$ по модулю 2. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Brieskorn E. Sur les groupes de tresses [d'après V. I. Arnol'd]. (French) // Séminaire Bourbaki, 24ème année. 1971/1972. N 401. P. 21–44. Berlin: Springer-Verl., 1973. (Lecture Notes Math.; V. 317).
2. Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 273–302.
3. Easdown D., Lavers T. G. The inverse braid monoid // Adv. Math. 2004. V. 186, N 2. P. 438–455.
4. Вагнер В. В. Обобщенные группы // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84, № 6. С. 1119–1122.
5. Petrich M. Inverse semigroups. New York: John Wiley & Sons, 1984. (Pure Appl. Math. (New York). A Wiley-Intersci. Publ.).
6. Lawson M. V. Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. River Edge, NJ: World Sci. Publ. Co., Inc., 1998.
7. Попова Л. И. Определяющие соотношения некоторых полугрупп частичных преобразований конечного множества // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1961. № 218. С. 191–212.
8. Vershinin V. V. On the inverse braid monoid // Topology Appl. 2009. V. 156, N 6. P. 1153–1166.
9. Everitt B., Fountain J. Partial mirror symmetry. I: reflection monoids. 22 pages. arXiv:math/0701313
10. Artin E. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1925. Bd 4. S. 47–72.
11. Gilbert N. D. Presentations of the inverse braid monoid // J. Knot Theory Ramifications. 2006. V. 15, N 5. P. 571–588.
12. Lambropoulou S. Solid torus links and Hecke algebras of B -type // Proc. conf. on quantum topology, Manhattan, KS, 1993. River Edge, NJ: World Sci. Publ. Co., Inc., 1994. P. 225–245.
13. Вершинин В. В. О группах кос в телах с ручками // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 755–764.
14. Вершинин В. В. Группы кос и пространства петель // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 2. С. 3–84.

Статья поступила 21 февраля 2009 г.

Вершинин Владимир Валентинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
versh@math.nsc.ru, vershini@math.univ-montp2.fr