Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин

Аннотация. Говорят, что конечная группа G обладает свойством C_π для некоторого множества π простых чисел, если G обладает ровно одним классом сопряженных π-холловых подгрупп. В статье получен критерий наличия свойства C_π в конечной группе G в терминах некоторого нормального ряда этой группы.

Ключевые слова: холлова подгруппа, сопряженность холловых подгрупп, свойство C_π

Ю. Л. Ершову в связи с его 70-летием

Введение

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π, через $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. В соответствии с [1] будем говорить, что группа G *обладает свойством E_π* (или, короче, $G \in E_\pi$), если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством C_π* ($G \in C_\pi$). Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством D_π* ($G \in D_\pi$). Группу со свойством E_π (C_π, D_π) будем называть также *E_π-группой* (соответственно *C_π-, D_π-группой*).

Пусть A, B, H — подгруппы группы G такие, что $B \trianglelefteq A$. Через $N_H(A/B)$ обозначим $N_H(A) \cap N_H(B)$. Тогда любой элемент $x \in N_H(A/B)$ на фактор-группе A/B индуцирует автоморфизм, действующий по правилу $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$. Таким образом, определен гомоморфизм $N_H(A/B) \to \mathrm{Aut}(A/B)$, образ которого обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$ и называется *группой H-индуцированных автоморфизмов на секции A/B*, а ядро обозначается через $C_H(A/B)$. Если $B = 1$, то $\mathrm{Aut}_H(A/B)$ будет обозначаться через $\mathrm{Aut}_H(A)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00322 и 10–01–00391), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.5191). Первый автор поддержан также премией фонда Бальзана, присужденной Пьеру Делиню в 2004 г., и Лаврентьевским грантом для коллективов молодых ученых СО РАН (постановление Президиума СО РАН № 43 от 04.02.2010).

Пусть множество π фиксировано. Доказано, что класс всех D_π-групп замкнут относительно гомоморфных образов, нормальных подгрупп (mod CFSG[1)], [2, теорема 7.7] или [3, следствие 1.3]) и расширений (mod CFSG, [2, теорема 7.7]). Таким образом, конечная группа G обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда любой композиционный фактор S группы G обладает этим свойством. Известно также, что класс E_π-групп замкнут относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов (см. лемму 4(1)), но, вообще говоря, не замкнут относительно расширений [4, гл. V, пример 2]. В работах [5, теорема 3.5] и [6, следствие 6] доказано, что если $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ — композиционный ряд конечной группы G, являющийся уплотнением некоторого ее главного ряда, то G обладает свойством E_π тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(G_i/G_{i-1})$ обладает свойством E_π для любого $i = 1, \dots, n$.

Класс C_π-групп замкнут относительно расширений (см. лемму 5), но, вообще говоря, не замкнут относительно нормальных подгрупп (см. пример ниже). В настоящей работе с использованием классификации конечных простых групп мы покажем, что класс C_π-групп замкнут относительно гомоморфных образов (mod CFSG, см. лемму 9), и дадим критерий того, что конечная группа обладает свойством C_π в терминах некоторого ее нормального ряда. Основным результатом является следующая

Теорема 1 (mod CFSG). *Пусть π — некоторое множество простых чисел, H — π-холлова и A — нормальная подгруппы C_π-группы G. Тогда $HA \in C_\pi$.*

Следствие 2 (критерий сопряженности холловых подгрупп, mod CFSG). *Пусть π — некоторое множество простых чисел, A — нормальная подгруппа группы G. Тогда $G \in C_\pi$ в том и только в том случае, если $G/A \in C_\pi$ и для π-холловой*[1)] *подгруппы K/A группы G/A ее полный прообраз K обладает свойством C_π. В частности, если $|G : A|$ является π'-числом, то $G \in C_\pi$ тогда и только тогда, когда $A \in C_\pi$.*

Опираясь на это утверждение, в конце статьи мы приведем алгоритм, сводящий проверку свойства C_π в конечной группе к проверке этого свойства в некоторых почти простых группах. В связи с теоремой 1 отметим, что авторам неизвестно ни одного контрпримера к следующей гипотезе.

Гипотеза 3. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, A — (необязательно нормальная) подгруппа конечной C_π-группы G, содержащая π-холлову подгруппу группы G. Тогда $A \in C_\pi$.*

В формулировке гипотезы условие, что подгруппа A содержит π-холлову подгруппу группы G, нельзя ослабить, заменив условием, что индекс подгруппы A является π'-числом. Действительно, рассмотрим группу $B_3(q) \simeq \mathrm{P}\Omega_7(q)$, где $q - 1$ делится на 12 и не делится на 8 и 9. Ввиду [2, лемма 6.2] группа $\mathrm{P}\Omega_7(q)$ является $C_{\{2,3\}}$-группой и ее $\{2,3\}$-холлова подгруппа содержится в мономиальной подгруппе. С другой стороны, хорошо известно, что группа $\Omega_7(2)$ вкладывается в $\mathrm{P}\Omega_7(q)$ и при указанных выше условиях на q ее индекс не делится на 2 и 3. Однако $\Omega_7(2)$ не содержит $\{2,3\}$-холловых подгрупп, т. е. не является даже $E_{\{2,3\}}$-группой.

