Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 519.21

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В ПОЛОСЕ

В. И. Лотов

Аннотация. Найдены факторизационные представления для производящей функции совместного распределения времени, проведенного траекторией случайного блуждания за конечное число шагов в полосе и в полуплоскости, и положения блуждающей частицы в последний момент времени.

Ключевые слова: случайное блуждание, время пребывания в полосе, факторизационные тождества.

Пусть $\{X_n,\ n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Для произвольного борелевского множества $D \subset R$ введем

$$T_n = T_n(D) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k \in D\}},$$

где $I_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $I_A(\omega) = 0$ в противном случае; T_n есть число точек k, $1 \leq k \leq n$, таких, что $S_k \in D$.

Задача состоит в изучении совместного распределения $\mathbf{P}(T_n = k, S_n \in A)$.

Мы не будем касаться обзора многочисленных работ, посвященных ситуации $D = (0, \infty)$ и связанного с ней закона арксинуса (см. по этому поводу, например, [1]). Наибольший интерес для нас представляет случай конечного интервала $D = [a, b]$, а также множеств вида $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$. Далее везде предполагается, что $a \leq 0 \leq b$, хотя это не принципиально ввиду очевидного соотношения $T_n(D) = n - T_n(\overline{D})$. Отметим, что предельное распределение для $T_n([a, b])$ при $n \to \infty$ и при фиксированных a и b хорошо известно (см. [2, 3]). В этой же ситуации в [4] получены асимптотические разложения вероятностей $\mathbf{P}(T_n = k)$, $\mathbf{P}(T_n \geq k)$ при $n \to \infty$ и при различных ограничениях на скорость роста $k = k(n)$ в следующих предположениях:

1) X_n принимает только целочисленные значения;

2) выполнено условие Крамера: $\mathbf{E}|t|^{X_1} < \infty$ для $1 - \delta < |t| < 1 + \delta$, $\delta > 0$.

Основная идея работы [4] состоит в следующем. Случайная величина T_n представляется в виде

$$T_n = \min\{k \geq 1 : Y_1 + \ldots + Y_k > n\} - 1,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00962) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3695.2008.1).

где $Y_1, Y_1 + Y_2, \dots$ — последовательные моменты времени, когда блуждающая частица пребывает в $[a, b]$. Случайные величины $Y_1, Y_2, \dots$ не являются одинаково распределенными: распределение интервала времени, требуемого для перехода из точки $i \in [a, b]$ в точку $j \in [a, b]$, зависит от i, j. По этой причине задача сводится к рассмотрению случайного блуждания, определенного на цепи Маркова с множеством состояний $\mathscr{X} = \{a, a+1, \dots, b\}$. Использование этого подхода приводит к необходимости знать распределение случайных величин Y_k, что является весьма сложной задачей, которая не затрагивалась в [4]. Асимптотические разложения в [4] получены применением факторизационного метода, в своих общих чертах состоящего из нескольких этапов. На первом этапе строятся факторизационные представления для двойных (или даже тройных) преобразований Лапласа — Стилтьеса над искомыми распределениями. Для случайного блуждания, определенного на цепи Маркова с множеством состояний $\mathscr{X}$, размерность участвующих в факторизации матриц равна $b - a + 1$, что сильно усложняет дальнейшее исследование вероятностей.

Позже в [5] было найдено некоторое альтернативное факторизационное матричное представление для производящей функции пары (T_n, S_n) в случае конечного интервала D. Впрочем оказалось, что процесс его вычисления весьма сложен даже для полунепрерывных случайных блужданий (см. [6]).

По этой причине в качестве первого этапа мы ставим задачу нахождения производящей функции искомого распределения без использования матричной факторизации.

Для переменных $|z| < 1, |uz| < 1, \operatorname{Re}\lambda = 0$ введем функции $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1}$,

$$Q_0(z, u, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \int_{D} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

$$Q(z, u, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \int_{\overline{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx).$$

Теорема 1. *Для произвольного борелевского множества $D \subset R$ и для указанных значений переменных u, z и λ имеет место тождество*

$$uQ(z, u, \lambda)(1 - z\varphi(\lambda)) + (1 + Q_0(z, u, \lambda))(1 - zu\varphi(\lambda)) = 1. \tag{1}$$

Доказательство. Для всякой траектории, заканчивающейся в момент времени n и удовлетворяющей свойству $\{T_n = k\}$, добавим еще один скачок случайного блуждания. Тогда в момент времени $n+1$ блуждающая частица либо окажется вне множества D и в этом случае $T_{n+1} = T_n = k$, либо $S_{n+1} \in D$ и, следовательно, $T_{n+1} = k + 1$. В терминах преобразований Лапласа — Стилтьеса это будет выглядеть так:

$$\varphi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx)$$
$$= \int_{D} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_{n+1} = k+1, S_{n+1} \in dx) + \int_{\overline{D}} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_{n+1} = k, S_{n+1} \in dx).$$

Умножим это равенство на $u^{k+1}z^{n+1}$ и просуммируем по k от 0 до n и по n от 1 до бесконечности. Тогда

$$zu\varphi(\lambda)(Q_0(z,u,\lambda)+Q(z,u,\lambda))=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}\int\limits_{D} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_{n+1}=k+1, S_{n+1}\in dx)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}\int\limits_{\overline{D}} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_{n+1}=k, S_{n+1}\in dx)$$

$$=\sum_{m=2}^{\infty} z^{m}\sum_{i=1}^{m} u^{i}\int\limits_{D} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_{m}=i, S_{m}\in dx)$$

$$+\,u\sum_{m=2}^{\infty} z^{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k}\int\limits_{\overline{D}} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_{m}=k, S_{m}\in dx).$$

Воспользовавшись тем, что $\mathbf{P}(T_m=0, S_m\in A)=0$ при $A\subset D$ и $\mathbf{P}(T_m=m, S_m\in A)=0$ при $A\subset \overline{D}$, заменим в правой части $\sum\limits_{i=1}^{m}$ на $\sum\limits_{i=0}^{m}$ и $\sum\limits_{k=0}^{m-1}$ на $\sum\limits_{k=0}^{m}$. Таким образом,

$$zu\varphi(\lambda)(Q_0(z,u,\lambda)+Q(z,u,\lambda)) = Q_0(z,u,\lambda) - zu\int\limits_{D} e^{\lambda x}\mathbf{P}(X_1\in dx)$$

$$+\,u\Bigg(Q(z,u,\lambda) - z\int\limits_{\overline{D}} e^{\lambda x}\mathbf{P}(X_1\in dx)\Bigg) = Q_0(z,u,\lambda)+uQ(z,u,\lambda)-zu\varphi(\lambda),$$

что совпадает с утверждением теоремы. Теорема доказана.

Из тождества (1) сразу следует, что

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} z^n\mathbf{E}(u^{T_n(D)}e^{\lambda S_n}) = 1+Q(z,u,\lambda)+Q_0(z,u,\lambda)$$

$$= (1-zu\varphi(\lambda))^{-1}(1+(1-u)Q(z,u,\lambda)). \quad (2)$$

Стало быть, для нахождения стоящего в левой части (2) тройного преобразования над распределением пары (T_n, S_n) достаточно найти функцию $Q(z,u,\lambda)$.

Предположим теперь, что $D=[a,b]$ при некоторых $a\le b$, и пусть

$$Q(z,u,\lambda)=Q_1(z,u,\lambda)+Q_2(z,u,\lambda),$$

где

$$Q_1(z,u,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n\sum_{k=0}^{n} u^k\int\limits_{(-\infty,a)} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_n=k, S_n\in dx),$$

$$Q_2(z,u,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n\sum_{k=0}^{n} u^k\int\limits_{(b,\infty)} e^{\lambda x}\mathbf{P}(T_n=k, S_n\in dx).$$

Займемся нахождением функций $Q_i(z,u,\lambda)$, $i=1,2$.

Введем лестничные моменты $\eta_\pm$ и лестничные высоты $\chi_\pm$:

$$\eta_- = \inf\{n\ge 1: S_n<0\},\quad \eta_+=\inf\{n\ge 1: S_n>0\},\quad \chi_\pm = S_{\eta_\pm}.$$

Здесь полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n \le 0$ при всех n, и $\eta_- = \infty$, если $S_n \ge 0$ при всех n. На событиях $\{\eta_\pm = \infty\}$ величины $\chi_\pm$ будем считать неопределенными.

Пусть при $|z| \le 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$R_\pm(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_\pm}\exp\{\lambda\chi_\pm\}; \eta_\pm < \infty).$$

Эти функции являются компонентами известной факторизации (см., например, [7])

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_+(z,\lambda)R_-(z,\lambda)R_0(z), \tag{3}$$

где

$$R_0(z) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{P}(S_n = 0)\right\}.$$

Известно также, что при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ справедливы представления

$$R_-(z,\lambda) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0)\right\},$$

$$R_+(z,\lambda) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0)\right\}.$$

Перегруппируем слагаемые в (1) так, чтобы привести это тождество к виду

$$(1 + (1-u)Q(z,u,\lambda))(1 - z\varphi(\lambda)) = \left(1 + \frac{u-1}{u}Q_0(z,u,\lambda)\right)(1 - zu\varphi(\lambda)),$$

и воспользуемся факторизацией функций $1 - z\varphi(\lambda)$ и $1 - zu\varphi(\lambda)$, принимая во внимание, что $R_\pm(z,\lambda) \ne 0$ при $|z| < 1$:

$$\frac{(1 + (1-u)(Q_1(z,u,\lambda) + Q_2(z,u,\lambda)))R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)} = \left(1 + \frac{u-1}{u}Q_0(z,u,\lambda)\right)\frac{R_-(zu,\lambda)R_0(zu)}{R_-(z,\lambda)R_0(z)}. \tag{4}$$

Будем в дальнейшем писать $g(\lambda) \in S(A)$, если при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int\limits_A e^{\lambda x}dG(x), \quad \text{где} \int\limits_A |dG(x)| < \infty.$$

Кроме того, будет использоваться обозначение

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}dG(x)\right]^A = \int\limits_A e^{\lambda x}dG(x).$$

Очевидно, для функций переменной λ из (2) выполняются соотношения

$$R_+^{\pm1}(z,\lambda) \in S([0,\infty)), \quad R_-^{\pm1}(z,\lambda) \in S((-\infty,0]),$$

$$1 + \frac{u-1}{u}Q_0(z,u,\lambda) \in S(\{0\} \cup D),$$

$$Q_1(z,u,\lambda) \in S((-\infty,a)), \quad Q_2(z,u,\lambda) \in S((b,\infty)).$$

Поэтому при $a \le 0 \le b$

$$\left[\left(1 + \frac{u-1}{u} Q_0(z,u,\lambda)\right) \frac{R_-(zu,\lambda) R_0(zu)}{R_-(z,\lambda) R_0(z)}\right]^{(b,\infty)} \equiv 0,$$

$$\left[\frac{Q_2(z,u,\lambda) R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)}\right]^{(b,\infty)} = \frac{Q_2(z,u,\lambda) R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)},$$

$$\left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)}\right]^{(b,\infty)} + (1-u) \left[\frac{Q_1(z,u,\lambda) R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)}\right]^{(b,\infty)} + (1-u) \frac{Q_2(z,u,\lambda) R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} Q_2(z,u,\lambda) = {} & \frac{R_+(zu,\lambda)}{(u-1) R_+(z,\lambda)} \left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)}\right]^{(b,\infty)} \\ & - \frac{R_+(zu,\lambda)}{R_+(z,\lambda)} \left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(zu,\lambda)} Q_1(z,u,\lambda)\right]^{(b,\infty)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть для краткости $s = zu$. Для всякой функции g вида

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dG(x), \quad \text{где} \int_{-\infty}^{\infty} |dG(x)| < \infty,$$

определим операторы $L_\pm$, которые действуют следующим образом:

$$(L_+ g)(z,s,\lambda) = \frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)} \left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)} g(\lambda)\right]^{(b,\infty)},$$

$$(L_- g)(z,s,\lambda) = \frac{R_-(s,\lambda)}{R_-(z,\lambda)} \left[\frac{R_-(z,\lambda)}{R_-(s,\lambda)} g(\lambda)\right]^{(-\infty,a)}.$$

Введенные таким образом операторы сами зависят от z и s, однако для краткости записи мы не отражаем этот факт в обозначениях операторов. Кроме переменной λ функция g также может зависеть от переменных z и s, чаще всего именно эта ситуация будет встречаться в дальнейшем изложении.

Обозначив $h(\lambda) \equiv (u-1)^{-1}$, соотношение (5) перепишем так:

$$Q_2(z,u,\lambda) = (L_+ h)(z,s,\lambda) - (L_+ Q_1)(z,s,\lambda).$$

Симметричные рассуждения приводят к тождеству

$$Q_1(z,u,\lambda) = (L_- h)(z,s,\lambda) - (L_- Q_2)(z,s,\lambda),$$

откуда получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $D = [a,b]$, $a \le 0 \le b$. Тогда при $|z| < 1$, $|uz| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $s = zu$ справедливы следующие представления:*

$$\begin{aligned} Q_1(z,u,\lambda) &= (L_- h)(z,s,\lambda) - (L_- L_+ h)(z,s,\lambda) + (L_- L_+ Q_1)(z,s,\lambda), \\ Q_2(z,u,\lambda) &= (L_+ h)(z,s,\lambda) - (L_+ L_- h)(z,s,\lambda) + (L_+ L_- Q_2)(z,s,\lambda). \end{aligned} \tag{6}$$

Следствие 1. *Для $D = [a,\infty)$, $a \le 0$, имеем*

$$Q_1(z,u,\lambda) = (L_- h)(z,s,\lambda) \tag{7}$$

и аналогично для $D = (-\infty,b]$, $b \ge 0$, —

$$Q_2(z,u,\lambda) = (L_+ h)(z,s,\lambda). \tag{8}$$

Применяя (2), немедленно получаем

Следствие 2. *Если* $D = [a, \infty)$, $a \le 0$, *то*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{1 + (1-u)(L_- h)(z,s,\lambda)}{1 - s\varphi(\lambda)}. \tag{9}$$

Если $D = (-\infty, b]$, $b \ge 0$, *то*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{1 + (1-u)(L_+ h)(z,s,\lambda)}{1 - s\varphi(\lambda)}. \tag{10}$$

Заметим, что

$$(u-1)(L_+ h)(z,s,\lambda) = 1 - \frac{R_+(s,\lambda)}{R_+(z,\lambda)} \left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)}\right]^{[0,b]}$$

и, следовательно, для $D = (-\infty, b]$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{R_+(s,\lambda)}{(1 - s\varphi(\lambda))R_+(z,\lambda)} \left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)}\right]^{[0,b]}.$$

Ясно, что нахождение последнего множителя в правой части этого равенства в общем случае сопряжено с трудностями. Однако вычисление оператора L_+ сильно упрощается, если $b = 0$. Действительно, в этом частном случае

$$\left[\frac{R_+(z,\lambda)}{R_+(s,\lambda)}\right]^{\{0\}} = 1$$

и, следовательно, для $D = (-\infty, 0]$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{R_+(s,\lambda)}{(1 - s\varphi(\lambda))R_+(z,\lambda)}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{n - T_n(\overline{D})} e^{\lambda S_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n(\overline{D})} e^{\lambda S_n}),$$

где обозначено $v = u^{-1}$, т. е. для $\overline{D} = (0, \infty)$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n(\overline{D})} e^{\lambda S_n}) = \frac{R_+(s,\lambda)}{(1 - s\varphi(\lambda))R_+(sv,\lambda)} = \frac{1}{R_0(s) R_-(s,\lambda) R_+(sv,\lambda)}.$$

Этот результат содержится в [1].

Вычисление выражений вида $(L_\pm g)(z,s,\lambda)$ для произвольных значений a и b производится весьма просто в случае, когда соответствующая компонента факторизации является дробно-линейной функцией. Приведем необходимые утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция* g *имеет вид*

$$g(\lambda) = \int_c^{\infty} e^{\lambda t} dG(t), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad \operatorname{Var} G < \infty, \quad c \ge a.$$

Тогда для любого $\beta < 0$

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(-\infty,a)} = g(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)a}}{\lambda-\beta}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(-\infty,a)} = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\left(\int\limits_{\max(c,t)}^{\infty} e^{-\beta(t-y)}\,dG(y)\right)dt\right]^{(-\infty,a)}$$
$$= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda-\beta)t}\,dt \int\limits_{\max(c,t)}^{\infty} e^{\beta y}dG(y)\right]^{(-\infty,a)} = g(\beta)\int\limits_{-\infty}^{a} e^{(\lambda-\beta)t}\,dt.$$

Аналогично устанавливается следующий факт.

Лемма 2. *Пусть функция g имеет вид*

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{c} e^{\lambda t}dG(t), \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad \operatorname{Var} G < \infty, \quad c \le b.$$

Тогда для любого $\beta > 0$

$$\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\beta}\right]^{(b,\infty)} = g(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)b}}{\lambda-\beta}.$$

Предположим, что

$$\mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha t}, \quad t < 0. \tag{11}$$

В этом случае

$$\varphi(\lambda) = \frac{c}{\lambda+\alpha} + \int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda t}d\mathbf{P}(X_1 < t)$$

и нетрудно видеть, что при $|z| < 1$ и достаточно больших R имеет место неравенство $|z\varphi(\lambda)| < 1$ для всех значений λ, лежащих на контуре

$$\Gamma = \{\lambda : |\lambda| = R, \operatorname{Re}\lambda < 0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = 0, |\lambda| \le R\}.$$

Это значит, что при обходе по контуру Γ функция $1 - z\varphi(\lambda)$ не получает приращения аргумента. Следовательно, в силу известного принципа аргумента эта функция имеет одинаковое число нулей и полюсов внутри Γ при больших значениях R. Полюс там один в точке $\lambda = -\alpha$, значит, и нуль будет единственным. Обозначим его через $\lambda_-(z)$. Теперь мы можем записать

$$1 - z\varphi(\lambda) = \frac{(1 - z\varphi(\lambda))(\lambda+\alpha)}{\lambda-\lambda_-(z)}\frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\alpha}.$$

Функция $(1-z\varphi(\lambda))(\lambda+\alpha)(\lambda-\lambda_-(z))^{-1}$ как функция переменной λ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывна, ограничена и не обращается в нуль в замыкании этого множества. Аналогичными свойствами в правой полуплоскости обладает функция $(\lambda-\lambda_-(z))(\lambda+\alpha)^{-1}$. В силу известных свойств единственности факторизации (3) можно положить

$$R_+(z,\lambda)=C\frac{(1-z\varphi(\lambda))(\lambda+\alpha)}{\lambda-\lambda_-(z)},\quad R_-(z,\lambda)=C^{-1}\frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\alpha}.$$

Из (3) следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}R_-(z,\lambda)=1$, поэтому $C=C(z)\equiv 1$, хотя значение константы C можно было и не уточнять: она сократится при вычислении выражений вида $(L_\pm g)(z,s,\lambda)$.

Итак, в силу леммы 1 при $a\le 0$ для любой функции g вида

$$g(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}dG(t),\quad \operatorname{Re}\lambda=0,\quad \operatorname{Var}G<\infty,$$

имеем

$$\begin{aligned}(L_-g)(z,s,\lambda)&=\frac{\lambda-\lambda_-(s)}{\lambda-\lambda_-(z)}\left[\frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda-\lambda_-(s)}g(\lambda)\right]^{(-\infty,a)}\\&=\frac{(\lambda-\lambda_-(s))(\lambda_-(s)-\lambda_-(z))}{\lambda-\lambda_-(z)}\left[\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda_-(s)}\right]^{(-\infty,a)}\\&=\frac{(\lambda_-(s)-\lambda_-(z))}{\lambda-\lambda_-(z)}g(\lambda_-(s))e^{(\lambda-\lambda_-(s))a}.\end{aligned}$$

Мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. *Пусть* $D=[a,\infty)$, $a\le 0$, *и выполнено условие* (11). *Тогда*

$$Q_1(z,u,\lambda)=\frac{(\lambda_-(s)-\lambda_-(z))}{(u-1)(\lambda-\lambda_-(z))}\;e^{(\lambda-\lambda_-(s))a}.$$

Симметричными рассуждениями находится функция $Q_2(z,u,\lambda)$ в случае, когда $D=(-\infty,b]$, $b\ge 0$ и $\mathbf{P}(X_1>t)=ce^{-\alpha t}$, $t>0$. Для целочисленных случайных блужданий, у которых $\mathbf{P}(X_1=-k)=cp^{k-1}$, $k\ge 1$, или $\mathbf{P}(X_1=k)=cp^{k-1}$, $k\ge 1$, аналогичные результаты получаются по той же схеме с очевидной заменой интегралов суммами.

Вернемся к рассмотрению случая $D=[a,b]$, $a\le 0\le b$.

Предположим, что распределение X_1 обладает плотностью вида

$$f(t)=\begin{cases}c_1e^{-\alpha_1 t}, & t>0,\\ c_2e^{\alpha_2 t}, & t\le 0,\end{cases}\tag{12}$$

где $\alpha_i>0$, $c_1\alpha_2+c_2\alpha_1=\alpha_1\alpha_2$. В этом случае

$$\varphi(\lambda)=\frac{\lambda(c_2-c_1)-\alpha_1\alpha_2}{(\lambda-\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)};$$

интеграл, определяющий эту функцию, сходится в полосе $-\alpha_2<\operatorname{Re}\lambda<\alpha_1$ и

$$1-z\varphi(\lambda)=\frac{\lambda^2-\lambda(\alpha_1-\alpha_2+z(c_2-c_1))+\alpha_1\alpha_2(z-1)}{(\lambda-\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)}=\frac{(\lambda-\lambda_+(z))(\lambda-\lambda_-(z))}{(\lambda-\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)}.$$

В силу уже упоминавшихся свойств единственности факторизации (3) можно положить

$$R_+(z,\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_+(z)}{\lambda-\alpha_1},\quad R_-(z,\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_-(z)}{\lambda+\alpha_2}.$$

Вычислим $Q_2(z,u,\lambda)$. Воспользовавшись леммами 1 и 2, находим

$$(L_+h)(z,s,\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_+(s)}{(u-1)(\lambda-\lambda_+(z))}\left[\frac{\lambda-\lambda_+(z)}{\lambda-\lambda_+(s)}\right]^{(b,\infty)}$$
$$= \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda-\lambda_+(z))}e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}, \tag{13}$$

$$(L_-h)(z,s,\lambda) = \frac{\lambda_-(s)-\lambda_-(z)}{(u-1)(\lambda-\lambda_-(z))}e^{(\lambda-\lambda_-(s))a}, \tag{14}$$

$$(L_-Q_2)(z,s,\lambda) = \frac{\lambda_-(s)-\lambda_-(z)}{\lambda-\lambda_-(z)}Q_2(z,u,\lambda_-(s))e^{(\lambda-\lambda_-(s))a}, \tag{15}$$

$$(L_+L_-h)(z,s,\lambda) = \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{\lambda-\lambda_+(z)}(L_-h)(z,s,\lambda_+(s))e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}$$
$$= \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda-\lambda_+(z))}H_1(z,s)\mu^{-a}(z,s)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}, \tag{16}$$

$$(L_+L_-Q_2)(z,s,\lambda) = \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{\lambda-\lambda_+(z)}(L_-Q_2)(z,s,\lambda_+(s))e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}$$
$$= \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{\lambda-\lambda_+(z)}H_1(z,s)\mu^{-a}(z,s)Q_2(z,u,\lambda_-(s))e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}. \tag{17}$$

Здесь и далее мы используем обозначения

$$H_1(z,s) = \frac{\lambda_-(s)-\lambda_-(z)}{\lambda_+(s)-\lambda_-(z)}, \quad H_2(z,s) = \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{\lambda_-(s)-\lambda_+(z)},$$
$$H(z,s) = H_1(z,s)H_2(z,s), \quad \mu(s) = e^{\lambda_-(s)-\lambda_+(s)}.$$

Подставляя найденные выражения (13)–(17) во второе тождество из (6), получаем

$$Q_2(z,u,\lambda) = \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda-\lambda_+(z))}e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}$$
$$\times\left(1-H_1(z,s)\mu^{-a}(z,s)+(u-1)H_1(z,s)\mu^{-a}(z,s)Q_2(z,u,\lambda_-(s))\right). \tag{18}$$

Для нахождения $Q_2(z,u,\lambda_-(s))$ подставим в (18) значение $\lambda=\lambda_-(s)$. Из полученного уравнения находим

$$(u-1)Q_2(z,u,\lambda_-(s)) = H_2(z,s)\mu^b(z,s)\frac{1-H_1(z,s)\mu^{-a}(s)}{1-H(z,s)\mu^{b-a}(s)}.$$

Подстановка этого выражения в (18), а также симметричные рассуждения для $Q_1(z,u,\lambda)$ приводят к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть* $D=[a,b]$, $a\le 0\le b$, *и выполнено условие* (12). *Тогда при* $|z|<1$, $|uz|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$, $s=zu$

$$Q_1(z,u,\lambda) = \frac{\lambda_-(s)-\lambda_-(z)}{(u-1)(\lambda-\lambda_-(z))}\frac{1-H_2(z,s)\mu^b(s)}{1-H(z,s)\mu^{b-a}(s)}e^{(\lambda-\lambda_-(s))a}, \tag{19}$$

$$Q_2(z,u,\lambda) = \frac{\lambda_+(s)-\lambda_+(z)}{(u-1)(\lambda-\lambda_+(z))}\frac{1-H_1(z,s)\mu^{-a}(s)}{1-H(z,s)\mu^{b-a}(s)}e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}. \tag{20}$$

Эти выражения без труда обращаются по переменной λ. Например, из (20) получаем

Следствие 4. *В условиях теоремы* 3 *для любого* $x \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} u^k \mathbf{P}(T_n = k, S_n \geq b + x) = \frac{(\lambda_+(s) - \lambda_+(z))(1 - H_1(z,s)\mu^{-a}(s))}{(1-u)\lambda_+(z)(1 - H(z,s)\mu^{b-a}(s))} e^{-\lambda_+(s)b - \lambda_+(z)x}.$$

Применяя (2), получаем

Следствие 5. *В условиях теоремы* 3

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n(D)} e^{\lambda S_n}) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \biggl\{ 1 - \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{\lambda - \lambda_-(z)} \frac{1 - H_2(z,s)\mu^b(s)}{1 - H(z,s)\mu^{b-a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_-(s))a} - \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(z)} \frac{1 - H_1(z,s)\mu^{-a}(s)}{1 - H(z,s)\mu^{b-a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \biggr\}.$$

Обращение полученных представлений по переменным z и u является весьма сложной задачей, что требует отдельных исследований.

Предложенный способ нахождения функций $Q_i(z,u,\lambda)$ приводит к явным выражениям и в более общей ситуации, когда функция $\varphi(\lambda)$ рациональна. В этом случае компоненты факторизации тоже будут рациональными функциями (см. [7]), а значит, могут быть разложены на простые дроби. Использование операторов $L_\pm$ с простыми дробями внутри квадратных скобок осуществляется, как мы видели, несложно, однако в целом будут получаться более громоздкие выражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
2. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наук. думка, 1970.
3. *Бородин А. Н., Ибрагимов И. А.* Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 195. С. 3–285.
4. *Семенов А. Т.* Асимптотические разложения для распределения времени пребывания случайного блуждания в отрезке // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 4. С. 918–930.
5. *Лугавов В. С., Рогозин Б. А.* Факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 389–406.
6. *Лугавов В. С.* О компонентах факторизационного представления для времени пребывания полунепрерывных случайных блужданий в полосе // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 800–809.
7. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 10 июня 2008 г.

Лотов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru