Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.5

О ТОЧКАХ ВЕТВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ

Е. А. Севостьянов

Аннотация. Изучаются взаимосвязи между величиной, характеризующей меру искажения семейств кривых при заданном отображении, и структурой множества точек ветвления этого отображения. При $n \geq 3$ установлено, что образ множества точек ветвления открытого дискретного отображения, имеющего изолированную существенно особую точку, является неограниченным множеством в $\mathbb{R}^n$ при условии, что указанное отображение удовлетворяет определенным геометрическим условиям, отвечающим за контроль искажения концентрических колец, центрированных в этой точке.

Ключевые слова: отображение с ограниченным искажением, отображение с конечным искажением, модуль семейства кривых.

1. Введение

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Как обычно, пишем $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \dots , f_n)$ обладают обобщенными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в D в степени n. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

1) $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$,

2) якобиан $J(x, f)$ отображения f в точке $x \in D$ сохраняет знак почти всюду в D,

3) $\|f'(x)\|^n \leq K|J(x, f)|$ при почти всех $x \in D$ с некоторой постоянной $K < \infty$, где, как обычно, $\|f'(x)\| := \sup\limits_{h \in \mathbb{R}^n : |h|=1} |f'(x)h|$ (см., например, [1, гл. I, § 3] либо [2, гл. I, разд. 2, определение 2.1]).

Начало интенсивных исследований пространственных отображений с ограниченным искажением положено Ю. Г. Решетняком. В его работах, в частности, доказаны открытость и дискретность отображений f с ограниченным искажением (см. [1, гл. II, § 6, теоремы 6.3, 6.4]), а также непрерывность f, которая прямо следует из условий 1–3 без соответствующего изначального предположения о ней (см., например, [3, теорема 1]). В контексте исследований, проводимых в настоящей работе, немаловажно подчеркнуть, что каждое отображение с ограниченным искажением удовлетворяет неравенству Е. А. Полецкого (см. [4, § 4, теорема 1]), а именно, если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением, то

$$M(f(\Gamma)) \leq K' \cdot M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K' < \infty$ — некоторая постоянная (см. также [2, гл. II, разд. 8, теорема 8.1]). Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (либо открытого интервала (a, b)) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Изолированная точка x_0 границы ∂D области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *существенно особой точкой* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ отображение f не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Напомним, что $y_0 \in D$ — *точка ветвления* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки y_0 сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать через B_f. В фундаментальной работе [5] (см. соответственно следствия 3.16 и 3.17) доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $n \geq 3$ и $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением, имеющее существенно особую точку $x_0 \in D$. Тогда множество $f(B_f)$ является неограниченным множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Утверждение 2. *Пусть $n \geq 3$ и $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением, имеющее существенно особую точку $x_0 \in D$. Тогда x_0 принадлежит замыканию множества B_f, т. е. $x_0 \in \overline{B_f}$.*

Здесь и далее замыкание $\overline{A}$ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ понимается относительно расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Отметим, что при доказательстве утверждений 1 и 2 основным используемым в [5] свойством является соотношение (1), в то время как ни одно их свойств 1–3, входящих в определение отображений с ограниченным искажением, явно не используется. Как будет показано в настоящей работе для справедливости приведенных выше утверждений 1 и 2, даже условие вида (1) является слишком сильным, причем вопрос о мере его дальнейшего ослабления также обсуждается в статье.

Основная цель настоящей работы — показать, что утверждения 1 и 2 остаются справедливыми для некоторого более широкого класса отображений f и только для него. Точнее, мы констатируем, что за справедливость приведенных выше утверждений отвечает некое условие чисто геометрического характера, выражающееся посредством искажения модуля семейств кривых при отображении f; собственно же определение отображения с ограниченным искажением, равно как и свойство вида (1), выполненное с некоторой постоянной $K' < \infty$, не играют здесь значимой роли. Принимая за основу сказанное выше, введем в рассмотрение следующую конструкцию (см. например, [6, гл. VII]). Пусть $x_0 \in D$, $A = A(r_1, r_2, x_0)$ — сферическое кольцо, центрированное в точке x_0 радиусов r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2 < r_0 := \operatorname{dist}(x_0, \partial D))$, $S_i = S(x_0, r_i)$ — сфера с центром в x_0 радиуса r_i, $i = 1, 2$, а $\Gamma(S_1, S_2, A)$ — семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A. Отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ условимся называть *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$,* если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{2}$$

выполнено в кольце $A = A(r_1, r_2, x_0)$ для произвольных r_1, r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1. \tag{3}$$

Слово «кольцевое» в данном выше определении указывает на происхождение семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$, входящих в левую часть неравенства (2), а «Q-отображение» — на заданную вещественнозначную функцию Q в правой части (2). В указанном выше контексте точка x_0 по определению является изолированной точкой границы области $D \setminus \{x_0\}$, где отображение f определено корректно. Заметим, что при $Q(x) \leq K$ п. в. в правой части неравенства (2) возникнет выражение вида $K \cdot M(\Gamma)$.

К основным результатам настоящей работы относятся следующие аналоги утверждений 1 и 2.

Утверждение 1′. *Пусть $n \geq 3$ и $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, имеющее существенно особую точку $x_0 \in D$. Предположим, что f удовлетворяет соотношению* (2) *в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством* (3)*. Тогда множество $f(B_f)$ не является ограниченным в $\mathbb{R}^n$ при условии, что функция Q в правой части неравенства* (2) *имеет конечное среднее колебание в точке x_0.*

Утверждение 2′. *Пусть $n \geq 3$ и $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, имеющее существенно особую точку $x_0 \in D$. Предположим, что f удовлетворяет соотношению* (2) *в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством* (3)*. Тогда $x_0 \in \overline{B}_f$ при условии, что функция Q в правой части неравенства* (2) *имеет конечное среднее колебание в точке x_0.*

Определение конечного среднего колебания см. в разд. 4 настоящей работы. Говоря иначе, функции Q в правой части неравенства (2) разрешается быть неограниченной в сколь угодно малой окрестности точки x_0, однако стремление Q к бесконечности должно быть не произвольным, а умеренным. Соответствующий пример, приводимый в настоящем тексте, показывает, что уйти от условия конечного среднего колебания функции Q в правой части (2) в точке x_0 и заменить его более простым естественным требованием, скажем, $Q \in L^p$, не удается, сколь большим ни было бы такое число $p < \infty$. В формулировках утверждений $1'$ и $2'$ мы также требуем, чтобы f было дискретным и открытым. Построенный нами пример показывает, что при отсутствии свойств дискретности и открытости заключения утверждений $1'$ и $2'$ нарушаются.

2. Предварительные сведения

В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0,1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$, (x, y) — (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, ω_{n-1} — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{mes}_1(A)$ — линейная мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$. Говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно локально связно*, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности U такие, что множества $U \cap E$ связны.

Предложение 1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, Q — односвязное локально линейно связное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и P — компонента связности множества $f^{-1}(Q)$, $\overline{P} \subset D$. Тогда f отображает P на Q гомеоморфно. Если Q относительно локально связно, то f гомеоморфно отображает $\overline{P}$ на $\overline{Q}$* (*см.* [5, *лемма* 2.2]).

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *нульмерным*, если каждая компонента связности $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку. Запись $g = \mathrm{id}$ для отображения $g : D \to \mathbb{R}^n$ означает, что g — тождественное отображение. Относительно отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ непрерывное отображение $s : f(D) \to \mathbb{R}^n$ называется *сечением,* если $f \circ s = \mathrm{id}$. *Континуумом* называется связный компакт $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $C(E, f) := \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim\limits_{m\to\infty} f(x_m),\ x_m \to x_0 \in E\}$.

Предложение 2. *Пусть отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ нульмерное, $A \subset f(D)$ и существует сечение $s : A \to D$ отображения f, т. е. $f \circ s = \mathrm{id}$. Если A относительно локально связно в точке $y \in \overline{A}$, то множество $C(s, y)$ либо континуум в ∂D, либо единственная точка в D* (*см.* [7, 3.A; 5, *лемма* 3.10]).

Окрестностью множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется произвольное множество B такое, что $A \subset \mathrm{Int}\, B$, где $\mathrm{Int}\, B$ обозначает совокупность всех внутренних точек множества B.

Предложение 3. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, F — компактное множество в D и $f|_F$ инъективно. Тогда f инъективно также в некоторой окрестности множества F* (*см.* [8, *с.* 422*;* 5, *следствие* 3.8]).

Следующие определения могут быть найдены, например, в [9, гл. I, разд. 1–6]. Борелевская функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\gamma \rho(x)\,|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\,dm(x).$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль обладает свойствами монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, полуаддитивности:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i), \tag{4}$$

и $M(\varnothing) = 0$ (см. [9, теорема 6.2]). Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, и пишут $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ (см. [9, теорема 6.4]).

Перейдем к определению отображений, исследуемых в настоящей статье. В [10, разд. 13] Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Мотивируя упомянутым выше определением, введем в рассмотрение следующее понятие. Пусть $x_0 \in D$, $r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i)$, а для произвольных множеств $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ символ $\Gamma(E, F, D)$ означает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$,

$\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Говорят, что $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$,* если f удовлетворяет (2) для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ со свойством (3).

Изучение неравенств типа (2) восходит к Альфорсу (см., например, [11, гл. I, разд. D, теорема 3]), а также Лехто и Вертанену (см. [12, гл. V, разд. 6.3, неравенство (6.6)]). Некоторые подобные неравенства изучались также в [13–15]. В частности, неравенство типа (2) доказано для некоторого широкого класса отображений (см., например, [16]).

Следующее предложение позволяет установить для f выполнение свойств (2) и (3) в точке x_0 без обременительной проверки бесконечного числа неравенств (3) (см. [17, теорема 1]). Для того чтобы его сформулировать, напомним еще несколько определений. *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называем пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях*, $f \in ACL$, если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. *Емкостью* конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x - x_0| = r} Q(x) \, dS, \tag{5}$$

где dS — элемент площади поверхности S. Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$.

Предложение 4. *Открытое дискретное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ удовлетворяет соотношению вида (2) в точке $x_0 \in D$ для любой измеримой функции, удовлетворяющей (3) и фиксированной функции $Q(x)$, тогда и только тогда, когда для произвольных $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и произвольного конденсатора $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{cap} f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}, \tag{6}$$

где $I := I(x_0, r_1, r_2)$ задается соотношением

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}.$$

Замечание 1. Предложение 4 остается справедливым также для отображений $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющих условию (2) для произвольной измеримой функции η со свойством (3), ибо упомянутые соотношения, как и соотношение (6), апеллируют лишь к кольцам, центрированным в точке x_0, в то время как к самой точке x_0 указанные условия формально не относятся.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — отображение, удовлетворяющее соотношению (2) в точке x_0 при каждой измеримой функции η со свойством (3) и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)) \tag{7}$$

для некоторой функции $\psi(t) : (0, \infty) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \tag{8}$$

для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Если Γ — семейство всех открытых кривых $\gamma(t) : (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\gamma(t_k) \to x_0$ для некоторой последовательности $t_k \to 0$, $\gamma(t) \not\equiv x_0$, то $M(f(\Gamma)) = 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$. Заметим, что

$$\Gamma > \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i, \tag{9}$$

где Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t) : (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1) \in \{0 < |x| = r_i < \varepsilon_0\}$, r_i — некоторая последовательность с $r_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $\alpha_i(t_k) \to 0$ для той же последовательности $t_k \to 0$. Зафиксируем $i \geq 1$ и $\varepsilon \in (0, r_i)$. Ввиду (7) и с учетом (8) можно считать, что $I(\varepsilon, r_i) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, r_i)$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, r_i), & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i), \end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (3) в кольце $A(\varepsilon, r_i, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < r_i\}$ и, следовательно, в силу соотношения (2)

$$M(f(\Gamma(S(0, \varepsilon), S(0, r_i), A(\varepsilon, r_i, 0)))) \leq \int\limits_{A(\varepsilon, r_i, 0)} Q(x)\eta^n(|x|)\ dm(x) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \tag{10}$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \frac{1}{I(\varepsilon, r_i)^n} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\, dm(x)$. Учитывая (7), имеем $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0$. Заметим, что при любом $\varepsilon \in (0, r_i)$

$$\Gamma_i > \Gamma(S(0, \varepsilon), S(0, r_i), A(\varepsilon, r_i, 0)). \tag{11}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ из (10) и (11) получаем, что

$$M(f(\Gamma_i)) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0 \tag{12}$$

при $\varepsilon \to 0$ и каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$. Однако левая часть неравенства (12) не зависит от ε и поэтому $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Наконец, из (9) и свойства полуаддитивности модуля (см. (4)) следует, что $M(f(\Gamma)) = 0$. $\square$

Будем говорить, что точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является *асимптотическим пределом* отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $b \in \partial D$, если найдется кривая $\alpha : [0, 1) \to D$,

$\alpha(t) \to b$ при $t \to 1$, такая, что $f(\alpha(t)) \to z_0$ при $t \to 1$ (см. [5, разд. 3.13; 2, гл. VII, п. 2]). Грубо говоря, отображение f, заданное в области D, имеет своим асимптотическим пределом величину $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ в некоторой точке b границы D, если существует кривая, лежащая в D и стремящаяся к b, вдоль которой отображение f стремится к z_0.

Лемма 2. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, — открытое и дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению* (2) *в точке x_0 при каждой измеримой функции η со свойством* (3) *и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $\varepsilon \to 0$ выполнены соотношения* (7) *и* (8). *Тогда $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0 при условии, что $x_0 \in D$ является существенно особой точкой отображения f, а $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ — асимптотическим пределом f в точке x_0.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного: предположим, что найдется окрестность U точки x_0, для которой $z_0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = z_0 = 0$. Выберем $r_0 > 0$ так, что $\overline{B(0, r_0)} \subset U \cap D$. Поскольку f — дискретное отображение, множество $\{f^{-1}(0)\}$ не более чем счетно, следовательно, можно считать, что $S(0, r_0) \cap f^{-1}(0) = \varnothing$. Положим $U_0 = B(0, r_0) \setminus \{0\}$, $g = f|_{U_0}$. Ввиду того, что $\operatorname{dist}(f(S(0, r_0)), 0) > 0$ и по предположению $0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$, найдется $r' > 0$ такое, что

$$\overline{B(0, r')} \cap (f(S(0, r_0)) \cup g(B_g)) = \varnothing. \tag{13}$$

Так как $z_0 = 0$ является асимптотическим пределом отображения f в точке $x_0 = 0$, найдется кривая $\alpha(t) : [0, 1) \to U_0$ с $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$ такая, что $\beta(t) = f(\alpha(t)) \to 0$ при $t \to 1$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < |\beta(t)| < r'$ при всех $t \in (0, 1)$. Тогда в силу (13)

$$|\alpha| \subset U_0 \setminus B_g. \tag{14}$$

Определим при $0 \leq t \leq 1$ и $0 < \varphi \leq \pi$ так называемые *сферические шапочки* по следующему правилу:

$$G(t, \varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = |\beta(t)|, \ (y, \beta(t)) > |y|^2 \cos \varphi\}. \tag{15}$$

Множества $G(t, \varphi)$ в (15) представляют собой некоторую часть сферы $S(0, |\beta(t)|)$, симметричную относительно отрезка $\{r \in \mathbb{R}^n : r = \beta(t)s, \ s \in (0, 1)\}$. Пусть $G^*(t, \varphi)$ — $\alpha(t)$ — компонента связности множества $g^{-1}(G(t, \varphi))$ и φ_t — точная верхняя грань чисел $\varphi \in (0, \pi]$ таких, что g отображает $G^*(t, \varphi)$ гомеоморфно на $G(t, \varphi)$; такое $\varphi_t > 0$ существует ввиду соотношения (13) и того, что $\beta(t) \in f(U_0)$. Положим $G(t) = G(t, \varphi_t)$, $G^*(t) = G^*(t, \varphi_t)$, тогда отображение g определяет при каждом фиксированном t гомеоморфизм $g_t : G^*(t) \to G(t)$. Покажем, что для п. в. $r \in (0, r')$ из равенства $|\beta(t)| = r$ следует, что $0 \notin \overline{G^*(t)}$. Предположим, что $0 \in \overline{G^*(t)}$ при некотором t, тогда найдется последовательность $x_k \in G^*(t)$ такая, что $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x_k) \to y_t \in \overline{G(t)}$ при $k \to \infty$. Заметим, что отображение g_t^{-1} является сечением отображения f на множестве $G(t) \subset f(U_0)$ и по предложению 2 множество $C(g_t^{-1}, y_t)$ есть континуум, содержащий точку $x_0 = 0$. В силу (13) $C(g_t^{-1}, y_t) = \{0\}$, т. е. $g_t^{-1}(y) \to 0$ при $y \to y_t$. Пусть $\Gamma(t)$ — семейство открытых кривых $\gamma_t(s) : (0, 1) \to \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих $\beta(t)$ и y_t в $G(t)$, т. е.

$\gamma_t(0) = y_t$, $\gamma_t(1) = \beta(t)$ и $\gamma_t(s) \in G(t)$ при $s \in (0,1)$. Обозначим $\Gamma^*(t) = g_t^{-1}(\Gamma(t))$. Тогда каждая кривая $\gamma_t^*(s) : (0,1) \to U_0$ семейства $\Gamma^*(t)$ такова, что $\gamma_t^*(s) \to 0$ при $s \to 0$. Обозначим $\Gamma^* = \bigcup\limits_{t:0\in\overline{G^*(t)}} \Gamma^*(t)$. По лемме 1 $M(g(\Gamma^*)) = 0$. С другой стороны (см. [9, разд. 10.2]),

$$M(g(\Gamma^*)) \geq b_n \int\limits_E \frac{dr}{r},$$

где постоянная b_n зависит только от размерности n и $E = \{|\beta(t)| : 0 \in \overline{G^*(t)}\}$ при некотором t. Следовательно, $\mathrm{mes}_1(E) = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $T = \{t : 0 \leq t < 1, |\beta(t)| \notin E\}$. Заметим, что ввиду (13) $\overline{G^*(t)} \subset U_0 \setminus B_g$ при $t \in T$. По предложению 1, так как $n \geq 3$, f отображает $\overline{G^*(t)}$ гомеоморфно на $\overline{G(t)}$. Кроме того, по предложению 3 f инъективно в некоторой окрестности $\overline{G^*(t)}$. По определению угла φ_t это возможно только в случае $\varphi_t = \pi$. Следовательно, при каждом $t \in T$ множество $\overline{G^*(t)} = \overline{G^*(t,\pi)}$ есть поверхность в $U_0 \setminus B_g$, топологически эквивалентная сфере $G(t)$, и f гомеоморфно отображает $\overline{G^*(t)}$ на $S(0, |\beta(t)|)$. Пусть $D(t)$ — ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G^*(t)}$. Положим

$$T_0 = \{t \in T : 0 \in D(t)\}.$$

Возможны два случая: $1 \in \overline{T_0}$ и $1 \notin \overline{T_0}$.

Случай 1. Предположим, что $1 \in \overline{T_0}$, тогда найдется возрастающая последовательность $t_j \in T_0$ такая, что $t_j \to 1$. Положим $r_j = |\beta(t_j)|$ и $D_j = D(t_j)$; не ограничивая общности, можем считать, что $r_{j+1} < r_j$ и ввиду сходимости $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$ — что $D_{j+1} \subset D_j$. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(0,r_1) \setminus \overline{B(0,r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1 и отображение g открыто в области $D \setminus \{0\}$, найдется компонента A_j^* множества $g^{-1}(A_j)$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. Заметим, что $\partial D_j \cap A_j^* = \varnothing$, значит, $\overline{A_j^*} \subset U_0$. Кроме того, $\overline{A_j^*} \subset U_0 \setminus B_g$, ибо $\overline{A}_j \cap g(B_g) = \varnothing$. По предложению 1 f отображает A_j^* гомеоморфно на A_j. В силу сказанного выше построено сечение $s_j : A_j \to A_j^*$ отображения f такое, что $s_j = s_k|_{A_j}$ при всех $k > j$. Более того, построено сечение $s : B(0,r_1) \setminus \{0\} \to U_0 \setminus B_g$ отображения f в $B(0,r_1) \setminus \{0\}$. По предложению 2 сечение s может быть продолжено до непрерывного отображения $\bar{s}$ всего шара $B(0,r_1)$, что возможно лишь при $\bar{s}(0) = 0$, откуда вытекает устранимость особенности отображения f в нуле, что противоречит условию леммы.

Случай 2. Предположим теперь, что $1 \notin \overline{T}_0$. Кривую α мы можем продолжить до $\bar{\alpha} : [-1,1) \to \mathbb{R}^n$ так, что $\bar{\alpha}(-1) \in \partial U_0 \setminus \{0\}$, $\bar{\alpha}(-1,1) \subset U_0$, $\bar{\alpha}|_{[0,1)} = \alpha$ и $\bar{\beta} = f(\bar{\alpha}(t)) \neq 0$ при всех $t \in [-1,1)$. По предположению найдется δ, $0 \leq \delta < 1$, такое, что $[\delta, 1) \cap T_0 = \varnothing$. Выберем возрастающую последовательность точек $t_j \in T \cap [\delta, 1)$ такую, что

$$t_j \to 1 \quad \text{при } j \to \infty, \quad |\beta(t)| < r_j = |\beta(t_j)| \quad \text{при всех } t \in (t_j, 1),$$

$$|\bar{\beta}(t)| > r_{j+1} \quad \text{при всех } t \in [-1, t_j].$$

Положим $D_j = D(t_j)$. Поскольку $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$, последовательность $\alpha(t_j)$ можно выбрать монотонно убывающей и случай 2 можно условно разбить на два подслучая:

(a) $D_j \subset D_{j+1}$ при всех $j \in \mathbb{N}$,

(b) $\overline{D}_j \cap \overline{D}_{j+1} = \varnothing$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$.

Предположим, что (a) верно. Рассуждаем, как и в первом случае. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(0, r_1) \setminus \overline{B(0, r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1, найдется компонента A_j^* множества $g^{-1}(A_j)$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. Заметим, что $\alpha(t_1, 1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_1$, поэтому $A_j^* \subset D_j \setminus \overline{D}_1$. Рассуждая, как выше, получаем непрерывное сечение $s : B(0, r_1) \setminus \{0\} \to U_0 \setminus B_g$ отображения f в $B(0, r_1) \setminus \{0\}$. На этот раз множество $C(s, 0)$ представляет собой невырожденный континуум в $\overline{U_0}$, что противоречит предложению 2.

Предположим, что верно (b). Заметим, что в этом случае $\alpha(t_j, 1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_j$. Положим $u_{j+1} = \sup\{t : \alpha(t_j, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\}$. Выберем окрестность U_{j+1} границы ∂D_{j+1} такую, что сужение $f|_{U_{j+1}}$ инъективно (см. предложение 3). Поскольку $\beta(t_{j+1}, 1) \subset B(0, r_{j+1})$, будем иметь $g(U_{j+1} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1})) \subset B(0, r_{j+1})$ ввиду инъективности g в U_{j+1}. Тогда найдется $v_1 = \max\{t : t_j < t < u_{j+1},\ |\beta(t)| = r_{j+1}\}$, причем $v_1 \in T$. Заметим, что $\overline{D}(v_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\overline{D}_j \cup \overline{D}_{j+1})$. В таком случае $v_1' = \sup\{t : \alpha(t_j, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}(v_1)\} > t_j$. Тогда найдется $v_2 = \max\{t : t_j < t < v_1',\ |\beta(t)| = r_{j+1}\}$ такое, что $\overline{D}(v_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_j \cup \overline{D}_{j+1} \cup \overline{D}(v_1)$. Продолжая этот процесс, получаем бесконечную последовательность $\{\overline{G^*(v_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ компонент связности множества $g^{-1}(S(0, r_{j+1}))$. Отметим, что существует $v = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$, $v \in (t_j, u_{j+1})$, причем каждая окрестность точки $\alpha(v)$ пересекает бесконечное число компонент связности множества $g^{-1}(S(0, r_{j+1}))$. Последнее невозможно, так как ввиду (14) отображение f есть локальный гомеоморфизм в точке $\alpha(v)$. $\square$

В дальнейшем мы опираемся на следующее утверждение (см. [18, лемма 3.1; 19, лемма 5.1]).

Лемма 3. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению* (2) *в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством* (3) *и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$, $x_0 \in D$ — существенно особая точка отображения f. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $\varepsilon \to 0$ выполнены соотношения* (7), (8). *Тогда $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})) = 0$ для любой окрестности $U \supset \{x_0\}$ в D.*

Пусть $\beta : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(b))$. Кривая $\alpha : (c, b] \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении $f : D \to \mathbb{R}^n$ с концом в точке x при выполнении условий:

(i) $\alpha(b) = x$;

(ii) $f \circ \alpha = \beta|_{(c,b]}$;

(iii) если $a \leq c' < c$, то не существует такой кривой $\alpha' : (c', b] \to D$, что $\alpha = \alpha'|_{(c,b]}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{(c',b]}$.

Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(b))$, тогда всякая кривая $\beta : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с концом в точке x (см. [2, гл. II, следствие 3.3]).

Лемма 4. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению* (2) *в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством* (3) *и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$, $x_0 \in D$ — существенно особая точка отображения f. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$*

и $\varepsilon \to 0$ выполнены соотношения (7), (8). *Тогда каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0$. Выберем $r_0 > 0$ таким, что $\overline{B(x_0, r_0)} \subset D$, и положим $U_0 = B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$. Так как $0 \notin f(D \setminus \{x_0\})$, существует $r' > 0$, $r' < 1$, такое, что

$$\overline{B(0, r')} \cap f(S(x_0, r_0)) = \varnothing. \tag{16}$$

По лемме 3 ввиду (16) найдется множество G вида (15), лежащее на сфере $S(0, r')$, такое, что некоторая связная компонента G^* множества $f^{-1}(G)$ целиком содержится в U_0. Для фиксированного $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ обозначим через $\gamma_y : (0, r'] \to \overline{B(0, r')}$ кривую $\gamma_y(t) = ty$. При каждом $r'y \in G$ пусть γ_y^* означает максимальное поднятие кривой γ_y с концом в G^*, $\gamma_y^* : (r_y, r'] \to U_0$. Покажем, что $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$.

Введем в рассмотрение множество $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*(t_k)\}$, где $t_k \in (r_y, r']$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = r_y$; без ограничения общности можно считать все такие последовательности t_k монотонными. Для $x \in K \cap U_0$ по непрерывности f будем иметь $f(\gamma_y^*(t_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in (r_y, r'), t_k \to r_y$ при $k \to \infty$. Однако $f(\gamma_y^*(t_k)) = \gamma_y(t_k) \to \gamma_y(r_y)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что $f \equiv \gamma_y(r_y)$ на множестве $K \cap U_0$ в U_0. С другой стороны, ввиду монотонности последовательности связных множеств $\gamma_y^*((r_y, t_k])$, множество K связно (см. [20, гл. I, разд. 9.12]). Таким образом, в силу дискретности f согласно (16) и сказанному выше K не может состоять более чем из одной точки. Пусть $K \neq \{x_0\}$, тогда кривая $\gamma_y^* : (r_y, r'] \to U_0$ продолжается до замкнутой кривой $\gamma_y^* : [r_y, r'] \to U_0$, причем $f(\gamma_y^*(r_y)) = \gamma_y(r_y)$. В таком случае можно построить максимальное поднятие $\gamma_y^{*\prime}$ кривой $\gamma_y|_{(0, r_y]}$ с концом в точке $\gamma_y^*(r_y)$ (см. [2, гл. II, следствие 3.3]). Объединяя поднятия γ_y^* и $\gamma_y^{*\prime}$, получаем новое поднятие $\gamma_y^{*\prime\prime}$ кривой γ_y, которое определено на $(r'_y, r']$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия γ_y^*. Значит, $K = \{x_0\}$ и $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$.

Ввиду последнего соотношения дополнительно требуется еще показать, что $r_y = 0$ хотя бы для одного y. Ниже мы покажем даже большее, а именно, что $r_y = 0$ для п. в. $r'y \in G$. Пусть $E_i = \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : r'y \in G,\ r_y > 1/i\}$, $i = 1, 2, \dots$. Утверждается, что $\mathscr{H}^{n-1}(E_i) = 0$ для каждого i, где $\mathscr{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Для фиксированного $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_i = \{\gamma_y^* : y \in E_i\}$. По сказанному выше все кривые семейства Γ_i стремятся к точке x_0, поэтому по лемме 1 также $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Заметим, что семейство $f(\Gamma_i)$ минорирует семейство Δ всех отрезков $\alpha_y : [1/i, r'] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha_y(t) = ty$, $y \in E_i$. Пусть $\rho \in \operatorname{adm} f(\Gamma_i)$. При каждом фиксированном $y \in E_i$ по неравенству Гёльдера имеем оценку

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \le \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \le \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n}, \tag{17}$$

так как

$$\left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \le \left(\frac{r'^{(n+1)}}{n+1}\right)^{(n-1)/n} < 1,$$

ибо $r' < 1$. Опять по неравенству Гёльдера и выбору ρ

$$1 \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\,dt \leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n},$$

откуда следует, что

$$\left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n} \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt.$$

Тогда по (17)

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)dt \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt. \tag{18}$$

Используя неравенство (18) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)dm(x) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt\right) dy \geq \frac{1}{i^{n-1}}\mathscr{H}^{n-1}(F_\rho), \tag{19}$$

где

$$F_\rho = \left\{ y \in \mathbb{S}^{n-1} : \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\,dt \geq 1 \right\}.$$

Заметим, что по выбору ρ имеет место включение $E_i \subset F_\rho$. Поскольку $M(f(\Gamma_i)) = 0$, переходя к inf по всем $\rho \in \operatorname{adm} f(\Gamma_i)$ в левой части (19), получим, что $\mathscr{H}^{n-1}(F_\rho) = 0$ и, следовательно, $\mathscr{H}^{n-1}(E_i) = 0$. $\square$

Лемма 5. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению* (2) *в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством* (3) *и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$, $x_0 \in D$ — существенно особая точка f. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $\varepsilon \to 0$ выполнены соотношения* (7), (8). *Тогда имеет место включение $(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) \subset \overline{f(B_f)}$.*

Доказательство следует из лемм 2 и 4. Действительно, если найдется $y_0 \in (\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) \setminus \overline{f(B_f)}$, то по лемме 4 точка y_0 является асимптотическим пределом отображения f в точке x_0. Однако по лемме 2 имеем $y_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0, что противоречит сделанному выше предположению. $\square$

Лемма 6. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению* (2) *в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством* (3) *и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$, $x_0 \in D$ — существенно особая точка отображения f. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $\varepsilon \to 0$ выполнены соотношения* (7), (8). *Тогда множество $f(B_f)$ неограниченное.*

Доказательство. Заметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$ и по лемме 5 существует последовательность $y_k \in f(B_f)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тем самым $f(B_f)$ неограниченное. $\square$

Лемма 7. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению (2) в точке x_0 при некоторой измеримой функции $Q : D \to [0, \infty]$, $x_0 \in D$ — существенно особая точка отображения f. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $\varepsilon \to 0$ выполнены соотношения (7), (8). Тогда $x_0 \in \overline{B_f}$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существует окрестность U точки x_0 такая, что

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap B_f = \varnothing. \tag{20}$$

Заметим, что $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})$. Применим к отображению $g := f|_{U \setminus \{x_0\}}$ лемму 5. Получаем, что найдется последовательность $y_k \in f(B_f \cap (U \setminus \{x_0\}))$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Однако последнее противоречит соотношению (20), ибо тогда $f(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})) \neq \varnothing$ и тем более $B_f \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$. $\Box$

4. Основной результат

Настоящий раздел посвящен отысканию конкретных условий на функцию Q, когда выполнены условия (7) и (8). Мотивацией введения следующего определения является локализация пространства BMO, состоящего из функций *с ограниченным средним колебанием* по Джону — Ниренбергу (см. соответственно [21] и [6, гл. VI, разд. 6.1]). Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, и писать $\varphi \in FMO$ в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) < \infty,$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) \, dm(x).$$

Лемма 8. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $x_0 \in D$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$,

2) $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$,

3) *при некотором* $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *и произвольных* $\varepsilon \in (0, \delta(x_0))$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty \tag{21}$$

и

$$\int\limits_{0}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty. \tag{22}$$

Тогда найдутся $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что в точке x_0 выполнены условия (7), (8). Здесь и далее $q_{x_0}(r)$ определено соотношением (5).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Заключение леммы 8 в случае $Q \in FMO$ вытекает из [6, гл. VI, следствие 6.3], согласно которому условие $Q \in FMO(0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ влечет соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{23}$$

где $0 < \psi(t) := \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Заметим также, что в обозначениях леммы 1

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt = \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Таким образом, соотношение (23) с учетом последнего завершает рассмотрение случая 1. Пусть теперь $q_{x_0}(r) = O\big(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\big)$ при $r \to 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\{\mathrm{dist}(0,\partial D\setminus\{0\}),1\}$. Положим $\psi(t) = \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\,dS\right)dr \le C\omega_{n-1}I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

где, как прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$ и $C > 0$ — некоторая постоянная. Таким образом, случай 2 рассмотрен. Осталось рассмотреть случай 3. При каждом фиксированном $\varepsilon_0 < \delta(x_0)$ и произвольном $\varepsilon < \varepsilon_0$ рассмотрим функцию

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt,$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/\left[tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)\right], & t\in(\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0, & t\notin(\varepsilon,\varepsilon_0),\end{cases} \tag{24}$$

$q_0(r) = q_{x_0}(r)$, $x_0 := 0$. Заметим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ в силу предположения (21). Тогда ввиду (22) можно считать, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) > 0$ при всех $(\varepsilon,\varepsilon_0)$. В таком случае функция $\psi(t)$, определенная соотношением (24), удовлетворяет соотношению (8). Кроме того, ψ удовлетворяет также соотношению (7), поскольку несложный подсчет показывает, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = \omega_{n-1}I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

причем $I(\varepsilon,\varepsilon_0) = o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))$ ввиду (22). Лемма 8 полностью доказана. □

Замечание 2. Отметим, что если f является отображением с ограниченным искажением, то ввиду соотношения (1) $Q(x) \equiv K'$ в (2) для некоторой постоянной $K' > 0$, поэтому каждое из условий 1–3 леммы 8 автоматически выполняется.

Достаточно много известных математиков таких, как Б. В. Шабат, В. А. Зорич и др., рассматривали условия расходимости интеграла $\int\frac{dr}{rK(r)}$ вида (22), где $K(r)$ — некоторая функция (см., например, [22, 23]).

Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, имеет *нулевую емкость,* пишут $\mathrm{cap}\,C = 0$, если $\mathrm{cap}(A,C) = 0$ хотя бы для одного ограниченного открытого множества

A, содержащего C. Множества емкости нуль, как известно, всюду разрывны (см., например, [2, гл. III, следствие 2.5]), иначе говоря, условие $\operatorname{cap} C = 0$, в частности, влечет, что $\operatorname{Int} C = \varnothing$.

Замечание 3. Для открытых дискретных отображений, удовлетворяющих условиям типа (2), интеграл вида (21) конечен для сколь угодно малых ε и некоторого $\delta(x_0) > 0$. В противном случае из (6) с учетом замечания 1 следует, что $\operatorname{cap} f(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}) = 0$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$. Последнее невозможно, поскольку ввиду открытости f, очевидно, $\operatorname{Int} f(\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}) \neq \varnothing$.

Принимая во внимание леммы 2–8, с учетом замечания 3 заключаем, что имеет место

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению (2) в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством (3) и некоторой измеримой функции $Q(x)$, $Q : D \to [0, \infty]$, x_0 — существенно особая точка f. Предположим, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$, либо при некотором $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено условие вида (22). Тогда имеют место следующие утверждения.*

I. *Если $n \geq 3$ и точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то для любой окрестности $U \subset D$, содержащей точку x_0, выполнено $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$.*

II. *Каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

III. *Если $n \geq 3$, то имеет место включение $(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) \subset \overline{f(B_f)}$.*

IV. *Если $n \geq 3$ и $\infty \notin f(D \setminus \{x_0\})$, то*

(a) *множество $f(B_f)$ неограниченное в $\mathbb{R}^n$,*

(b) *$x_0 \in \overline{B_f}$.*

Следствие 1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — локальный гомеоморфизм в $D \setminus \{x_0\}$, удовлетворяющий соотношению (2) в точке x_0 для любой измеримой функции η со свойством (3) и некоторой измеримой функции $Q(x)$. Предположим, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$, либо при некотором $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено условие вида (22). Тогда f продолжается до локального гомеоморфизма $\bar{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство следствия 1 легко вытекает из заключения IV(b) теоремы 1. Возможность непрерывного продолжения f в точку x_0 следует из условия $B_f = \varnothing$. Остается показать, что продолженное отображение $\bar{f} : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является гомеоморфизмом в некотором шаре $B(x_0, \varepsilon_0)$. Предположим противное, тогда $x_0 \in B_{\bar{f}}$. С другой стороны, для произвольного открытого дискретного отображения $g : G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, для которого $B_g \neq \varnothing$, хаусдорфова размерность $g(B_g)$ не меньше $n - 2$ (см., например, [5, теорема 3.4]). В нашем случае это означает, что в области D по крайней мере есть еще какие-то точки множества $B_{\bar{f}}$, кроме точки x_0, что противоречит сделанному предположению о локальной гомеоморфности f в $D \setminus \{x_0\}$. $\Box$

Замечание 4. Для отображений с ограниченным искажением утверждение следствия 1 доказано В. А. Зоричем (см. [23, теорема 1]). Используемый в [23] метод в значительной мере отличается от подхода, используемого в настоящей работе.

5. О точности условий на $Q(x)$, n и отображение f

Следующий пример показывает, что условия на функцию $Q(x)$, указанные в теореме 1, являются точными в том смысле, что их нельзя заменить условием $Q(x)\in L^p_{\rm loc}$ ни для какого (сколь угодно большого) $p>1$.

Теорема 2. *Для каждого $p>1$ найдется гомеоморфизм $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий соотношению вида* (2) *для любой функции η со свойством* (3) *в точке $x_0=0$ с некоторой функцией $Q(x)\in L^p(\mathbb{B}^n)$, $n\geq 2$, такой, что точка $x_0=0$ является изолированной существенно особой точкой для f и в то же время каждое из заключений теоремы* 1 *нарушено.*

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f(x)=\frac{1+|x|^\alpha}{|x|}\cdot x,$$

где $\alpha\in(0,n/p(n-1))$. За счет увеличения p можно считать, что $\alpha<1$. Заметим, что f отображает $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ на $\{1<|y|<2\}$ в $\mathbb{R}^n$ и предельное множество $C(f,0)$ есть сфера $\{|y|=1\}$. Известно, что f удовлетворяет соотношению (2) при

$$Q(x):=\left(\frac{1+r^\alpha}{\alpha r^\alpha}\right)^{n-1},\quad r=|x|$$

(см. [6, гл. VI, предложение 6.3]). При $r<1$ имеем оценку $Q(x)\leq\frac{C}{r^{\alpha(n-1)}}$, $C:=\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n-1}$. Следовательно, $Q(x)\in L^p(\mathbb{B}^n)$, поскольку $\alpha p(n-1)<n$. Заметим, что все точки сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ являются асимптотическими пределами отображения f в нуле. Тем не менее заключения I, III, IV теоремы 1 не выполнены, ибо $B_f=\varnothing$, а заключение II нарушено в силу того, что $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})=\{|y|\leq 1\}\cup\{|y|\geq 2\}$; в то же время ни одна из точек множества $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$, кроме точек сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, очевидно, не является асимптотическим пределом отображения f в точке 0. $\square$

Известно, что даже для отображений с ограниченным искажением заключения лемм 2, 5–7, а также утверждения пп. I, III, IV теоремы 1 нарушаются при $n=2$ (см. [5, п. 3.23]) и пример этому дает отображение $f(z)=e^{\frac{z}{|z|^2}}$ в точке $z_0=0$. Следующая теорема показывает, что условие открытости отображения f во всех вышеперечисленных результатах существенно.

Теорема 3. *При каждом $n\geq 2$ найдется дискретное отображение $g:\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющее соотношению вида* (2) *для любой функции η со свойством* (3) *в точке $x_0=0$, для которого $Q\equiv 1$ и $x_0=0$ является изолированной существенно особой точкой, при этом заключения* II, III, IV(a) *теоремы* 1 *не имеют места.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ кубами

$$C_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{i=1}^n[2k_i-1,2k_i+1],\quad k_i\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим произвольный куб $C_{k_1,\dots,k_n}$ с $k_1,\dots,k_n\geq 0$; случай k_i разных знаков может быть рассмотрен по аналогии. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)\in C_{k_1,\dots,k_n}$. Если $k_1=0$, то $g_{m_1}:=\mathrm{id}$. Пусть $k_1>0$. Положим $f_{1,\dots,1,1}(x)=y_{1,\dots,1}$, где $y_{1,\dots,1,1}$ — симметрическое отражение точки x относительно гиперплоскости $x_1=2k_1-1$. Если $2k_1-3=-1$, то процесс завершен. Пусть $2k_1-3>-1$, тогда $f_{1,\dots,1,2}(x) = y_{1,\dots,1,2}$, где $y_{1,\dots,1,2}$ — симметрическое отражение точки $y_{1,\dots,1}$ относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 3$. Если $2k_1 - 5 = -1$, то процесс завершен. Если нет, продолжаем процесс: $f_{1,\dots,1,3}(x) = y_{1,\dots,1,3}$ и т. д. За конечное число шагов m_1 имеем отображение $g_{m_1} = f_{1,\dots,1,m_1} \circ \dots \circ f_{1,\dots,1,1}$ такое, что образ $g_{m_1}(x)$ точки x лежит в кубе $C_{0,k_2,k_3\dots,k_n}$.

Далее, если $k_2 = 0$, то $g_{m_2} := g_{m_1}$. При $k_2 > 0$ относительно точки $x_{m_1} := g_{m_1}(x)$ проделываем ту же операцию, но относительно координаты x_2. Полагаем $f_{1,\dots,1,2,m_1}(x) = y_{1,\dots,1,2,m_1}$, где $y_{1,\dots,1,2,m_1}$ — симметрическое отражение точки x_{m_1} относительно гиперплоскости $x_2 = 2k_2 - 1$. Если $2k_2 - 3 = -1$, процесс завершен. Если нет, продолжаем до тех пор, пока не получим отображение $g_{m_2} = f_{1,\dots,m_2,m_1} \circ \dots \circ f_{1,\dots,2,m_1}$ такое, что $g_{m_2}(x_{m_1}) \in C_{0,0,k_3,\dots,k_n}$.

Через некоторое число шагов $m_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ приходим к отображению $G_0 = g_{m_n} \circ g_{m_{n-1}} \circ \dots g_{m_2} \circ g_{m_1}$ такому, что образ x_{m_n} точки x при отображении G_0 лежит в кубе $C_{0,0,0,\dots,0}$. Сжатие $G_1(x) = \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot x$ переводит $C_{0,0,0,\dots,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}^n}$. Положим $G_2 := G_1 \circ G_0$.

Заметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения G_2, причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \overline{\mathbb{B}^n}$. Тогда отображение

$$g := G_2 \circ G_3, \tag{25}$$

где $G_3(x) = \frac{x}{|x|^2}$, имеет изолированную существенно особую точку $x_0 = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^n}. \tag{26}$$

По построению отображение g, заданное соотношением (25), сохраняет модуль семейств кривых в $\mathbb{R}^n$, т. е. удовлетворяет соотношению вида (2) для любой измеримой функции η, удовлетворяющей (3), и является дискретным. Тем не менее каждое из утверждений II, III, IV(a) теоремы 1 нарушено, ибо $g(B_g)$ сосредоточено в $\overline{\mathbb{B}^n}$ и ни одна из точек множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ не является асимптотическим пределом g в точке $x_0 = 0$ в силу включения (26). $\square$

Замечание 5. Заключения I и IV(b) теоремы 1 в примере, построенном выше, выполнены, так как для указанного выше отображения G_2 множество B_{G_2} представляет собой совокупность гиперплоскостей:

$$B_{G_2} = \bigcup_{i,k=1}^{\infty} A_{k,i}, \quad A_{k,i} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 2k + 1\},$$

и $\infty \in \overline{B}_{G_2}$. Более того, если некоторое отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ не удовлетворяет условию IV(b) теоремы 1, то f автоматически является открытым отображением в $U \setminus \{x_0\}$, где U — некоторая окрестность точки x_0.

Нам неизвестно, можно ли избавиться от требования дискретности в перечисленных выше результатах, что в достаточной мере нуждается в дополнительном исследовании.

6. О приложениях результатов к классам Соболева

Внешняя дилатация отображения f в точке x есть величина $K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Теорема 4. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D \setminus \{x_0\})$, для которого $Q := K_O^{n-1}(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D \setminus \{x_0\})$ и $m(B_f) = 0$. Тогда f удовлетворяет соотношению* (2) *в точке x_0 при каждой неотрицательной измеримой функции η со свойством* (3) *и вполне конкретном значении $Q := K_O^{n-1}(x, f)$ (см.* [24, *теорема* 1]).

Основное приложение результатов настоящей работы заключает в себе следующая

Теорема 5. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D \setminus \{x_0\})$, для которого $Q := K_O^{n-1}(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D \setminus \{x_0\})$ и $m(B_f) = 0$, причем x_0 является существенно особой точкой отображения f. Предположим, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$, либо при некотором $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, выполнено условие вида* (22). *Тогда*

I. *Если $n \geq 3$ и точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то для любой окрестности $U \subset D$, содержащей точку x_0, выполнено $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$.*

II. *Каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

III. *Если $n \geq 3$, то $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\}) \subset \overline{f(B_f)}$, множество $f(B_f)$ неограниченное и $x_0 \in \overline{B}_f$.*

Постскриптум. Настоящая работа выполнена в русле исследований, инициированных известным математиком Г. Д. Суворовым, считавшим «идеалом (и целью!) в теории функций достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)» (см. [25, с. 325]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993. (Results Math. Related Areas, (3); 26).
3. *Решетняк Ю. Г.* Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 5. С. 1106–1114.
4. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.
5. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1971. V. 488. P. 1–31.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
7. *Agard S., Marden A.* A removable singularity theorem for local homeomorphisms // Indiana Math. J. 1970. V. 20. P. 455–461.
8. *Зорич В. А.* Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. 1967. Т. 116, № 3. С. 415–433.
9. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; V. 229).
10. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 353–393.
11. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
12. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. New York etc.: Springer-Verl., 1973.

13. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. J. Math. Math. Sci. 2003. V. 22. P. 1397–1420.

14. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005.

15. *Troyanov M., Vodop'yanov S.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.

16. *Ukhlov A. D., Vodop'yanov S. K.* Sobolev spaces and mappings with bounded $(P; Q)$-distortion on Carnot groups // Bull. Sci. Mat. 2009. V. 52, N 4. P. 349–370.

17. *Севостьянов Е. А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 10. С. 1367–1380.

18. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 1. С. 159–174.

19. *Салимов Р., Севостьянов Е.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 6. С. 131–158.

20. *Whyburn G. T.* Analytic topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1942.

21. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.

22. *Шабат Б. В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 1045–1048.

23. *Зорич В. А.* Изолированная особенность отображений с ограниченным искажением // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 4. С. 634–636.

24. *Севостьянов Е. А.* Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 7. С. 969–975.

25. *Суворов Г. Д.* Об искусстве математического исследования. Донецк: Донецкая фирма наукоемких технологий НАН Украины (Фирма ТЕАН), 1999.

Статья поступила 30 ноября 2008 г., окончательный вариант — 7 мая 2010 г.

Севостьянов Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
`e_sevostyanov@rambler.ru`, `brusin2006@rambler.ua`