Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ В УПРУГИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А. М. Мейрманов

Аннотация. Рассматривается задача о неизотермическом совместном движении упругого пористого тела и жидкости, заполняющей поры, в случае, когда время длительности физического процесса исчисляется десятками секунд. Подобные задачи возникают при описании акустических волн. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений (т. е. уравнений, не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов), которыми, при различных комбинациях физических параметров задачи, будут системы, состоящие из усредненного уравнения теплопроводности и различных неклассических уравнений акустики.

Ключевые слова: неизотермические уравнения Стокса и Ламэ, уравнения акустики, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Введение

В работе рассматривается задача о моделировании быстропротекающих неизотермических процессов в упругой деформируемой среде, перфорированной системой каналов и пор (упругие пористые среды), заполненных жидкостью или газом. Твердая компонента такой среды называется *скелетом грунта*, а область, занятая жидкостью, — *поровым пространством.*

В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\boldsymbol{w}, \quad \theta' = \theta_* \frac{L}{g\tau^2}\theta$$

дифференциальные уравнения модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\boldsymbol{w}$ и малых отклонений безразмерной температуры θ в области $\Omega \in \boldsymbol{R}^3$ при $t > 0$ имеют вид

$$\bar{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div}\mathbb{P} + \bar{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{0.1}$$

$$\bar{c}_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\bar{\alpha}_\varkappa \nabla\theta) - \bar{\alpha}_\theta \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{w}) + \Psi, \tag{0.2}$$

$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\mathbb{P}^f + (1-\bar{\chi})\mathbb{P}^s, \tag{0.3}$$

$$\mathbb{P}^f = \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) - (p_f + \alpha_{\theta f}\theta)\mathbb{I}, \tag{0.4}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–05–00265).

$$\mathbb{P}^s = \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + (\alpha_\eta \operatorname{div} \boldsymbol{w} - \alpha_{\theta s}\theta)\mathbb{I}, \tag{0.5}$$

$$p_f + \bar{\chi}\alpha_p \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0. \tag{0.6}$$

Здесь и всюду ниже используются обозначения:

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = (1/2)(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \quad \bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1 - \bar{\chi})\rho_s,$$

$$\bar{c}_p = \bar{\chi} + (1 - \bar{\chi})c_p^0, \quad \bar{\alpha}_\varkappa = \bar{\chi}\alpha_{\varkappa f} + (1 - \bar{\chi})\alpha_{\varkappa s}, \quad \bar{\alpha}_\theta = \bar{\chi}\alpha_{\theta f} + (1 - \bar{\chi})\alpha_{\theta s},$$

$\mathbb{I}$ — шаровой тензор, $\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция порового пространства $\Omega_f \subset \Omega$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ — заданный безразмерный вектор удельных массовых сил, $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ — заданная плотность источников и стоков тепла, $\mathbb{P}^f$ — тензор вязких напряжений в жидкости, $\mathbb{P}^s$ — тензор упругих напряжений в твердом скелете и p_f — давление в жидкости. Дифференциальные уравнения (0.1)–(0.6) означают, что вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ и температура θ удовлетворяют системе неизотермических уравнений Стокса в поровом пространстве Ω_f ($\bar{\chi} = 1$) и системе неизотермических уравнений Ламэ в твердом скелете $\Omega_s = \Omega \backslash \overline{\Omega}_f$ ($\bar{\chi} = 0$).

На общей границе $\Gamma = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$ (твердый скелет — поровое пространство) вектор перемещений $\boldsymbol{w}$, температура θ и тензор напряжений сплошной среды удовлетворяют условиям непрерывности

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad [\theta](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma, \ t \geq 0, \tag{0.7}$$

и законам сохранения количества движения и энергии в виде

$$[\mathbb{P} \cdot \mathbf{n}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad [\bar{\alpha}_\varkappa \nabla\theta \cdot \mathbf{n}](\boldsymbol{x}_0, t) = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma, \ t \geq 0, \tag{0.8}$$

где $\mathbf{n}(\boldsymbol{x}_0)$ — единичный вектор нормали к границе в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0, t) = \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0, t) - \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0, t),$$

$$\varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s}} \varphi(\boldsymbol{x}, t), \quad \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0, t) = \lim_{\substack{l\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f}} \varphi(\boldsymbol{x}, t).$$

Вывод уравнений (0.1)–(0.8) и описание безразмерных постоянных (все они строго положительны) можно найти в [1]. В частности,

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_p = \rho_f c_f^2 \frac{\tau^2}{L^2},$$

$$\alpha_\eta = \rho_s c_s^2 \frac{\tau^2}{L^2}, \quad \alpha_{\varkappa f} = \frac{\tau\varkappa_f}{L^2 c_{pf}}, \quad \alpha_{\varkappa s} = \frac{\tau\varkappa_s}{L^2 c_{pf}}, \quad c_p^0 = \frac{c_{ps}}{c_{pf}},$$

где μ — вязкость жидкости, λ — постоянная Ламэ, c_f — скорость звука в жидкости, c_s — скорость звука в твердом скелете, L — характерный размер изучаемой области, τ — характерное время данного физического процесса, ρ_f и ρ_s — безразмерные средние плотности жидкости и твердого скелета соответственно, соотнесенные со средней плотностью воды ρ_0 при атмосферном давлении и температуре нуль градусов по Цельсию, g — ускорение силы тяжести, $\varkappa_f$ и $\varkappa_s$ — теплопроводность в жидкой и твердой компонентах соответственно и, наконец, c_{pf} и c_{pf} — удельная теплоемкость в жидкой и твердой компонентах соответственно.

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{w}|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{0.9}$$

$$\boldsymbol{w} = 0, \quad \theta = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \ t \geq 0. \tag{0.10}$$

Математическая модель, описываемая уравнениями (0.1)–(0.10), содержит естественный малый параметр ε, а именно отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная, и необходимы дополнительные упрощающие предположения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства.

Предположение 1. *Область $\Omega = (0,1)^3$ — периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ и величина $1/\varepsilon$ — целое число такие, что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s — «твердая» часть Y, «жидкая» часть Y_f — открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ между «жидкой» и «твердой» компонентами есть липшицева поверхность.*

Поровое пространство Ω_f^ε — периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет Ω_s^ε — периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, а липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Твердый скелет Ω_s^ε и поровое пространство Ω_f^ε являются связными множествами.

В этих предположениях

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon), \quad \bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

$$\bar{c}_p = c_p^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))c_p^0, \quad \bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$

$$\bar{\alpha}_\varkappa = \alpha_\varkappa^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\alpha_{\varkappa f} + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\alpha_{\varkappa s}, \ \bar{\alpha}_\theta = \alpha_\theta^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\alpha_{\theta f} + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\alpha_{\theta s},$$

где $\chi(\boldsymbol{y})$ — характеристическая функция Y_f в Y, определяющая поровое пространство. В нашей модели функция $\chi(\boldsymbol{y})$ считается заданной.

Пусть перечисленные ниже безразмерные параметры зависят от малого параметра задачи ε и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_p(\varepsilon) = p_*,$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_\eta(\varepsilon) = \eta_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_{\varkappa f}(\varepsilon) = \varkappa_{0f}, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \alpha_{\varkappa s}(\varepsilon) = \varkappa_{0s},$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2} = \lambda_1, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\alpha_{\varkappa i}}{\varepsilon^2} = \varkappa_{1i}, \ i = f, s.$$

В данной работе рассматриваются процессы распространения акустических или сейсмических волн, когда характерное время процесса τ не превосходит нескольких секунд (нескольких десятков секунд), в то время как характерный размер области L равен нескольким тысячам метрам (нескольким десяткам тысяч метров). Напомним, что скорость звука в жидких или твердых средах варьируется в пределах от двух до семи тысяч метров в секунду. Если, например, размер L области выбран, то характерное время процесса τ естественно выбрать так, чтобы за время τ акустическая волна прошла расстояние L, т. е.

$\tau = L/c_s$. Как правило, для таких процессов величины α_μ и α_λ пропорциональны некоторой положительной степени параметра ε, а величины α_p и α_η сравнимы с единицей.

Следует отметить, что чисто математическая проблема о нахождении предельных режимов задачи, зависящей от малого параметра, не дает однозначного ответа на вопрос, какую приближенную модель необходимо использовать в тех или иных физических приложениях. В практических задачах в распоряжении исследователя имеется конкретная физическая среда с данным набором физических параметров: коэффициенты вязкости и упругости, плотности различных компонент, характерный размер пор и характерный размер рассматриваемой области L и, наконец, характерное время физического процесса τ. Малость безразмерного параметра ε не означает, что мы рассматриваем все более и более мелкие поры — их размер фиксирован. Единственные параметры, которые можно варьировать, — это величины L и τ. Но и они имеют свои естественные интервалы изменения (очевидно, что величина L ограничена диаметром Земли). Таким образом, в конкретной прикладной задаче исследователь может обнаружить некоторые закономерности в поведении безразмерных коэффициентов (критериев) и на основе этих закономерностей выбрать тот или иной предельный режим. Как мы уже отмечали, этот выбор может быть и неоднозначным. Именно поэтому чисто математическая задача описания всех возможных предельных режимов является очень важной как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Наиболее полные результаты для изотермического движения получены в [2, 3]. Неизотермическое движение рассматривалось в работах автора [4–7]. В настоящей работе мы продолжим исследования, начатые в [2–7], и рассмотрим не изученный раннее случай $\lambda_0 = 0$, а именно ситуацию, когда $\mu_0 = \lambda_0 = 0$.

Будет показано, что усредненными уравнениями точной модели (0.1)–(0.10) являются различные системы неизотермической акустики для односкоростного континуума ($\lambda_1 = \mu_1 = \infty$ либо $\lambda_1 < \infty$ и $\mu_1 < \infty$) либо различные системы неизотермической акустики для двухскоростного континуума ($\lambda_1 < \infty$ и $\mu_1 = \infty$ или $\lambda_1 = \infty$ и $\mu_1 < \infty$).

Этот достаточно интересный факт, когда модель, описывающая односкоростную сплошную среду до усреднения, превращается в модель, описывающую двухскоростную сплошную среду после усреднения, есть результат различных дифференциальных свойств решения в жидкой и твердой компонентах:

$$\int\limits_\Omega \alpha_\mu(\varepsilon)\chi^\varepsilon|\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon|^2 dx \le C_0, \quad \int\limits_\Omega \alpha_\lambda(\varepsilon)(1-\chi^\varepsilon)|\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon|^2\, dx \le C_0,$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε. Для сохранения лучших свойств решения мы используем леммы о продолжении [6, 7] и продолжаем решение из порового пространства в твердый скелет и наоборот. На этом этапе безразмерные критерии μ_1 и λ_1 становятся определяющими. А именно, пусть $\boldsymbol{w}^\varepsilon_f$ ($\boldsymbol{w}^\varepsilon_s$) есть продолжение перемещений в жидкой (твердой) компоненте в твердую (жидкую) компоненту и $\mu_1 = \lambda_1 = \infty$. Тогда усредненная система описывает односкоростную среду в силу того, что каждая из последовательностей $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon_f\}$ и $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon_s\}$ сходится двухмасштабно к одной и той же функции, не зависящей от быстрой переменной. Последнее утверждение легко следует из теоремы Нгуетсенга [8]. Если же $\mu_1 < \infty$ и $\lambda_1 = \infty$ ($\mu_1 = \infty$ и $\lambda_1 < \infty$), то усредненная модель описывает двухскоростную среду в силу того, что последовательности

$\{\boldsymbol{w}_f^\varepsilon\}$ и $\{\boldsymbol{w}_s^\varepsilon\}$ сходятся, вообще говоря, к различным пределам. При $\mu_1 < \infty$ и $\lambda_1 < \infty$ усредненные уравнения опять описывают односкоростную сплошную среду.

В настоящей публикации мы ограничились простейшей моделью вязкой жидкости с одним коэффициентом вязкости. Учет второй вязкости не сильно меняет как вид усредненных уравнений (см. [2], где рассмотрена полная модель), так и доказательства соответствующих утверждений.

Обзор литературы и необходимые предварительные сведения можно найти в [2, 9, 10], обозначения основных функциональных пространств — в [10].

§ 1. Формулировка основных результатов

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (0.1), (0.2) и краевых условий (0.7), (0.8). Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Определение 1. Функции $\big(\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon, p_f^\varepsilon, p_s^\varepsilon\big)$ называются *обобщенным решением задачи* (0.1)–(0.10), если они удовлетворяют условиям регулярности

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t},\ \chi^\varepsilon \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t},\ \nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon,\ \nabla\theta^\varepsilon,\ \theta^\varepsilon,\ p_f^\varepsilon,\ p_s^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$$

в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, граничным условиям (0.10), уравнениям

$$\frac{1}{\alpha_p} p_f^\varepsilon = -\chi^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\alpha_\eta} p_s^\varepsilon = -(1-\chi^\varepsilon) \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon \tag{1.2}$$

почти всюду в области Ω_T, интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T} \Bigg(\rho^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} + \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\bigg(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\bigg) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) - \rho^\varepsilon \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}$$
$$+ \big\{(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - \big(p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon \theta^\varepsilon\big)\mathbb{I}\big\} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})\Bigg)\, dxdt = 0 \tag{1.3}$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ таких, что

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S,\ t > 0; \quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, T) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, T) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

и интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T} \bigg(\big(c_p^\varepsilon \theta^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon\big)\frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha_\varkappa^\varepsilon \nabla\theta^\varepsilon \cdot \nabla \xi + \Psi \xi\bigg)\, dxdt = 0 \tag{1.4}$$

для всех гладких функций $\xi = \xi(\boldsymbol{x}, t)$ таких, что

$$\xi(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S,\ t > 0; \quad \xi(\boldsymbol{x}, T) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Мы дополнительно ввели новую искомую функцию p_s^ε, которую по аналогии с функцией p_f^ε будем называть *давлением в твердом скелете*. При этом уравнение (1.2) будем называть *уравнением неразрывности в твердой компоненте*.

В (1.3) через $\mathbb{A} : \mathbb{B}$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т. е.

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \operatorname{tr}(\mathbb{B}^* \cdot \mathbb{A}) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} B_{ji}.$$

В дальнейшем считаем, что выполнено

Предположение 2. 1. *Функции* $\Psi, |\boldsymbol{F}|$ *принадлежат* $L^2(\Omega_T)$.

2. *Безразмерные параметры удовлетворяют следующим ограничениям:* p_*^{-1}, η_0^{-1}, p_*, η_0, $\varkappa_{0f}$, $\varkappa_{0s} < \infty$, $\lambda_0 = \mu_0 = 0$.

Основными результатами настоящей статьи являются теоремы 1–9.

Теорема 1. *При всех* $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени* $[0, T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (0.1)–(0.10) *и*

$$\max_{0\leq t\leq T}\left(\left\|\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right| + |\theta^\varepsilon|\right)(.,t)\right\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\lambda}\|\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon(.,t)\|_{2,\Omega}\right) \leq C_0, \tag{1.5}$$

$$\sqrt{\alpha_\mu}\left\|\chi^\varepsilon \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{2,\Omega_T} + \|\sqrt{\alpha_\varkappa^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} \leq C_0, \tag{1.6}$$

$$\max_{0\leq t\leq T}\left(\left\|p_f^\varepsilon(.,t)\right\|_{2,\Omega} + \left\|p_s^\varepsilon(.,t)\right\|_{2,\Omega}\right) \leq C_0, \tag{1.7}$$

где постоянная C_0 *не зависит от малого параметра* ε.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из условий*

$$0 < \varkappa_{0f}, \quad \varkappa_{0s} \tag{1.8}$$

или

$$\varkappa_{0f} = \varkappa_{0s} = 0, \quad \varkappa_{1f} = \varkappa_{1s} = \infty. \tag{1.9}$$

Существуют последовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ *и функции* $\boldsymbol{w}_f^\varepsilon, \boldsymbol{w}_s^\varepsilon \in L^\infty\big(0, T; W_2^1(\Omega)\big)$ *такие, что*

$$\boldsymbol{w}_f^\varepsilon = \boldsymbol{w}^\varepsilon \text{ в } \Omega_f^\varepsilon \times (0,T), \quad \boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \boldsymbol{w}^\varepsilon \text{ в } \Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$$

и последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{p_f^\varepsilon\}$, $\{p_s^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}_f^\varepsilon\}$ *и* $\{\boldsymbol{w}_s^\varepsilon\}$ *сходятся при* $\varepsilon \searrow 0$ *слабо в* $L^2(\Omega_T)$ *к функциям* θ, p_f, p_s, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}^f$, $\boldsymbol{w}^s$, $\boldsymbol{w}_f$ *и* $\boldsymbol{w}_s$ *соответственно.*

Если выполнено условие (1.8), *то последовательность* $\{\theta^\varepsilon\}$ *сходится двухмасштабно в* $L^2(\Omega_T)$ *и слабо в* $L^2\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$ *к функции* θ. *Если же выполнено условие* (1.9), *то последовательность* $\{\theta^\varepsilon\}$ *сходится к функции* θ *двухмасштабно в* $L^2(\Omega_T)$.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 2* $\mu_1 = \lambda_1 = \infty$. *Тогда* $\boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{w}$ *и функции* θ, $\boldsymbol{w}$, p_f *и* p_s *удовлетворяют в области* Ω_T *системе уравнений акустики*

$$\hat{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = -\nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{p_*}p_f + \frac{1}{\eta_0}p_s + \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0, \tag{1.11}$$

$$\alpha_{\theta f}\theta + \frac{1}{m}p_f = \alpha_{\theta s}\theta + \frac{1}{1-m}p_s, \tag{1.12}$$

однородным начальным условиям

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.13}$$

и однородному краевому условию

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S, \ t > 0, \tag{1.14}$$

где $m = \int_Y \chi\, dy$ — *пористость и* $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$ — *средняя плотность смеси.*

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы 2 $\partial \boldsymbol{F}/\partial t \in L^2(\Omega_T)$, $\mu_1 = \infty$ и $0 < \lambda_1 < \infty$. Тогда функции θ, $\boldsymbol{w}^f = m\boldsymbol{w}_f$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f и p_s удовлетворяют в области Ω_T системе уравнений акустики, состоящей из уравнения состояния (1.12) и усредненного закона сохранения количества движения в виде*

$$\rho_f m \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_f}{\partial t^2} + \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} = -\nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \hat{\rho} \boldsymbol{F} \tag{1.15}$$

для жидкой компоненты, уравнения неразрывности

$$\frac{1}{p_*} p_f + \frac{1}{\eta_0} p_s + m \operatorname{div} \boldsymbol{w}_f + \operatorname{div} \boldsymbol{w}^s = 0 \tag{1.16}$$

и соотношения

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{w}^s}{\partial t} = (1-m) \frac{\partial \boldsymbol{w}_f}{\partial t} + \int\limits_0^t \mathbb{B}_1^s(t-\tau) \cdot \boldsymbol{z}^s(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau, \\ \boldsymbol{z}^s(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \rho_s \boldsymbol{F} - \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_f}{\partial t^2} \end{gathered} \tag{1.17}$$

для твердой компоненты. Задача (1.12), (1.15)–(1.17) дополняется однородными начальными условиями (1.13) для перемещений в твердой и жидкой компонентах и однородным краевым условием (1.14) для перемещений $\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{w}_f + \boldsymbol{w}^s$.

В уравнении (1.17) матрица $\mathbb{B}_1^s(t)$ определена ниже формулой (5.5).

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 2 $\mu_1 = \infty$ и $\lambda_1 = 0$. Тогда функции θ, $\boldsymbol{w}^f = m\boldsymbol{w}_f$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f и p_s удовлетворяют в области Ω_T системе, состоящей из уравнений акустики (1.12), (1.15), (1.16) и усредненного закона сохранения количества движения твердой компоненты в виде*

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} = \rho_s \mathbb{B}_2^s \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_f}{\partial t^2} + \big((1-m)\mathbb{I} - \mathbb{B}_2^s \big) \cdot \left(-\nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \rho_s \boldsymbol{F} \right). \tag{1.18}$$

Задача (1.12), (1.15), (1.16), (1.18) дополняется однородными начальными условиями (1.13) для перемещений в твердой и жидкой компонентах и однородным краевым условием (1.14) для перемещений $\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{w}_f + \boldsymbol{w}^s$. В уравнении (1.18) матрица $\mathbb{B}_2^s$ определена ниже формулой (5.7), где симметричная матрица $\big((1-m)\mathbb{I} - \mathbb{B}_2^s\big)$ строго положительно определена.

Теорема 6. *Пусть в условиях теоремы 2 $\partial \boldsymbol{F}/\partial t \in L^2(\Omega_T)$, $0 < \mu_1 < \infty$ и $\lambda_1 = \infty$. Тогда функции θ, $\boldsymbol{w}^f = m\boldsymbol{w}_f$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f и p_s удовлетворяют в области Ω_T системе уравнений акустики, состоящей из уравнения состояния (1.12) и усредненного закона сохранения количества движения в виде*

$$\rho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^f}{\partial t^2} + \rho_s (1-m) \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2} = -\nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \hat{\rho} \boldsymbol{F} \tag{1.19}$$

для твердой компоненты, уравнения неразрывности

$$\frac{1}{p_*} p_f + \frac{1}{\eta_0} p_s + \operatorname{div} \boldsymbol{w}^f + (1-m) \operatorname{div} \boldsymbol{w}_s = 0 \tag{1.20}$$

и соотношения

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^f}{\partial t} = m \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \int\limits_0^t \mathbb{B}_1^f(t-\tau) \cdot \boldsymbol{z}^f(\boldsymbol{x}, \tau) \, d\tau, \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{z}^f(\boldsymbol{x},t) = -\nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) + \rho_f\boldsymbol{F} - \rho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}$$

для жидкой компоненты. Задача (1.12), (1.19)–(1.21) *дополняется однородными начальными условиями* (1.13) *для перемещений в твердой и жидкой компонентах и однородным краевым условием* (1.14) *для перемещений* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^f + (1-m)\boldsymbol{w}_s$. *В уравнении* (1.21) *матрица* $\mathbb{B}_1^f(t)$ *определена ниже формулой* (6.1).

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы* 2 $\mu_1 = 0$ *и* $\lambda_1 = \infty$. *Тогда функции* θ, $\boldsymbol{w}^f = m\boldsymbol{w}_f$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f *и* p_s *удовлетворяют в области* Ω_T *системе уравнений акустики, состоящей из уравнений* (1.12), (1.19), (1.20) *и усредненного закона сохранения количества движения в виде*

$$\rho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^f}{\partial t^2} = \rho_f\mathbb{B}_2^f\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s}{\partial t^2} + \left(m\mathbb{I} - \mathbb{B}_2^f\right)\cdot\left(-\nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) + \rho_f\boldsymbol{F}\right) \tag{1.22}$$

для жидкой компоненты. Задача (1.12), (1.19), (1.20) *и* (1.22) *дополняется однородными начальными условиями* (1.13) *для перемещений в твердой и жидкой компонентах и однородным краевым условием* (1.14) *для перемещений* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^f + (1-m)\boldsymbol{w}_s$. *В уравнении* (1.22) *матрица* $\mathbb{B}_2^f$ *определена ниже формулой* (6.2), *где симметричная матрица* $\left(m\mathbb{I} - \mathbb{B}_2^f\right)$ *строго положительно определена.*

Теорема 8. *Пусть в условиях теоремы* 2 $\mu_1 < \infty$ *и* $\lambda_1 < \infty$. *Тогда функции* θ, $\boldsymbol{w}^f = m\boldsymbol{w}_f$, $\boldsymbol{w}^s$, p_f *и* p_s *удовлетворяют в области* Ω_T *системе уравнений акустики, состоящей из уравнения неразрывности* (1.11), *уравнения состояния* (1.12) *и соотношения*

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = \int_0^t \mathbb{B}(t-\tau)\cdot\left(\nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right)\right)(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau + \mathbf{f}\,(\boldsymbol{x},t), \tag{1.23}$$

где матрица $\mathbb{B}(t)$ *и вектор* $\mathbf{f}\,(\boldsymbol{x},t)$ *определены ниже формулами* (7.5), (7.6).

Задача (1.11), (1.12) *и* (1.23) *дополняется однородными начальными и краевыми условиями* (1.13) *и* (1.14).

Теорема 9. *При выполнении условий теоремы* 2 *и условия* (1.8) *каждая из систем* (1.10)–(1.12), (1.15)–(1.18), (1.19)–(1.22) *и* (1.11), (1.12) *и* (1.23) *дополняется усредненным уравнением теплопроводности*

$$\hat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\alpha_{\theta f}}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\alpha_{\theta s}}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} = \operatorname{div}\{\mathbb{B}^\theta\cdot\nabla\theta\} + \Psi \tag{1.24}$$

и однородными начальными и краевыми условиями (0.9), (0.10) *для предельной температуры* θ.

В уравнении (1.24) $\hat{c}_p = m + (1-m)c_p^0$, *а симметричная и строго положительно определенная матрица* $\mathbb{B}^\theta$ *задается ниже формулой* (8.1).

Если вместо условия (1.8) *выполнено условие* (1.9), *то все вышеперечисленные системы дополняются уравнением*

$$\hat{c}_p\theta(\boldsymbol{x},t) = \frac{\alpha_{\theta f}}{p_*}p_f(\boldsymbol{x},t) + \frac{\alpha_{\theta s}}{\eta_0}p_s(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t \Psi(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau. \tag{1.25}$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Существование и единственность обобщенного решения задачи (0.1)–(0.10) доказаны в [1].

Для формального вывода оценок (1.5) и (1.6) рассмотрим энергетическое тождество

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg\{\int\limits_{\Omega}\bigg(\rho^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)^{2}+c_{p}^{\varepsilon}(\theta^{\varepsilon})^{2}\bigg)\,dx+\alpha_{\lambda}\int\limits_{\Omega}(1-\chi^{\varepsilon})\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})\,dx \\
+\alpha_{p}\int\limits_{\Omega}\chi^{\varepsilon}(\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{\varepsilon})^{2}\,dx+\alpha_{\eta}\int\limits_{\Omega}(1-\chi^{\varepsilon})(\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{\varepsilon})^{2}\,dx\bigg\}+\int\limits_{\Omega}\alpha_{\varkappa}^{\varepsilon}|\nabla\theta^{\varepsilon}|^{2}\,dx \\
+\alpha_{\mu}\int\limits_{\Omega}\chi^{\varepsilon}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\,dx=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\,dx, \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

которое получается после умножения уравнения для $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ на $\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t$, уравнения для θ^{ε} на θ^{ε}, интегрирования по частям и суммирования.

Последнее тождество (2.1) вместе с неравенствами Гёльдера и Гронуолла влечет оценку

$$
\begin{aligned}
\max_{0<t<T}\bigg(\bigg\|\bigg(\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|+|\theta^{\varepsilon}|\bigg)(.,t)\bigg\|_{2,\Omega}+\|(\sqrt{\alpha_{\lambda}}|\nabla \boldsymbol{w}^{\varepsilon}|+\sqrt{\alpha_{\eta}}|\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}|)(.,t)\|_{2,\Omega_{s}^{\varepsilon}} \\
+\sqrt{\alpha_{p}}\|\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(.,t)\|_{2,\Omega_{f}^{\varepsilon}}\bigg)+\bigg\|\sqrt{\alpha_{\varkappa}^{\varepsilon}}|\nabla\theta^{\varepsilon}|+\sqrt{\alpha_{\mu}}\Big|\chi^{\varepsilon}\nabla\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|\bigg\|_{2,\Omega_{T}}\leq C_{0}, \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

где C_0 не зависит от ε. Оценки (1.5) и (1.6) очевидным образом следуют из (2.2). Наконец, оценка (1.7) для давлений p_f^{ε} и p_s^{ε} вытекает из уравнений неразрывности (1.1) и (1.2) и оценок (2.2).

Неформальный вывод несколько более длинный и следует, например, из доказательства существования обобщенного решения рассматриваемой линейной задачи методом Галёркина. Для приближенных решений вывод энергетического тождества достаточно простой, а окончательная оценка (2.2) получается из аналогичной оценки (2.2) для приближенных решений после предельного перехода.

Замечание 2.1. Результаты теоремы 1 остаются справедливыми и для неоднородных начальных условий

$$
\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{w}_{0}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{v}_{0}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}),
$$

если нормы $\|\nabla \boldsymbol{w}_0^{\varepsilon}\|_{2,\Omega}$ и $\|\boldsymbol{v}_0^{\varepsilon}\|_{2,\Omega}$ равномерно по ε ограничены.

Замечание 2.2. Пусть $\partial \boldsymbol{F}/\partial t\in L^{2}(\Omega_{T})$. Поскольку уравнения и краевые условия системы (0.1)–(0.10) можно дифференцировать по времени, производная по времени $\boldsymbol{v}^{\varepsilon}=\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t$ обобщенного решения $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ задачи (0.1)–(0.10) является решением той же самой системы уравнений, в которой вектором заданных массовых сил является производная $\partial \boldsymbol{F}/\partial t$, а вместо однородных начальных условий выполнены неоднородные условия

$$
\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},0).
$$

Таким образом, в силу замечания 2.1 справедлива оценка

$$\max_{0<t<T}\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(.,t)\right\|_{2,\Omega} \leq C_0, \tag{2.3}$$

где C_0 не зависит от ε.

§ 3. Доказательство теоремы 2

В силу результатов о продолжении [11, 12] (см. также [2]) существуют функции $\boldsymbol{w}_f^\varepsilon, \boldsymbol{w}_s^\varepsilon \in L^\infty\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ такие, что $\boldsymbol{w}_f^\varepsilon = \boldsymbol{w}^\varepsilon$ в $\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$, $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \boldsymbol{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$ и $\big\|\boldsymbol{w}_i^\varepsilon\big\|_{2,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega_i^\varepsilon}$, $\big\|\nabla \boldsymbol{w}_i^\varepsilon\big\|_{2,\Omega} \leq C\|\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega_i^\varepsilon}$, $i = f, s$, где постоянная C не зависит от ε. В силу теоремы 1 последовательности $\big\{p_f^\varepsilon\big\}$, $\big\{p_s^\varepsilon\big\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\big\{\boldsymbol{w}_f^\varepsilon\big\}$, $\big\{\boldsymbol{w}_s^\varepsilon\big\}$, $\big\{\sqrt{\alpha_\lambda}\nabla \boldsymbol{w}_s^\varepsilon\big\}$ и $\big\{\sqrt{\alpha_\mu}\nabla \boldsymbol{w}_f^\varepsilon\big\}$ равномерно по параметру ε ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Следовательно, существуют последовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p_f, p_s, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}_f$ и $\boldsymbol{w}_s$ такие, что

$$p_f^\varepsilon \rightharpoonup p_f, \quad p_s^\varepsilon \rightharpoonup p_s, \quad \boldsymbol{w}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w}_f^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{w}_f, \quad \boldsymbol{w}_s^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{w}_s \tag{3.1}$$

слабо в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Заметим также, что

$$(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda D\big(x, \boldsymbol{w}_s^\varepsilon\big) \to 0, \quad \chi^\varepsilon \alpha_\mu D\big(x, \boldsymbol{w}_f^\varepsilon\big) \to 0 \tag{3.2}$$

сильно в $L^2(\Omega_T)$ и

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon \rightharpoonup \operatorname{div} \boldsymbol{w}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_f^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \boldsymbol{w}_f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}$$

слабо в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Замечание 3.1. Если $\partial \boldsymbol{F}/\partial t \in L^2(\Omega_T)$, то в силу замечания 2.2 вторые производные по времени решений $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ равномерно по параметру ε ограничены и

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_f^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_f}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}$$

слабо в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Согласно теореме Нгуетсенга [8] (см. также [2]) существуют 1-периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $P_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $P_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ такие, что последовательности $\big\{p_f^\varepsilon\big\}$, $\big\{p_s^\varepsilon\big\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\big\{\boldsymbol{w}_f^\varepsilon\big\}$ и $\big\{\boldsymbol{w}_s^\varepsilon\big\}$ сходятся двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $P_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $P_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ соответственно.

Если выполнено условие (1.8), то в силу ограниченности последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$ в $L^2\big(0,T; W_2^1(\Omega)\big)$ существуют последовательность из $\{\varepsilon > 0\}$, функции $\theta \in L^2\big(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$ и 1-периодическая по переменной y функция $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ такие, что $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta$ слабо в $L^2\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$ при $\varepsilon \searrow 0$, а последовательности $\{\theta^\varepsilon\}$ и $\{\nabla\theta^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ соответственно к функциям θ и $\nabla\theta + \nabla_y\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$. Если же выполнено условие (1.9), то последовательность $\{\theta^\varepsilon\}$ сходится двухмасштабно в $L^2(\Omega_T)$ к своему слабому пределу θ. А именно, справедлива

Лемма 3.1. *При выполнении условий* (1.8) *или* (1.9) *последовательность* $\{\theta^\varepsilon\}$ *сходится двухмасштабно в* $L^2(\Omega_T)$ (*с точностью до выбора подпоследовательности*) *к своему слабому пределу* $\theta(\boldsymbol{x},t)$.

Доказательство. В силу теоремы Нгуетсенга [8] существуют последовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция $\Theta_0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ такие, что последовательность $\{\theta^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к $\Theta_0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$.

Пусть $\bar{\alpha}^\varepsilon_\kappa=\min\big(\alpha^\varepsilon_{\varkappa f},\alpha^\varepsilon_{\varkappa f}\big)$ и $\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — произвольная гладкая скалярная функция, периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$. Последовательность $\big\{\sigma^\varepsilon_j\big\}$, где

$$\sigma^\varepsilon_j=\sqrt{\bar{\alpha}^\varepsilon_\kappa}\int\limits_{\Omega_T}\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)\,dxdt,\quad j=1,2,3,$$

ограничена по параметру ε. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_T}\varepsilon\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)\,dxdt=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\bar{\alpha}^\varepsilon_\kappa}}\sigma^\varepsilon_j\to 0$$

при $\varepsilon\searrow 0$, что эквивалентно равенствам

$$\int\limits_{\Omega_T}\int\limits_{Y}\Theta_0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,dydxdt=0,\quad j=1,2,3,$$

или $\Theta_0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\theta(\boldsymbol{x},t)$. $\square$

Совершенно аналогично лемме 3.1 доказывается

Лемма 3.2. *Пусть* $\mu_1=\infty$ ($\lambda_1=\infty$). *Тогда* $\boldsymbol{W}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{w}_f(\boldsymbol{x},t)$, $\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}_f(\boldsymbol{x},t)$ *и* $\boldsymbol{w}^f=\langle\boldsymbol{W}\rangle_{Y_f}=m\boldsymbol{w}_f$ ($\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$, $(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$ *и* $\boldsymbol{w}^s=\langle\boldsymbol{W}\rangle_{Y_s}=(1-m)\boldsymbol{w}_s$).

§ 4. Микро- и макроскопические уравнения

Лемма 4.1. *Для почти всех* $\boldsymbol{x}\in\Omega$ *и* $\boldsymbol{y}\in Y$ *слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\big\{p^\varepsilon_f\big\}$, $\big\{p^\varepsilon_s\big\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\big\{\boldsymbol{w}^\varepsilon_f\big\}$ *и* $\big\{\boldsymbol{w}^\varepsilon_s\big\}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$P_f=\frac{\chi}{m}p_f,\quad P_s=\frac{1-\chi}{1-m}p_s,\tag{4.1}$$

$$\alpha_{\theta f}\theta+\frac{1}{m}p_f=\alpha_{\theta s}\theta+\frac{1}{1-m}p_s,\tag{4.2}$$

$$\frac{1}{p_*}p_f+\frac{1}{\eta_0}p_s+\operatorname{div}\boldsymbol{w}=0,\tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in S,\tag{4.4}$$

$$\operatorname{div}_y\boldsymbol{W}=0,\tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{W}=\chi\boldsymbol{W}_f+(1-\chi)\boldsymbol{W}_s,\tag{4.6}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ — *единичный вектор нормали к поверхности* S *в точке* $\boldsymbol{x}\in S$.

Доказательство. Для доказательства равенства (4.1) подставим в интегральное тождество (1.3) пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon=\varepsilon\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — произвольная 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ и финитная в Y_f (или финитная в Y_s, или финитная в Y) функция. Пусть, например, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ —

финитная в Y_f функция. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$ и учитывая лемму 3.1, получим интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_T}\int\limits_{Y}(\alpha_{\theta f}\theta(\boldsymbol{x},t)+P_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\,\mathrm{div}_y\ \boldsymbol{\psi}\,dydxdt=0,$$

эквивалентное равенству $\nabla_y P_f = 0$, $\boldsymbol{y} \in Y_f$. Совершенно аналогично рассматриваются все остальные случаи, что приводит к равенствам

$$\nabla_y P_f = 0,\ \boldsymbol{y}\in Y_f;\quad \nabla_y P_s = 0,\ \boldsymbol{y}\in Y_s;\quad \nabla_y(\alpha_\theta(\boldsymbol{y})\theta + P_f + P_s) = 0,\ \boldsymbol{y}\in Y, \tag{4.7}$$

где

$$\alpha_\theta(\boldsymbol{y}) = \alpha_{\theta f}\chi(\boldsymbol{y}) + \alpha_{\theta s}(1-\chi(\boldsymbol{y})).$$

Совершая двухмасштабный предельный переход в равенствах $(1-\chi^\varepsilon)p_f^\varepsilon = 0$, $\chi^\varepsilon p_s^\varepsilon = 0$, приходим к соотношениям $(1-\chi)P_f = 0$, $\chi P_s = 0$, что с учетом (4.7) доказывает (4.1).

Равенство (4.2) следует из (4.1), леммы 3.1 и последнего соотношения в (4.7): последовательность $\{\alpha_\theta^\varepsilon\theta^\varepsilon + p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к функции

$$\alpha_\theta(\boldsymbol{y})\theta(\boldsymbol{x},t) + \frac{\chi(\boldsymbol{y})}{m}p_f(\boldsymbol{x},t) + \frac{1-\chi(\boldsymbol{y})}{1-m}p_s(\boldsymbol{x},t) = (\hat{\alpha}_\theta\theta + p_f + p_s)(\boldsymbol{x},t),$$

где $\hat{\alpha}_\theta = m\alpha_{\theta f} + (1-m)\alpha_{\theta s}$.

Уравнения (4.3)–(4.5) являются результатами двухмасштабного предельного перехода в сумме уравнений (1.1) и (1.2).

Наконец, уравнение (4.6) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon = \chi^\varepsilon\boldsymbol{w}^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{w}^\varepsilon. \quad \square$$

Лемма 4.2. *При почти всех* $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T$ *и* $y \in Y$ *выполняется соотношение*

$$\rho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^f}{\partial t^2} + \rho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^s}{\partial t^2} = -\nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Подставляя в интегральное тождество (1.3) пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t)$ и переходя к пределу при $\varepsilon\searrow 0$, получим требуемое макроскопическое уравнение (4.8). При этом мы учли, что при выполнении любого из условий (1.8) или (1.9) последовательность $\{\alpha_\theta^\varepsilon\theta^\varepsilon + p_f^\varepsilon + p_s^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к функции

$$\hat{\alpha}_\theta\theta + p_f + p_s = \alpha_{\theta f}\theta + \frac{1}{m}p_f = \alpha_{\theta s}\theta + \frac{1}{1-m}p_s. \quad \square$$

Лемма 4.3. *Пусть* $\mu_1 = \infty$ *и* $\lambda_1 < \infty$. *Тогда функции* θ, $\boldsymbol{W}^s = (1-\chi)\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{w}_f$ *и* p_f *удовлетворяют в* Y_s *системе микроскопических уравнений*

$$\begin{gathered}\rho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{W}^s}{\partial t^2} = \lambda_1\Delta_y\boldsymbol{W}^s - \nabla_y R^s - \nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) + \rho_s\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{y}\in Y_s,\\ \boldsymbol{W}^s = \boldsymbol{w}_f,\quad \boldsymbol{y}\in\gamma,\end{gathered} \tag{4.9}$$

в случае $\lambda_1 > 0$ *и соотношениям*

$$\rho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{W}^s}{\partial t^2} = -\nabla_y R^s - \nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) + \rho_s\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{y}\in Y_s, \tag{4.10}$$

$$(\boldsymbol{W}^s - \boldsymbol{w}_f) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \tag{4.11}$$

в случае $\lambda_1 = 0$.

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\boldsymbol{W}^s(\boldsymbol{y}, 0) = \frac{\partial \boldsymbol{W}^s}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s. \tag{4.12}$$

В краевом условии (4.11) $\boldsymbol{n}$ *— единичный вектор нормали к границе* γ.

Доказательство. Дифференциальные уравнения (4.9) и (4.10) и начальные условия (4.12) следуют при $\varepsilon \searrow 0$ из интегрального тождества (1.3) с пробными функциями вида $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}(x\varepsilon^{-1}) \cdot h(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — соленоидальная финитная в Y_s функция.

Краевое условие в (4.9) есть следствие двухмасштабной сходимости последовательности $\{\sqrt{\alpha_\lambda}\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ к функции $\sqrt{\lambda_1}\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$. В силу этой сходимости функция $\nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ L^2-интегрируемая в Y. Краевое условие (3.13) следует из уравнений (4.5), (4.6) и равенства $\boldsymbol{W}_f = \boldsymbol{w}_f$.

Отметим, что уравнения (4.9) и (4.10) понимаются в обобщенном смысле (в смысле теории распределений) как соответствующие интегральные тождества. Пусть, например, $H(Y_s)$ есть пространство 1-периодических функций из $W_2^1(Y)$, соленоидальных в Y_s и равных нулю на границе γ. Тогда функция $\boldsymbol{W}^s$ является обобщенным решением уравнения (4.9), если

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^s = (\boldsymbol{W}^s - \boldsymbol{w}_f) \in L^2((0,T); H(Y_s)), \quad \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{W}}^s}{\partial t} \in L^2(Y_s \times (0,T))$$

и

$$\int_0^T \int_{Y_s} \left(\rho_s \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{W}}^s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \lambda_1 \nabla \widetilde{\boldsymbol{W}}^s : \nabla \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{z}^s \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) dy dt = 0, \quad \widetilde{\boldsymbol{W}}^s(\boldsymbol{y}, 0) = 0, \tag{4.13}$$

где

$$\boldsymbol{z}^s(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \rho_s \boldsymbol{F} - \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_f}{\partial t^2},$$

для произвольной функции $\boldsymbol{\varphi}$ из пространства $L^2((0,T); H(Y_s))$ такой, что $\partial \boldsymbol{\varphi}/\partial t \in L^2(Y_s \times (0,T))$ и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}, T) = 0$. $\square$

Полностью аналогично предыдущей лемме доказывается

Лемма 4.4. *Пусть* $\mu_1 < \infty$ *и* $\lambda_1 = \infty$. *Тогда функции* θ, $\boldsymbol{W}^f = \chi \boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{w}_s$ *и* p_f *удовлетворяют в* Y_f *системе микроскопических уравнений*

$$\rho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^f}{\partial t^2} = \mu_1 \Delta_y \frac{\partial \boldsymbol{W}^f}{\partial t} - \nabla_y R^f - \nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \rho_f \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{W}^f = \boldsymbol{w}_s, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \tag{4.15}$$

в случае $\mu_1 > 0$ *и соотношению*

$$\rho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^f}{\partial t^2} = -\nabla_y R^f - \nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right) + \rho_f \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \tag{4.16}$$

$$(\boldsymbol{W}^f - \boldsymbol{w}_s) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \tag{4.17}$$

в случае $\mu_1 = 0$. *Задача замыкается однородными начальными условиями*

$$\boldsymbol{W}^f(\boldsymbol{y}, 0) = \frac{\partial \boldsymbol{W}^f}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f. \tag{4.18}$$

Лемма 4.5. *Пусть* $\mu_1 < \infty$, $\lambda_1 < \infty$ *и* $\rho(\boldsymbol{y}) = \rho_f \chi(\boldsymbol{y}) + \rho_s(1 - \chi(\boldsymbol{y}))$.

Тогда функции θ, $\boldsymbol{W}$ *и* p_f *удовлетворяют в* Y *системе микроскопических уравнений*

$$\rho(\boldsymbol{y})\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2} + \nabla\left(\frac{1}{m}p_f + \alpha_{\theta f}\theta\right) - \rho(\boldsymbol{y})\boldsymbol{F} = \operatorname{div}_y\left\{\mu_1 \chi \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right) + \lambda_1(1-\chi)\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}) - R\mathbb{I}\right\} \tag{4.19}$$

и однородным начальным условиям

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}, 0) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y. \tag{4.20}$$

При доказательстве этой леммы мы выбираем в интегральном тождестве (1.3) пробные функции вида $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}(x\varepsilon^{-1}) \cdot h(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — соленоидальная финитная в Y функция, и дополнительно используем следствие теоремы Нгуетсенга, утверждающее, что последовательность $\{\varepsilon\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon)\}$ сходится двухмасштабно к функции $\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})$.

Лемма 4.6. *Пусть выполнено условие* (1.8). *Тогда при всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *и* $y \in Y$ *сильные и двухмасштабные пределы* θ *и* Θ *удовлетворяют микроскопическому уравнению*

$$\operatorname{div}_y\{\varkappa_0(\boldsymbol{y})\big(\nabla\theta + \nabla_y\Theta\big)\} = 0, \tag{4.21}$$

где $\varkappa_0(\boldsymbol{y}) = \chi(\boldsymbol{y})\varkappa_{0f} + (1 - \chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_{0s}$.

Для доказательства этой леммы достаточно рассмотреть тождество (1.4) с пробными функциями $\xi = \varepsilon\xi_0(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$ и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$.

Лемма 4.7. *При всех* $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ *слабые и сильные пределы* θ, p_f *и* p_s *удовлетворяют макроскопическому уравнению теплопроводности*

$$\hat{c}_p\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\alpha_{\theta f}}{p_*}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{\alpha_{\theta s}}{\eta_0}\frac{\partial p_s}{\partial t} = \operatorname{div}\{\hat{\varkappa}_0\nabla\theta + \langle\varkappa_0\nabla_y\Theta\rangle_Y\} + \Psi, \tag{4.22}$$

где $\hat{c}_p = m + (1-m)c_p^0$ *и* $\hat{\varkappa}_0 = \langle\varkappa_0\rangle_Y > 0$ *при выполнении условия* (1.8) *и* $\varkappa_0(\boldsymbol{y}) = 0$ *при выполнении условия* (1.9).

Доказательство этой леммы повторяет доказательство леммы 4.2, если в тождестве (1.4) слагаемое $\alpha_\theta^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon$ выразить через давления, используя уравнения неразрывности (1.1) и (1.2).

Теорема 3 является простым следствием лемм 3.2, 4.1 и 4.2.

§ 5. Доказательства теорем 4 и 5

Уравнение (1.15) есть прямое следствие уравнения (4.8). Уравнение неразрывности (1.16) получается из уравнения (4.3), если учесть равенство $\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{w}_f + \boldsymbol{w}^s$.

Для вывода двух последних уравнений (1.17) и (1.18) необходимо решить систему микроскопических уравнений (4.5), (4.9)–(4.13) и воспользоваться формулой $\boldsymbol{w}^s = \langle\boldsymbol{W}\rangle_{Y_s}$.

1. Пусть $\lambda_1 > 0$. Тогда решение интегрального тождества (4.13) дается формулой

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^s = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 \boldsymbol{W}^{s,i}(\boldsymbol{y}, t-\tau) z_i^s(\boldsymbol{x}, \tau)\right) d\tau, \quad \boldsymbol{z}^s = \big(z_1^s, z_2^s, z_3^s\big), \tag{5.1}$$

где 1-периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{W}^{s,i}(\boldsymbol{y},t) \in L^2((0,T);H(Y_s))$, $\partial \boldsymbol{W}^{s,i}/\partial t \in L^2(Y_s \times (0,T))$, являются решением интегрального тождества

$$\int_0^T \int_{Y_s} \left(\rho_s \frac{\partial \boldsymbol{W}^{s,i}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \lambda_1 \nabla \boldsymbol{W}^{s,i} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \right) dydt + \int_{Y_s} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},0)\, dy = 0 \tag{5.2}$$

для произвольной функции $\boldsymbol{\varphi} \in L^2((0,T);H(Y_s))$ такой, что $\partial \boldsymbol{\varphi}/\partial t \in L^2(Y_s \times (0,T))$ и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},T) = 0$. В (5.2) $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — ортонормированный базис декартовой системы координат.

В самом деле, тождество (5.2) можно переписать в виде

$$\int_{Y_s} \int_{\tau}^{T} \left(\rho_s \frac{\partial \boldsymbol{W}^{s,i}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t) - \lambda_1 \nabla \boldsymbol{W}^{s,i}(\boldsymbol{y},t-\tau) : \nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},t) \right) dydt$$

$$+ \int_{Y_s} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},\tau)\, dy = 0,$$

если считать $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},t) = 0$ при $t \geq T$. Подставляя представление (5.1) в интегральное тождество (5.2), меняя порядок интегрирования в интегралах по времени и учитывая последнее тождество, убеждаемся в справедливости интегрального тождества (4.13). Для решения тождества (5.2) воспользуемся методом Галёркина. Пусть $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полный базис в пространстве $H(Y_s)$, ортонормированный в скалярном произведении пространства $L^2(Y_s)$. Тогда приближенные решения $\boldsymbol{V}_i^N(\boldsymbol{y},t) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(t) \boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{y})$ интегрального тождества (5.2) определяются из решения задачи Коши

$$\begin{gathered} \rho_s \frac{d^2 c_k}{dt^2} = -\lambda_1 \sum_{m=1}^{N} c_m \int_{Y_s} \nabla \boldsymbol{\psi}_m : \nabla \boldsymbol{\psi}_k\, dy, \\ c_k(0) = 0, \quad \frac{dc_k}{dt}(0) = \int_{Y_s} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_k\, dy, \quad k = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Решение задачи Коши (5.3) существует на произвольном интервале времени $(0,T)$, единственно и бесконечно дифференцируемо. Если умножить k-е уравнение в (5.3) на dc_k/dt, просуммировать по всем k и результат проинтегрировать по времени в пределах от 0 до t, то получим хорошо известную энергетическую оценку

$$\int_{Y_s} \left(\rho_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}_i^N}{\partial t}(\boldsymbol{y},t) \right)^2 + \lambda_1 \big(\nabla \boldsymbol{V}_i^N(\boldsymbol{y},t) \big)^2 \right) dy = \sum_{k=1}^{N} \int_{Y_s} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_k)^2\, dy \leq 1 - m.$$

С помощью этой оценки и стандартных методов (см. [10]) доказывается, что из последовательности приближенных решений $\{\boldsymbol{V}_i^N\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L^2((0,T);H(Y_s))$ к решению $\boldsymbol{W}^{s,i}$ интегрального тождества (5.2) так, что производные по времени $\partial \boldsymbol{V}_i^N/\partial t$ слабо сходятся в $L^2(Y_s \times (0,T))$ к производной $\partial \boldsymbol{W}^{s,i}/\partial t$ и

$$\int_{Y_s} \left(\rho_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{W}^{s,i}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t) \right)^2 + \lambda_1 (\nabla \boldsymbol{W}^{s,i}(\boldsymbol{y},t))^2 \right) dy \leq 1 - m. \tag{5.4}$$

Таким образом, формулу (5.1) можно дифференцировать по времени. При этом $\partial \boldsymbol{w}^s/\partial t = \langle \partial \boldsymbol{W}/\partial t\rangle_{Y_s}$ и уравнение (1.17) следует из последнего равенства, если положить

$$\mathbb{B}_1^s(t) = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{W}^{s,i}}{\partial t} \right\rangle_{Y_s} (t) \otimes \boldsymbol{e}_i. \tag{5.5}$$

В формуле (5.5) через $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы, обозначена матрица такая, что действие этой матрицы на вектор $\boldsymbol{c}$ дается выражением $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$.

Замечание 5.1. Очевидно, что основная трудность в доказательстве леммы заключена в свойствах пространства $H(Y_s)$. А именно, пространство $H(Y_s)$ должно быть непустым. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть малый шар $G \subset Y_s$ и решить в G задачу Стокса

$$\Delta \boldsymbol{\psi} - \nabla q = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \boldsymbol{\psi}|_{\partial G} = 0,$$

с гладкой финитной в G функцией $\boldsymbol{g}$ и продолжить $\boldsymbol{\psi}$ в Y_s нулем вне G. Легко видеть, что построенная таким образом функция $\boldsymbol{\psi}$ принадлежит пространству $H(Y_s)$.

2. Если $\lambda_1 = 0$, то для решения задачи (4.5), (4.10)–(4.12) в первую очередь определим давление $R^s(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ как решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в области Y_s как

$$R^s(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} R_{s,i}(\boldsymbol{y}) z_i^s(\boldsymbol{x}, t),$$

где $R_{s,i}(\boldsymbol{y})$ — решения задач

$$\Delta_y R_{s,i} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s; \quad \nabla_y R_{s,i} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma; \quad \langle R_{s,i}\rangle_{Y_s} = 0. \tag{5.6}$$

Формула (1.18) есть результат интегрирования уравнения (4.10) по области Y_s и

$$\mathbb{B}_2^s = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla R_{s,i}(\boldsymbol{y})\rangle_{Y_s} \otimes \boldsymbol{e}_i, \tag{5.7}$$

где симметричная матрица $\mathbb{B} = ((1-m)\mathbb{I} - \mathbb{B}_2^s)$ строго положительно определена. Действительно, пусть $\widetilde{R} = \sum\limits_{i=1}^{3} R_{s,i}\xi_i$ для произвольного единичного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Тогда

$$(\mathbb{B} \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \langle (\boldsymbol{\xi} - \nabla \widetilde{R})^2 \rangle_{Y_f} = 0,$$

если и только если $\widetilde{R}$ — линейная функция переменной $\boldsymbol{y}$. С другой стороны, в силу предположения о структуре элементарной ячейки Y_s линейными периодическими в Y_s функциями могут быть только постоянные. Наконец, условие нормировки $\langle R_{s,i}\rangle_{Y_s} = 0$ влечет равенство $\widetilde{R} = 0$. Однако это невозможно, поскольку функции $R_{s,i}$ линейно независимые. □

§ 6. Доказательства теорем 6 и 7

Доказательства этих теорем повторяют доказательства теорем 4 и 5. Здесь необходимо решить систему микроскопических уравнений (4.5), (4.14)–(4.18) и далее воспользоваться формулой

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^f}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} \right\rangle_{Y_f}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{B}_1^f(t) = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{W}^{f,i}}{\partial t} \right\rangle_{Y_f} (t) \otimes \boldsymbol{e}_i, \tag{6.1}$$

$$\mathbb{B}_2^f = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla R_{f,i} \rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{e}_i, \tag{6.2}$$

где 1-периодические по переменной y функции $\boldsymbol{W}^{f,i}(\boldsymbol{y},t)$ суть решения начально-краевых задач

$$\rho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{f,i}}{\partial t^2} - \mu_1 \Delta \frac{\partial \boldsymbol{W}^{f,i}}{\partial t} + \nabla R^{f,i} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f,\ t > 0, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^{f,i} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f,\ t > 0, \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{W}^{f,i} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma,\ t > 0, \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{W}^{f,i}(\boldsymbol{y},0) = 0, \quad \rho_f \frac{\partial \boldsymbol{W}^{f,i}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \tag{6.6}$$

а 1-периодические по переменной y функции $R_{f,i}(\boldsymbol{y})$ суть решения задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta_y R_{f,i} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f; \quad \nabla_y R_{f,i} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma; \quad \langle R_{f,i} \rangle_{Y_f} = 0. \quad \square \tag{6.7}$$

§ 7. Доказательство теоремы 8

Для вывода усредненного закона сохранения импульса в форме (1.23) необходимо решить систему микроскопических уравнений (4.5), (4.19), дополненную начальными условиями (4.20), и воспользоваться формулой $\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{W} \rangle_Y$.

Пусть

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \big(\boldsymbol{W}^{z,i}(\boldsymbol{y}, t-\tau) z_i(\boldsymbol{x},\tau) + \boldsymbol{W}^{F,i}(\boldsymbol{y}, t-\tau) F_i(\boldsymbol{x},\tau)\big)\, d\tau,$$

$$R = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \big(R^{z,i}(\boldsymbol{y}, t-\tau) z_i(\boldsymbol{x},\tau) + R^{F,i}(\boldsymbol{y}, t-\tau) F_i(\boldsymbol{x},\tau)\big)\, d\tau,$$

где

$$\boldsymbol{z}(x,t) = \sum_{i=1}^{3} z_i \boldsymbol{e}_i = \nabla \left(\frac{1}{m} p_f + \alpha_{\theta f} \theta \right), \quad \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} F_i \boldsymbol{e}_i.$$

Тогда 1-периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\{\boldsymbol{W}^{j,i}(\boldsymbol{y},t),\ R^{j,i}(\boldsymbol{y},t)\}$ $(j = s, F,\ i = 1,2,3)$ находятся как решения системы уравнений

$$\operatorname{div}_y \left(\mu_1 \chi \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{j,i}}{\partial t} \right) + \lambda_1 (1-\chi) \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{j,i}) - R^{j,i} \mathbb{I} \right) = \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{j,i}}{\partial t^2}, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^{j,i} = 0 \tag{7.2}$$

в области Y для $t > 0$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\boldsymbol{W}^{z,i}(\boldsymbol{y},0) = 0, \quad \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \boldsymbol{W}^{p,i}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0) = -\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{x} \in Y, \tag{7.3}$$

$$\boldsymbol{W}^{F,i}(\boldsymbol{y},0)=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{W}^{F,i}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{x}\in Y. \tag{7.4}$$

Таким образом,

$$\mathbb{B}(t)=\sum_{i=1}^{3}\Big\langle\frac{\partial \boldsymbol{W}^{z,i}}{\partial t}\Big\rangle_Y(t)\otimes\boldsymbol{e}_i, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\sum_{i=1}^{3}\Big\langle\frac{\partial \boldsymbol{W}^{F,i}}{\partial t}\Big\rangle_Y(t-\tau)F_i(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau. \tag{7.6}$$

Существование и единственность обобщенных решений периодических начально-краевых задач для функций $\{\boldsymbol{W}^{j,i}(\boldsymbol{y},t),\, R^{j,i}(\boldsymbol{y},t)\}$ $(j=s,F,\ i=1,2,3)$ следуют непосредственно из соответствующих энергетических тождеств

$$\frac{1}{2}\int_Y\bigg(\rho(\boldsymbol{y})\Big(\frac{\partial \boldsymbol{W}^{j,i}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big)^2+\lambda_1 D(y,\boldsymbol{W}^{j,i}(\boldsymbol{y},t)):D(y,\boldsymbol{W}^{j,i}(\boldsymbol{y},t))\bigg)\,dy$$
$$+\int_0^t\int_Y\mu_1 D\Big(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}^{j,i}}{\partial \tau}(\boldsymbol{y},\tau)\Big):D\Big(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}^{j,i}}{\partial \tau}(\boldsymbol{y},\tau)\Big)\,dyd\tau=\frac{1}{2}\gamma^{(j)}$$

для $i=1,2,3$ и $j=z,F$. Здесь $\gamma^{(z)}=\langle 1/\rho\rangle_Y$, $\gamma^{(F)}=\langle\rho\rangle_Y$. $\square$

§ 8. Доказательство теоремы 9

Усредненное уравнение теплопроводности (1.24) есть макроскопическое уравнение теплопроводности (4.22), в котором выражение $\langle\varkappa_0\nabla_y\Theta\rangle_Y$ заменено выражением $\langle\varkappa_0\nabla_y\Theta\rangle_Y=\mathbb{B}_0^{\theta}\cdot\nabla\theta$. Последняя формула есть результат решения микроскопического уравнения теплопроводности (4.21) в форме

$$\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{3}\Theta_i(\boldsymbol{y})\frac{\partial\theta}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t),$$

где Θ_i, $i=1,2,3$, суть периодические решения уравнения

$$\operatorname{div}_y\{\varkappa_0(\nabla_y\Theta_i+\boldsymbol{e}_i)\}=0$$

в области Y. При этом

$$\mathbb{B}^{\theta}=\hat{\varkappa}_0\mathbb{I}+\mathbb{B}_0^{\theta},\quad \mathbb{B}_0^{\theta}=\sum_{i=1}^{3}\nabla_y\langle\Theta_i\rangle_Y\otimes\boldsymbol{e}_i.\quad\square \tag{8.1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meirmanov A. M., Sazhenkov S. A.* Generalized solutions to the linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid // Electron. J. Diff. Eqns. 2007. N 41. P. 1–29.
2. *Мейрманов А. М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 645–667.
3. *Мейрманов А. М.* Математическое моделирование быстропротекающих процессов фильтрации и акустики в пористых средах // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 5. С. 605–608.
4. *Meirmanov A.* Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media // Euro. J. Appl. Math. 2008. V. 19. P. 259–284.
5. *Мейрманов А. М.* Закон Дарси в неизотермических пористых средах // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 141–154.

6. *Мейрманов А. М.* Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термоупругости Био // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 3. С. 45–68.

7. *Мейрманов А. М.* Неизотермическая фильтрация и сейсмоакустика в пористых грунтах: уравнения термо-вязкоупругости и уравнения Ламэ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2008. Т. 261. С. 210–219.

8. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.

9. *Lukkassen, D., Nguetseng, G., Wall P.* Two-scale convergence // Int. J. Pure Appl. Math. 2002. V. 2, N 1. P. 35–86.

10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

11. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. Math. Pures Appl. 1985. V. 64. P. 31–75.

12. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.

Статья поступила 21 октября 2007 г., окончательный вариант — 5 мая 2009 г.

Мейрманов Анварбек Мукатович
Белгородский гос. университет, ул. Победы, 85, Белгород 308015
meirmanov@bsu.edu.ru