[1)] Выражение (mod CFSG) в статье означает, что соответствующий результат доказан с использованием классификации конечных простых групп

[1)] В силу того, что $G/A \in C_\pi$, фразу «для π-холловой подгруппы K/A группы G/A» в формулировке следствия можно интерпретировать в значении «для любой» и «для некоторой», обе интерпретации будут верны.

1. Обозначения и предварительные результаты

Через π всегда обозначается некоторое множество простых чисел, и термин «группа» всегда означает конечную группу.

Следующие утверждения хорошо известны, и их доказательство не требует использования классификации конечных простых групп.

Лемма 4 (см. [4, гл. IV, (5.11), гл. V, теорема 3.7]). *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H — π-холлова подгруппа группы G, то $H\cap A$ является π-холловой подгруппой в A, а фактор-группа HA/A — π-холловой подгруппой в G/A.*

(2) *Если все факторы некоторого субнормального ряда группы G являются π- или π'-группами, то $G \in D_\pi$.*

Отметим, что утверждение (2) леммы 4 следует из известной теоремы С. А. Чунихина о π-разрешимых группах и теоремы Фейта — Томпсона о разрешимости конечных групп нечетного порядка.

Лемма 5 (С. А. Чунихин, см. также [1, теоремы C1, C2] или [4, гл. V, (3.12)]). *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Если A и G/A обладают свойством C_π, то $G \in C_\pi$.*

Лемма 6 [3, лемма 2.1(e)]. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G такая, что G/A является π-группой, M — π-холлова подгруппа группы A. Тогда π-холлова подгруппа H группы G, удовлетворяющая условию $H\cap A = M$, существует, если и только если группа G при действии сопряжениями оставляет инвариантным множество $\{M^a \mid a \in A\}$.*

Пример. Пусть $\pi = \{2,3\}$. Пусть $G = \mathrm{GL}_5(2) = \mathrm{SL}_5(2)$ — группа порядка $99999360 = 2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 31$. Пусть $\iota : x \in G \mapsto (x^t)^{-1}$ и $\widehat{G} = G \leftthreetimes \langle\iota\rangle$ — естественное полупрямое произведение. Как следует из [7, теорема 1.2], в группе G имеются π-холловы подгруппы, и всякая такая подгруппа является стабилизатором некоторого ряда подпространств $V = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 = V$, где V — естественный модуль группы G и $\dim V_k/V_{k-1} \in \{1,2\}$ для любого $k = 1,2,3$. Следовательно, в G имеется ровно три класса сопряженных π-холловых подгрупп с представителями

$$H_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} & & * \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & * \\ & \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} & \\ 0 & & \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} & & * \\ & \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} & \\ 0 & & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $N_G(H_k) = H_k$, $k = 1, 2, 3$, поскольку подгруппа H_k является параболической. По лемме 4(1) для каждой π-холловой подгруппы H группы $\widehat{G}$ подгруппа $H \cap G$ сопряжена с одной из подгрупп H_1, H_2, H_3. Класс, содержащий H_1, инвариантен относительно ι, значит, по лемме 6 существует π-холлова подгруппа H группы $\widehat{G}$, удовлетворяющая условию $H \cap G = H_1$, и, более того, $H = N_{\widehat{G}}(H_1)$. Классы, содержащие H_2 и H_3, переставляются автоморфизмом ι. Поэтому из лемм 4(1) и 6 вытекает, что эти подгруппы не содержатся ни в каких π-холловых подгруппах группы $\widehat{G}$. Таким образом, группа $\widehat{G}$ содержит ровно один класс π-холловых подгрупп и, следовательно, обладает свойством C_π, а ее нормальная подгруппа G не обладает этим свойством.

Лемма 7. *Пусть A — нормальная и H — π-холлова подгруппы C_π-группы G. Тогда каждая из групп $N_G(HA)$ и $N_G(H \cap A)$ обладает свойством C_π.*

Доказательство. Заметим, что группы $N_G(HA)$ и $N_G(H \cap A)$ содержат подгруппу H и потому обладают свойством E_π. Пусть K — π-холлова подгруппа группы $N_G(HA)$. Так как $HA \trianglelefteq N_G(HA)$ и $|N_G(HA) : HA|$ — π'-число, имеем $K \leq HA$ и $KA = HA$. Если $x \in G$ — элемент такой, что $K = H^x$, то $(HA)^x = H^xA = KA = HA$ и тем самым $x \in N_G(HA)$. Следовательно, $N_G(HA) \in C_\pi$.

Пусть K — π-холлова подгруппа группы $N_G(H \cap A)$. Тогда $K(H \cap A) = K$ и $K \cap A = H \cap A$. Если $x \in G$ — элемент такой, что $K = H^x$, то $(H \cap A)^x = H^x \cap A = K \cap A = H \cap A$ и, таким образом, $x \in N_G(H \cap A)$. Следовательно, $N_G(H \cap A) \in C_\pi$. $\square$

Лемма 8 ([6, следствие 9] mod CFSG). *Любая π-холлова подгруппа в гомоморфном образе E_π-группы G является образом некоторой π-холловой подгруппы группы G.*

Из леммы 8 легко следует, что свойство C_π сохраняется при гомоморфизмах.

Лемма 9 (mod CFSG). *Пусть A — нормальная подгруппа C_π-группы G. Тогда $G/A \in C_\pi$.*

Доказательство. Пусть $G/A = \overline{G}$. Поскольку все π-холловы подгруппы группы G сопряжены, достаточно показать, что для любой π-холловой подгруппы $\overline{K}$ группы $\overline{G}$ существует π-холлова подгруппа U группы G такая, что $UA/A = \overline{K}$. Существование такой подгруппы U утверждается в лемме 8. $\square$

Если G — группа, то под *G-классом π-холловых подгрупп* будем понимать класс сопряженных π-холовых подгрупп группы G. Пусть A — субнормальная подгруппа E_π-группы G. Подгруппу группы A вида $H \cap A$, где H — π-холлова подгруппа группы G, будем называть *G-индуцированной π-холловой подгруппой* группы A. Таким образом, множество вида $\{(H \cap A)^a \mid a \in A\}$, где H — некоторая π-холлова подгруппа из G, называется *A-классом G-индуцированных π-холловых подгрупп*. Через $k_\pi^G(A)$ будем обозначать число всех A-классов G-индуцированных π-холловых подгрупп. Пусть $k_\pi(G) = k_\pi^G(G)$ — число классов сопряженности π-холловых подгрупп группы G. Ясно, что $k_\pi^G(A) \leq k_\pi(A)$.

Напомним, что конечная группа G называется *почти простой*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой S, причем S является неабелевой простой группой (эквивалентно с точностью до изоморфизма $S \simeq \mathrm{Inn}(S) \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой неабелевой простой группы S). Доказательство теоремы 1 опирается на следующий результат о числе классов π-холловых подгрупп в конечных простых группах.

Теорема 10 ([3, теорема 1.1], mod CFSG). *Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — почти простая конечная E_π-группа с (неабелевым простым) цоколем S. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $2 \notin \pi$, то $k_\pi^G(S) = 1$.*

(2) *Если $3 \notin \pi$, то $k_\pi^G(S) \in \{1, 2\}$.*

(3) *Если $2, 3 \in \pi$, то $k_\pi^G(S) \in \{1, 2, 3, 4, 9\}$.*

В частности, $k_\pi^G(S)$ является π-числом.

Лемма 11. *Пусть H — π-холлова, A — нормальная подгруппы группы G и $HAC_G(A) \trianglelefteq G$ (это условие выполнено, если $HA \trianglelefteq G$). Тогда A-класс π-холловых подгрупп является классом G-индуцированных π-холловых подгрупп, если и только если он H-инвариантен.*

Доказательство. Если K — π-холлова подгруппа группы G, то справедливо включение $K \leq HAC_G(A)$ и поэтому $KAC_G(A) = HAC_G(A)$. Поскольку A-класс $\{(K \cap A)^a \mid a \in A\}$ является K-инвариантным, он инвариантен относительно $HAC_G(A) = KAC_G(A)$ и, следовательно, относительно H.

Обратно, не уменьшая общности, можно считать, что $G = HA$, и лемма следует из леммы 6. $\square$

Лемма 12. *Пусть H — π-холлова, A — нормальная, подгруппы группы G и $HA \trianglelefteq G$. Тогда $k_\pi^G(A) = k_\pi^{HA}(A)$.*

Доказательство. Поскольку HA — нормальная подгруппа группы G, всякая π-холлова подгруппа группы G содержится в HA. Поэтому имеет место равенство $k_\pi^G(A) = k_\pi^{HA}(A)$. $\square$

Лемма 13. *Пусть, H — π-холлова, A — нормальная подгруппы группы G и $HA \trianglelefteq G$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *$k_\pi^G(A) = 1$.*

(2) *$HA \in C_\pi$.*

(3) *Любые две π-холловы подгруппы группы G сопряжены элементом из A.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если K — π-холлова подгруппа группы HA, то в силу (1) группы $H \cap A$ и $K \cap A$ сопряжены в A. Можно считать, что $H \cap A = K \cap A$. Тогда H и K содержатся в $N_{HA}(H \cap A)$. В силу рассуждения Фраттини $HA = N_{HA}(H \cap A)A$. Поэтому

$$N_{HA}(H\cap A)/N_A(H\cap A) = N_{HA}(H\cap A)/N_{HA}(H\cap A)\cap A \simeq N_{HA}(H\cap A)A/A = HA/A$$

является π-группой. Таким образом, $N_{HA}(H \cap A)$ обладает нормальным рядом

$$N_{HA}(H \cap A) \geq N_A(H \cap A) \geq H \cap A \geq 1,$$

каждый фактор которого является π- или π'-группой, и по лемме 4(2) обладает свойством D_π. В частности, H и K сопряжены в $N_{HA}(H \cap A)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) и (3) $\Rightarrow$ (1) очевидны. $\square$

Лемма 14. *Пусть H — π-холлова и $A = A_1 \times \dots \times A_s$ — нормальная подгруппы группы G и $G = HAC_G(A)$. Тогда для любого $i = 1, \dots, s$ имеют место следующие утверждения.*

(1) *$N_G(A_i) = N_H(A_i)AC_G(A)$.*

(2) *$N_H(A_i)$ — π-холлова подгруппа группы $N_G(A_i)$.*

(3) *$k_\pi^{\mathrm{Aut}_G(A_i)}(\mathrm{Inn}(A_i)) = k_\pi^{N_G(A_i)}(A_i)$.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно следует из равенства $G = HAC_G(A)$ и включения $AC_G(A) \leq N_G(A_i)$. Из утверждения (1) и равенства

$N_H(A_i) \cap AC_G(A) = H \cap AC_G(A)$ мы получаем, что число $|N_G(A_i) : N_H(A_i)| = |AC_G(A) : (H \cap AC_G(A))|$ является π'-числом, откуда следует (2).

Пусть $\rho : A_i \to \mathrm{Inn}(A_i)$ — естественный эпиморфизм. Поскольку $\mathrm{Ker}(\rho) = Z(A_i)$ — абелева группа, ядро эпиморфизма ρ содержит единственную π-холлову подгруппу, лежащую в каждой π-холловой подгруппе группы A_i. Поэтому отображение $H \mapsto H\rho$ задает биекцию между множествами π-холловых подгрупп групп A_i и $\mathrm{Inn}(A_i)$, а также индуцирует биекцию (обозначим ее символом σ) между множествами Δ и Γ всех A_i- и $\mathrm{Inn}(A_i)$-классов π-холловых подгрупп соответственно. Покажем, что ограничение отображения σ на множество Δ_0 всех A_i-классов $N_G(A_i)$-индуцированных π-холловых подгрупп биективно отображает Δ_0 на множество Γ_0 всех $\mathrm{Inn}(A_i)$-классов $\mathrm{Aut}_G(A_i)$-индуцированных π-холловых подгрупп. Поскольку $A = A_1 \times \dots \times A_s$, утверждение (1) влечет равенство $N_G(A_i) = N_H(A_i)A_iC_G(A_i)$. Группа $N_G(A_i)$ посредством сопряжений π-холловых подгрупп группы A_i переставляет элементы из Δ и, таким образом, действует на Δ. В силу леммы 11 множество Δ_0 — это объединение всех одноэлементных орбит этого действия. Определим с помощью биекции σ эквивалентное действие группы $N_G(A_i)$ на множестве Γ. Поскольку $C_G(A_i)$ лежит в ядре обоих действий, определены индуцированные действия группы $\mathrm{Aut}_G(A_i) = N_G(A_i)/C_G(A_i)$ на Δ и Γ. Легко видеть, что определенное таким образом действие группы $\mathrm{Aut}_G(A_i)$ на множестве Γ совпадает с естественным действием этой группы на множестве $\mathrm{Inn}(A_i)$-классов сопряженных π-холловых подгрупп. Так как группа

$$\mathrm{Aut}_G(A_i)/\,\mathrm{Inn}(A_i) \simeq N_G(A_i)/A_iC_G(A_i) \simeq N_H(A_i)/(N_H(A_i) \cap A_iC_G(A_i))$$

является π-группой, по лемме 11 множество Γ_0 совпадает с объединением одноэлементных орбит группы $\mathrm{Aut}_G(A_i)$ на Γ. Но тогда в силу определения этого действия Γ_0 есть образ множества Δ_0 относительно σ. Так как σ — это биекция, имеем

$$k_\pi^{N_G(A_i)}(A_i) = |\Delta_0| = |\Gamma_0| = k_\pi^{\mathrm{Aut}_G(A_i)}(\mathrm{Inn}(A_i)).$$

Утверждение (3) доказано. $\square$

Пусть $A = A_1 \times \dots \times A_s$ и для любого $i = 1, \dots, s$ через $\mathscr{K}_i$ обозначен некоторый A_i-класс π-холловых подгрупп подгруппы A_i. *Произведением классов* $\mathscr{K}_1, \dots, \mathscr{K}_s$ будем называть множество

$$\mathscr{K}_1 \times \dots \times \mathscr{K}_s = \{\langle H_1, \dots, H_s \rangle \mid H_i \in \mathscr{K}_i,\ i = 1, \dots, s\}.$$

Ясно, что $\mathscr{K}_1 \times \dots \times \mathscr{K}_s$ — A-класс π-холловых подгрупп группы A. Ясно также, что если A — нормальная подгруппа группы G, то каждый A-класс G-индуцированных π-холловых подгрупп является произведением некоторых A_1-, …, A_s-классов G-индуцированных π-холловых подгрупп, в частности, для любого $i = 1, \dots, s$ справедливо неравенство $k_\pi^G(A_i) \le k_\pi^G(A)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Лемма 15. *Пусть H — π-холлова и $A = A_1 \times \dots \times A_s$ — нормальная подгруппы группы G. Предположим также, что подгруппы $A_1, \dots, A_s$ нормальны в G и $G = HAC_G(A)$. Тогда $k_\pi^G(A) = k_\pi^G(A_1) \cdot \ldots \cdot k_\pi^G(A_s)$.*

Доказательство. Две π-холловы подгруппы P и Q группы A сопряжены в A тогда и только тогда, когда π-холловы подгруппы $P \cap A_i$ и $Q \cap A_i$ группы A_i сопряжены в A_i для любого $i = 1, \dots, s$. Для доказательства леммы достаточно показать, что произведение любых A_1-, …, A_s-классов G-индуцированных π-холловых подгрупп является A-классом также G-индуцированных π-холловых подгрупп. Пусть $U_1,\dots,U_s$ — G-индуцированные π-холловы подгруппы групп $A_1,\dots,A_s$ соответственно. Покажем, что

$$U = \langle U_1,\dots,U_s\rangle = U_1\times\dots\times U_s$$

является G-индуцированной π-холловой подгруппой группы A. В силу леммы 11 достаточно понять, что для любого $h\in H$ найдется элемент $a\in A$, для которого $U^h=U^a$. Так как $U_i=K_i\cap A_i$ для подходящей π-холловой подгруппы K_i группы G, множество $\{U_i^{x_i}\mid x_i\in A_i\}$ является инвариантным относительно подгруппы K_i и, следовательно, группы $K_iA=HA$. В частности, $U_i^h=U_i^{a_i}$ для некоторого $a_i\in A_i$. Таким образом,

$$U^h = U_1^h\times\dots\times U_s^h = U_1^{a_1}\times\dots\times U_s^{a_s} = U_1^a\times\dots\times U_s^a = U^a,$$

где $a=a_1\dots a_s\in A$. □

Лемма 16. *Пусть H — π-холлова, $A=A_1\times\dots\times A_s$ — нормальная подгруппы в G, действующей сопряжениями транзитивно на множестве $\{A_1,\dots,A_s\}$, и $G=HAC_G(A)$. Тогда $k_\pi^G(A)=k_\pi^G(A_i)=k_\pi^{N_G(A_i)}(A_i)$ для любого $i=1,\dots,s$.*

Доказательство. Покажем, что всякая G-индуцированная π-холлова подгруппа группы A_i является $N_G(A_i)$-индуцированной. Действительно, если K — π-холлова подгруппа группы G, то $G=KAC_G(A)$ и по лемме 14 справедливо равенство $N_G(A_i)=N_K(A_i)AC_G(A)$, причем $K\cap A_i=N_K(A_i)\cap A_i$ и $N_K(A_i)$ — π-холлова подгруппа группы $N_G(A_i)$. Поэтому любая G-индуцированная π-холлова подгруппа группы A_i является также $N_G(A_i)$-индуцированной, в частности $k_\pi^G(A_i)\le k_\pi^{N_G(A_i)}(A_i)$.

Покажем, что если $x,y\in G$ лежат в одном смежном классе группы G по $N_G(A_1)$, то для любой G-индуцированной π-холловой подгруппы U_1 группы A_1 подгруппы U_1^x и U_1^y сопряжены в $A_i=A_1^x=A_1^y$. Достаточно показать, что подгруппы U_1 и U_1^t, где $t=xy^{-1}\in N_G(A_1)$, сопряжены в A_1. Пусть $t=hac$, $a\in A$, $c\in C_G(A)$, $h\in H$. Поскольку подгруппы U_1^h и U_1^{hac} сопряжены в A_1, достаточно показать, что U_1 и U_1^h сопряжены в A_1. Так как $(ac)^{h^{-1}}\in AC_G(A)\le N_G(A_1)$, элемент h также нормализует подгруппу A_1. Пусть $U_1=U\cap A_1$ для некоторой G-индуцированной π-холловой подгруппы U группы A. Пусть $\mathscr{K}$ — A-класс π-холловых подгрупп, содержащий U, и пусть $\mathscr{K}=\mathscr{K}_1\times\dots\times\mathscr{K}_s$, где $\mathscr{K}_i$ — A_i-класс G-индуцированных π-холловых подгрупп. Ясно, что $U_1\in\mathscr{K}_1$. Поскольку, согласно лемме 11, класс $\mathscr{K}$ является H-инвариантным, группа H действует на множестве $\{\mathscr{K}_1,\dots,\mathscr{K}_s\}$. Элемент h нормализует подгруппу A_1, поэтому стабилизирует A_1-класс $\mathscr{K}_1$. В частности, подгруппы U_1 и U_1^h лежат в $\mathscr{K}_1$ и, значит, сопряжены в A_1.

Пусть $f\in H$ и $A_1^f=A_i$. Для A_1-класса π-холловых подгрупп $\mathscr{K}_1$ определим A_i-класс $\mathscr{K}_1^f$, положив $\mathscr{K}_1^f=\{U_1^f\mid U_1\in\mathscr{K}_1\}$. В силу доказанного выше $\mathscr{K}_1^f$ является A_i-классом G-индуцированных π-холловых подгрупп.

Пусть $h_1=1,h_2,\dots,h_s$ — полная система представителей представителей правых смежных классов H по $N_H(A_1)$. Поскольку группа G действует транзитивно, с точностью до перенумерации можно считать, что $A_i=A_1^{h_i}$ и $(N_G(A_1))^{h_i}=N_G(A_i)$. Поэтому $k_\pi^{N_G(A_1)}(A_1)=k_\pi^{N_G(A_i)}(A_i)$ при $i=1,\dots,s$. Рассмотрим отображение

$$\sigma:\mathscr{K}_1\mapsto\mathscr{K}_1^{h_1}\times\dots\times\mathscr{K}_1^{h_s},$$

сопоставляющее любому A_1-классу $N_G(A_1)$-индуцированных π-холловых подгрупп $\mathscr{K}_1$ некоторый A-класс π-холловых подгрупп. Заметим, что класс $\mathscr{K}_1^{h_1} \times \dots \times \mathscr{K}_1^{h_s}$ всегда H-инвариантен и по лемме 11 является A-классом G-индуцированных π-холловых подгрупп. Заметим также, что отображение σ инъективно, поэтому справедливо неравенство $k_\pi^{N_G(A_1)}(A_1) \leq k_\pi^G(A)$. Рассмотрим ограничение τ отображения σ на множество A_1-классов G-индуцированных π-холловых подгрупп. Для завершения доказательства достаточно показать, что образ τ совпадает с множеством A-классов G-индуцированных π-холловых подгрупп, поскольку в этом случае мы получим неравенство $k_\pi^G(A_1) \geq k_\pi^G(A)$.

Пусть $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \times \dots \times \mathscr{K}_s$ — A-класс G-индуцированных π-холловых подгрупп. Достаточно показать, что $\mathscr{K}_i = \mathscr{K}_1^{h_i}$ для любого $i = 1, \dots, s$. Так как G действует транзитивно на множестве $\{A_1, \dots, A_s\}$, существует такой элемент $g \in G$, что $A_1^g = A_i$. Пусть $g = act$, где $a \in A$, $c \in C_G(A)$ и $t \in H$. Тогда $A_1^t = A_i$ и $t \in N_H(A_1)h_i$. По доказанному $\mathscr{K}_1^t = \mathscr{K}_1^{h_i}$. В силу леммы 11 класс $\mathscr{K}$ является H-инвариантным, следовательно, $\mathscr{K}_i = \mathscr{K}_1^t = \mathscr{K}_1^{h_i}$ и $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1^{h_1} \times \dots \times \mathscr{K}_1^{h_s} = \mathscr{K}_1\tau$. $\square$

2. Критерий сопряженности холловых подгрупп

В этом разделе мы докажем теорему 1, следствие 2 и приведем алгоритм, позволяющий по главному ряду группы G ответить на вопрос, обладает ли группа G свойством C_π.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что теорема неверна и группа G — контрпример наименьшего порядка. Тогда группа G содержит π-холлову подгруппу H и нормальную подгруппу A такие, что HA не обладает свойством C_π. Выберем среди таких групп A минимальную по включению. Пусть K — π-холлова подгруппа группы HA, не сопряженная с H в HA. Процесс уничтожения группы G разобьем на несколько шагов.

Очевидно, что

(1) $HA = KA$,

(2) A — *минимальная нормальная подгруппа группы* G.

В противном случае пусть M — нетривиальная нормальная подгруппа группы G, собственным образом содержащаяся в A. Пусть $\overline{G} = G/M$ и для любой подгруппы B группы G через $\overline{B}$ обозначим группу BM/M. По лемме 9 группа $\overline{G}$ обладает свойством C_π, $\overline{H}$ и $\overline{K}$ — ее π-холловы подгруппы, $\overline{A}$ — нормальная подгруппа, $\overline{HA} = \overline{KA}$ и $|\overline{G}| < |G|$. В силу минимальности контрпримера G группа $\overline{HA}$ обладает свойством C_π. Поэтому подгруппы $\overline{H}$ и $\overline{K}$ сопряжены элементом из $\overline{A}$. Это означает, что подгруппы HM и KM сопряжены элементом из A. Не уменьшая общности, можно считать, что $HM = KM$. В силу выбора подгруппы A группа HM обладает свойством C_π. Но это означает, что H и K сопряжены элементом из $M \leq A$; противоречие.

(3) $A \notin C_\pi$. *В частности, A неразрешима.*

В противном случае по лемме 5 группа HA обладает свойством C_π как расширение C_π-группы с помощью π-группы.

(4) HA — *нормальная подгруппа группы* G.

В противном случае $N_G(HA)$ является собственной подгруппой группы G и по лемме 7 имеем $N_G(HA) \in C_\pi$. Ввиду того, что G — контрпример наименьшего порядка, $HA \in C_\pi$; противоречие.

В силу (2) и (3)

(5) *A является прямым произведением простых неабелевых групп $S_1, \dots, S_m$. Группа G транзитивно действует сопряжениями на множестве $\Omega = \{S_1, \dots, S_m\}$.*

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ — орбиты группы HA на множестве Ω, и пусть $T_j = \langle \Delta_j \rangle$ для любого $j = 1, \dots, s$. Ввиду (4) и (5)

(6) *G транзитивно действует сопряжениями на множестве $\{T_1, \dots, T_s\}$; подгруппа A является прямым произведением групп $T_1, \dots, T_s$, каждая из которых нормальна в HA.*

Пусть $S \in \Omega$ и T — подгруппа, порожденная той из орбит $\Delta_1, \dots, \Delta_s$, которая содержит S. Из леммы 16 вытекает

(7) $k_\pi^{HA}(T) = k_\pi^{HA}(S)$.

Из (7) и лемм 12 и 15 вытекает

(8) $k_\pi^G(A) = k_\pi^{HA}(A) = \left(k_\pi^{HA}(T)\right)^s = \left(k_\pi^{HA}(S)\right)^s$.

Из (8), теоремы 10 и лемм 14 и 16 следует

(9) *$k_\pi^G(A)$ — π-число.*

В силу леммы 11

(10) *HA оставляет инвариантным каждый A-класс G-индуцированных π-холловых подгрупп.*

Поскольку $G \in C_\pi$,

(11) *G действует транзитивно на множестве A-классов G-индуцированных π-холловых подгрупп.*

Ввиду (10) подгруппа HA содержится в ядре этого действия. Теперь в силу (11)

(12) *$k_\pi^G(A)$ — π'-число.*

Из (9) и (12) следует

(13) $k_\pi^G(A) = 1$.

Теперь согласно лемме 13

(14) *$HA \in C_\pi$; противоречие.* $\square$

Доказательство следствия 2. Необходимость. Если $G \in C_\pi$, то по лемме 9 фактор-группа G/A также обладает свойством C_π. Пусть K/A — некоторая π-холлова подгруппа группы G/A. По лемме 8 существует такая π-холлова подгруппа H группы G, что $K = HA$. В силу теоремы 1 группа $K = HA$ обладает свойством C_π.

Достаточность. Пусть H — некоторая π-холлова подгруппа группы K. Поскольку K/A — π-холлова подгруппа группы G/A, то $|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|$ является π'-числом, значит, H является π-холловой подгруппой группы G. В частности, $G \in E_\pi$. Пусть H_1, H_2 — π-холловы подгруппы группы G. Поскольку $G/A \in C_\pi$, подгруппы H_1A/A и H_2A/A сопряжены в G/A и можно считать, что $H_1A = H_2A$. Но $H_1A \in C_\pi$, поэтому H_1 и H_2 сопряжены. Таким образом, $G \in C_\pi$. $\square$

Лемма 17. *Пусть $G = HA$, где H — π-холлова и A — нормальная подгруппы группы G, причем $A = S_1 \times \dots \times S_k$ — прямое произведение простых групп. Тогда $G \in C_\pi$, если и только если $\mathrm{Aut}_G(S_i) \in C_\pi$ для любого $i = 1, \dots, k$.*

Доказательство. В силу теоремы Холла и леммы 5 можно считать, что $S_1, \dots, S_k$ — неабелевы простые группы и, следовательно, множество $\{S_1, \dots, S_k\}$ инвариантно относительно действия сопряжениями группы G и разбивается на орбиты $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Обозначим через S_{i_j} представитель орбиты Ω_j. Из лемм 15 и 16 получаем

$$k_\pi^G(A) = k_\pi^G(S_{i_1}) \cdot \ldots \cdot k_\pi^G(S_{i_m}). \tag{1}$$

Леммы 12 и 13 влекут, что $HA \in C_\pi$ тогда и только тогда, когда $k_\pi^G(A) = 1$ и ввиду равенства (1) тогда и только тогда, когда $k_\pi^G(S_i) = 1$ для любого i. В силу лемм 14 и 16 для любого i справедливы равенства $k_\pi^G(S_i) = k_\pi^{N_G(S_i)}(S_i) = k_\pi^{\mathrm{Aut}_G(S_i)}(S_i)$. Кроме того, поскольку $|\,\mathrm{Aut}_G(S_i) : S_i|$ — π-число, согласно лемме 13 равенство $k_\pi^{\mathrm{Aut}_G(S_i)}(S_i) = 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(S_i) \in C_\pi$. Значит, для любого i равенство $k_\pi^G(S_i) = 1$ верно в том и только в том случае, если $\mathrm{Aut}_G(S_i) \in C_\pi$. □

Теперь мы можем описать алгоритм, сводящий проверку того, обладает ли конечная группа свойством C_π, к проверке наличия свойства C_π в некоторых почти простых группах. Пусть ряд

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n = 1 \tag{2}$$

является главным рядом группы G. Положим $H_1 = G = G_0$. Предположим, что для некоторого $i = 1, \dots, n$ группа H_i построена так, что $G_{i-1} \le H_i$ и H_i/G_{i-1} — π-холлова подгруппа группы G/G_{i-1}. Поскольку ряд (2) является главным, имеет место разложение

$$G_{i-1}/G_i = S_1^i \times \dots \times S_{k_i}^i$$

для некоторых простых групп $S_1^i, \dots, S_{k_i}^i$. Проверяем, верно ли, что

$$\mathrm{Aut}_{H_i}(S_1^i) \in C_\pi, \dots, \mathrm{Aut}_{H_i}(S_{k_i}^i) \in C_\pi.$$

Если это так, то по лемме 17 имеем $H_i/G_i \in C_\pi$ и в качестве H_{i+1} возьмем полный прообраз произвольной π-холловой подгруппы группы H_i/G_i. В противном случае ввиду следствия 2 делаем вывод, что $G \notin C_\pi$, и прерываем процесс. Из следствия 2 вытекает, что группа G обладает свойством C_π в том и только в том случае, когда нам удастся построить группу H_{n+1}. Отметим, что в этом случае H_{n+1} будет π-холловой подгруппой группы G.

Следствие 18. *Если $2 \notin \pi$ или $3 \notin \pi$, то $G \in C_\pi$ тогда и только тогда, когда каждый неабелев композиционный фактор группы G обладает свойством C_π.*

Доказательство. Достаточность вытекает из леммы 5. Докажем необходимость. В силу приведенного алгоритма можно считать, что $S \le G \le \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой конечной неабелевой простой группы S и G/S — π-группа. Нужно показать, что $S \in C_\pi$. Допустим, это не так. Тогда леммы 11 и 13 влекут, что G стабилизирует ровно один класс π-холловых подгрупп группы S. Следовательно, всего классов не меньше трех. С другой стороны, так как $2 \notin \pi$ или $3 \notin \pi$, по теореме 10 число классов π-холловых подгрупп в группе S не превосходит двух; противоречие □

Отметим, что в случае, когда $2 \notin \pi$, следствие немедленно вытекает из [8, теорема A] и леммы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
2. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Contemp. Math. 2006. N 402. P. 229–263.
3. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. (To appear). (Available at http://arxiv.org/abs/0912.1922).

4. *Suzuki M.* Group theory. II. New York: Springer-Verl., 1986.
5. *Gross F.* On the existence of Hall subgroups // J. Algebra. 1986. V. 98, N 1. P. 1–13.
6. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Existence criterion for Hall subgroups of finite groups // J. Group Theory. (To appear). (Available at http://arxiv.org/abs/0803.3868).
7. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.
8. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 79. P. 311–319.

Статья поступила 24 января 2008 г.

Вдовин Евгений Петрович, Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vdovin@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru