*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5*

*УДК 517.51*

# О СЛЕДАХ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГРАНИЦЕ АНИЗОТРОПНОГО ПИКА

**А. С. Романов**

**Аннотация.** В «нулевом» пике $G_{\vec{\lambda}}$ с анизотропной гёльдеровой особенностью в вершине рассматриваются различные теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ и вопросы, связанные с вложением следов соболевских функций в лебеговские классы на границе пика.

**Ключевые слова:** пространство Соболева, теорема вложения, след.

При описании анизотропного пика в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в координатной записи точки мы выделим одну переменную и будем использовать обозначение $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, полагая $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Для характеризации гёльдеровой особенности в вершине пика рассмотрим вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$, у которого $1 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_{n-1}$.

*Нулевой анизотропный пик* $G_{\vec{\lambda}} \subset \mathbb{R}^n$ определим условием

$$G_{\vec{\lambda}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x < 1,\ 0 < y_k < x^{\lambda_k},\ k = 1, \dots, n-1\}.$$

В данном случае удобнее использовать такое «прямоугольное» определение пика, которое позволяет помимо всей границы в целом рассматривать еще и отдельно различные боковые грани, имеющие разные типы особенностей в вершине, что представляет интерес при изучении следов соболевских функций.

Имеется довольно много результатов, связанных с теоремами вложения в нерегулярных областях. Вложения пространств Соболева в пространства суммируемых функций в областях с различными типами гёльдеровых особенностей достаточно подробно изучались в работах О. В. Бесова, Д. А. Лабутина, В. Г. Мазьи, Б. И. Трушина и т. д. Относительно обсуждаемых в работе условий компактности оператора вложения

$$I : W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) \to F(G_{\vec{\lambda}})$$

можно лишь отметить, что, на наш взгляд, самостоятельный интерес представляют вложения в соответствующие гёльдеровы классы функций соболевского типа $M_q^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|^\gamma, m_n)$. При этом условия вложения пространств Соболева $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ в пространства Лебега, как и в изотропном случае [1, 2], оказываются простым следствием теорем вложения для пространств $M_p^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|, m_n)$.

Для произвольной функции $u \in W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ п. в. на границе пика однозначно определены естественные предельные значения, что позволяет корректно определить след функции $u$ на $\partial G_{\vec{\lambda}}$. В работе рассматривается вопрос о вложении

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00662–а).

следов соболевских функций в различные функциональные пространства на границе «нулевого» анизотропного пика

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) \to \Phi(\partial G_{\vec{\lambda}}).$$

Можно отметить, что в отличие от ситуации с оператором вложения вопрос о компактности оператора следа для областей с нерегулярной границей исследован мало, что объясняется вполне объективными причинами. В общем случае не существует универсального описания границы областей с гёльдеровыми особенностями, различные граничные элементы могут иметь существенно различную структуру, что естественным образом оказывает влияние на локальные свойства следов. Для изотропного «нулевого» пика $G_\varphi \subset \mathbb{R}^n$, определяемого функцией $\varphi$, М. Ю. Васильчик и В. М. Гольдштейн [3] доказали, что пространство следов соболевских функций класса $W_2^1(G_\varphi)$ компактно вложено в весовое пространство Лебега $L_{2,\varphi}(\partial G_\varphi)$ на границе пика. При этом даже для модельных областей с гёльдеровыми особенностями полное описание пространства следов соболевских функций на границе области оказывается довольно сложным и прямые методы изучения свойств оператора следа приводят к существенным техническим проблемам.

Для изотропных пиков $G_\lambda$ с гёльдеровой особенностью порядка $\lambda$ в вершине в работах [1, 2] получены условия компактности вложения следов функций класса $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство Лебега $L_q(\partial G_\lambda)$ на границе пика. Используемые в этих работах методы, с одной стороны, отличны от традиционно применяемых в данной тематике, с другой стороны, позволяют, на наш взгляд, достаточно просто получить искомый результат. Обычно пространство Соболева $W_p^1(G)$ воспринимается как подпространство функций из $L_p(G)$, у которых первые обобщенные производные суммируемы в степени $p$. Однако для «хороших» областей, к примеру для всего евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ или для шара $B \subset \mathbb{R}^n$, пространство Соболева $W_p^1$ допускает различные альтернативные описания. Такая вариативность определения позволяет при исследовании конкретных вопросов использовать описание, наиболее приспособленное к решению соответствующих задач. На наш взгляд, при доказательстве теорем вложения весьма удобным является описание пространств Соболева $W_p^1(B)$, основанное на полученной Боярским и Хайлашем [4] поточечной глобальной оценке липшицева типа. Используя оценку такого вида, Хайлаш [5] на произвольном метрическом пространстве $(X, d)$ с мерой $\mu$ ввел классы функций соболевского типа $M_p^1(X, d, \mu)$ и доказал аналоги соболевских теорем вложения для достаточно широкого класса $s$-регулярных мер. Получаемые в теоремах вложения для пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ оценки на показатель суммируемости не зависят от природы конкретного метрического пространства $(X, d)$, а полностью определяются соотношением метрики и меры, что делает соответствующие утверждения весьма универсальными.

Применяемый в данной работе метод основан на взаимосвязи классических пространств Соболева $W_p^1$ и пространств соболевского типа $M_p^1$ в анизотропном пике $G_{\vec{\lambda}}$. Такой подход позволяет получить необходимые и достаточные условия компактности оператора следа, не используя явного описания пространства следов на границе пика.

## § 1. Пространства $M_p^1$

Приведем необходимые определения и сформулируем используемые в дальнейшем результаты, касающиеся пространств $M_p^1$.

Рассмотрим метрическое пространство $(X, d)$, имеющее конечный диаметр, и конечную регулярную борелевскую меру $\mu$ на $X$.

Функцию $g : X \to [0, \infty)$ называют *допустимой* для $\mu$-измеримой функции $u : X \to \overline{R}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \tag{1}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Для функции $u$ обозначим через $D(u)$ множество всех допустимых функций и положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(\mu)$.

*Пространство соболевского типа* $M_p^1(X, d, \mu)$ определим условием

$$M_p^1(X, d, \mu) = \{u \in L_p(\mu) \mid D_p(u) \neq \varnothing\},$$

а норму — равенством

$$\left\| u \mid M_p^1 \right\| = \| u \mid L_p \| + \inf_{g \in D_p(u)} \| g \mid L_p \|. \tag{2}$$

Если не предполагать никакой взаимосвязи между метрикой $d$ и мерой $\mu$, то довольно сложно ожидать, что для функций из пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ удастся получить содержательные аналоги евклидовых результатов, выполняющихся для функций из соболевских пространств $W_p^1(B)$. Достаточно развитая теория пространств $M_p^1$, включающая в себя различные теоремы вложения, получается в случае, когда мера $\mu$ удовлетворяет простому геометрическому «условию удвоения», согласно которому мера шара удвоенного радиуса оценивается сверху через меру исходного шара, т. е.

$$\mu(B(x, 2\rho)) \leq C_d \mu(B(x, \rho))$$

при всех $x \in X$ и $\rho > 0$.

Из условия удвоения следует оценка снизу для меры шара через его радиус

$$\mu(B(x, \rho)) \geq b\rho^s, \tag{3}$$

где $s = \log_2 C_d$. Меру $\mu$, удовлетворяющую оценке (3), называют *$s$-регулярной.* При этом показатель $s$ играет роль «размерности» метрического пространства $(X, d)$ в аналогах классических соболевских теорем вложения для пространств $M_p^1$.

**Лемма 1.** *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда оператор вложения*

$$I : M_p^1(X, d, \mu) \to L_q(X, \mu)$$

*компактен при*

1) $1 \leq q < \frac{ps}{s-p}$, *если* $p < s$;

2) $1 \leq q < \infty$, *если* $p = s$;

3) $1 \leq q \leq \infty$, *если* $p > s$.

Первые два пункта данного утверждения являются следствием результатов работы [6], доказательство третьего приведено в работе [2].

С произвольным числом $\gamma \in (0, 1)$ свяжем новую гёльдерову метрику, определяемую равенством $d_\gamma(x, y) = (d(x, y))^\gamma$. Следующее утверждение показывает взаимосвязь между пространствами $M_p^1$, определяемыми различными метриками [2].

**Лемма 2.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < 1$. *Оператор вложения*

$$I : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$$

*компактен при*

1) $1 \le r < \frac{ps}{s-(1-\gamma)p}$, *если* $(1-\gamma)p < s$;
2) $1 \le r < \infty$, *если* $(1-\gamma)p = s$;
3) $1 \le r \le \infty$, *если* $(1-\gamma)p > s$.

Заметим, что из п. 3 следует гёльдеровость функции, понимаемая в обычном смысле, т. е. $|u(x) - u(y)| \le C(d(x, y))^\gamma$.

Поскольку при $\gamma = 0$ получаем тривиальную метрику $d_0(x, y) = 1$ для $x \ne y$, то $M_p^1(X, d_0, \mu) = L_p(X, \mu)$. Непосредственно из формулировок видно, что утверждение леммы 1 соответствует предельному случаю леммы 2.

Для пространств $M_p^1$ выполняются и некоторые аналоги классических теорем о следах соболевских функций. В евклидовом случае первым вопросом, возникающим при изучении следов на множестве $E$ нулевой $n$-мерной меры Лебега, является корректное определение в точках множества $E$ естественных значений функции $u \in W_p^1$, вообще говоря, изначально заданной лишь п. в. Элементом пространства $M_p^1(X, d, \mu)$, имеющего интегральную норму, является класс эквивалентных функций, и функция $u \in M_p^1(X, d, \mu)$ также может быть не определена на множестве нулевой меры. Поэтому в метрическом случае нужно описать подмножества $E \subset X$, которые будем считать множествами «меньшей размерности», и доопределить функцию $u$ в точках множества $E$.

Для меры с условием удвоения выполняется теорема Лебега о дифференцировании интеграла, согласно которой почти все точки области определения локально суммируемой функции являются ее точками Лебега, т. е. значения функции п. в. совпадают с пределом средних значений по шару. Как и для соболевских функций в евклидовом случае, для функций, принадлежащих пространству $M_p^1(X, d, \mu)$, это утверждение допускает существенное уточнение.

Пусть мера $\mu$ удовлетворяет условию удвоения и является $s$-регулярной, $s > 1$, а подмножество $E \subset X$ и удовлетворяющая условию удвоения $s'$-регулярная мера $\nu$ таковы, что для произвольного шара $B(x, \rho)$ с центром $x \in E$ верна оценка $\nu(B(x, \rho)) \le C\rho^{-\alpha}\mu(B(x, \rho))$, где $\alpha = s - s' > 0$.

В работе [7] показано, что при $p > \alpha$ для произвольной функции $u \in M_p^1(X, d, \mu)$ предел средних значений по шару

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\mu(B(x, \rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} u \, d\mu \qquad (4)$$

существует $\nu$-п. в. на множестве $E$.

Функция $\tilde{u}(x)$, определяемая равенством (4), $\mu$-п. в. совпадает с функцией $u$ на множестве $X$ и имеет естественные значения $\nu$-п. в. на множестве $E$. *Следом функции* $u$ на множестве $E$ будем называть сужение на это множество функции $\tilde{u}(x)$.

В рамках шкалы пространств $M_p^1$ можно получить внутреннюю теорему вложения для следов на подмножествах «меньшей размерности» [2].

**Лемма 3.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s, p\}$ *и* $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : M_p^1(X, d, \mu) \to M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

*компактен при*

1) $1 \le r < \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, *если* $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$, *если* $(1-\gamma)p = s$;

3) $1 \le r \le \infty$, *если* $(1-\gamma)p > s$.

Из лемм 1 и 3 следует результат о компактности вложения пространства следов в соответствующее пространство Лебега [2].

**Лемма 4.** *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < \alpha < \min\{s, p\}$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : M_p^1(X, d, \mu) \to L_q(E, \nu)$$

*компактен при*

1) $1 \le q < \frac{p(s-\alpha)}{s-p}$, *если* $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$, *если* $p = s$;

3) $1 \le q \le \infty$, *если* $p > s$.

Определение функциональных классов $M_p^1$ является переформулировкой в терминах метрики и меры альтернативного описания пространств Соболева $W_p^1(B)$, поэтому на шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ пространство $W_p^1(B)$ при $p > 1$ совпадает с пространством $M_p^1(B, |*|, m_n)$, рассматриваемым относительно обычной евклидовой метрики $|*|$ и $n$-мерной меры Лебега $m_n$. В работе [5] показано, что в евклидовых областях $G \subset \mathbb{R}^n$, для которых существует ограниченный оператор продолжения $\mathrm{Ext} : W_p^1(G) \to W_p^1(\mathbb{R}^n)$, пространства $W_p^1(G)$ и $M_p^1(G) = M_p^1(G, |*|, m_n)$ совпадают, а норма, определяемая равенством (2), оказывается эквивалентной стандартной $W_p^1$-норме. При этом легко показать, что для областей $G$, аналогичных области, построенной в известном примере Никодима, пространства $M_p^1(G)$ и $W_p^1(G)$ существенно различны. Поэтому для евклидовых областей $G$ общего вида можно гарантировать лишь вложение пространства $M_p^1(G)$ в пространство Соболева $W_p^1(G)$ [5].

Свойства функций из пространств Соболева $W_p^1(G_{\vec\lambda})$ существенным образом зависят от геометрической структуры пика, которая определяется вектором $\vec\lambda$. Хорошо известно, что наличие у пика $G_{\vec\lambda}$ гёльдеровой особенности в вершине является препятствием для продолжения соболевских функций из пика на все пространство. Поэтому при произвольных значениях показателя суммируемости $p$ можно лишь утверждать, что

$$M_p^1(G_{\vec\lambda}) \subset W_p^1(G_{\vec\lambda}). \tag{5}$$

Во многих формулировках, связанных с пространствами Соболева $W_p^1(G_{\vec\lambda})$, участвует показатель $\Lambda = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k$. Поскольку для меры шара с центром в вершине пика выполняется оценка $|B(0,r) \cap G_{\vec\lambda}| \sim Cr^{\Lambda}$, в различных оценках показатель $\Lambda$ часто играет роль «асимптотической размерности» пика $G_{\vec\lambda}$ в вершине. В работе [7] показано, что при $p > \Lambda/n$ помимо вложения (5) выполняется и обратное вложение и, следовательно, пространства $W_p^1(G_{\vec\lambda})$ и $M_p^1(G_{\vec\lambda})$ совпадают, а их нормы эквивалентны. Доказательство обратного вложения в работе [7] основано на специальной конструкции оператора продолжения $\mathrm{Ext} : W_p^1(G_{\vec\lambda}) \to W_q^1(\mathbb{R}^n)$, где $q < p$ (более подробное и аккуратное описание аналогичной конструкции для изотропного случая дано в работе [2]). К сожалению, ограничение на показатель суммируемости играет существенную роль при получении необходимых оценок, и этот метод не позволяет выяснить взаимосвязь между пространствами $W_p^1(G_{\vec\lambda})$ и $M_p^1(G_{\vec\lambda})$ при меньших показателях суммируемости.

## § 2. О пространствах Соболева в анизотропных пиках

Всюду далее будем предполагать, что $p > \Lambda/n$ и, следовательно, $W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) = M_p^1(G_{\vec{\lambda}})$. Поэтому при изучении свойств пространства $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ можно использовать леммы 1–4.

Обозначим через $\mu$ сужение $n$-мерной меры Лебега на пик $G_{\vec{\lambda}}$. Мера $\mu$ удовлетворяет условию удвоения, при этом постоянная в неравенстве $\mu(B(x, 2\rho)) \leq C_d\mu(B(x, \rho))$ зависит от положения центра и от радиуса шара. Вполне очевидно, что наибольшее вырождение будет происходить в вершине пика, поэтому оценка, выполняющаяся для шаров $B(0, \rho)$ с центром в вершине, будет верна и для всех остальных шаров. Поскольку $\mu(B(0, \rho)) \sim C_1\rho^\Lambda$ и $\Lambda \geq n$, для произвольного шара с центром в точке $a \in \overline{G_{\vec{\lambda}}}$ и радиуса $\rho \leq 1$ выполняется оценка $\mu(B(a, \rho)) \geq C\rho^\Lambda$, т. е. мера $\mu$ является $\Lambda$-регулярной.

Из леммы 1 непосредственно следует

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ в пространство Лебега $L_q(G_{\vec{\lambda}}, \mu)$ компактно при*

1) $1 \leq q < \frac{p\Lambda}{\Lambda - p}$, *если* $p < \Lambda$;
2) $1 \leq q < \infty$, *если* $p = \Lambda$;
3) $1 \leq q \leq \infty$, *если* $p > \Lambda$.

Далее приведен пример, показывающий точность полученных в теореме оценок на показатель $q$. Как уже было отмечено во введении, этот результат безусловно известен, но метод его получения позволяет еще раз продемонстрировать универсальность теорем вложения для пространств $M_p^1$ и возможность их использования как в изотропном, так и в анизотропном случаях.

Из леммы 2 столь же просто получаются утверждения о вложении пространства Соболева $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ в пространства $M_p^1$, определяемые гёльдеровыми метриками.

**Теорема 2.** *Пусть $\Lambda/n < p < \infty$ и $0 < \gamma < 1$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ в пространство $M_r^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|^\gamma, \mu)$ компактно при*

1) $1 \leq r < \frac{p\Lambda}{\Lambda - (1-\gamma)p}$, *если* $(1 - \gamma)p < \Lambda$;
2) $1 \leq r < \infty$, *если* $(1 - \gamma)p = \Lambda$;
3) $1 \leq r \leq \infty$, *если* $(1 - \gamma)p > \Lambda$.

Конечно, в евклидовом случае более привычно рассматривать вложения пространств Соболева, к примеру, в пространства Бесова, однако и вложения в пространства $M_r^1(\cdot, |*|^\gamma, \cdot)$ представляются достаточно интересными, информативными и в некотором смысле точными.

Так, для пространства $M_r^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|^\gamma, \mu)$, получаемого в теореме 2, вновь можно воспользоваться леммой 1 и получить вложение

$$I : M_r^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|^\gamma, \mu) \to L_q(G_{\vec{\lambda}}, \mu).$$

Для этого нужно лишь пересчитать показатель регулярности меры $\mu$ относительно гёльдеровой метрики $|*|^\gamma$. Легко заметить, что в данном случае мера $\mu$ будет $(\Lambda/\gamma)$-регулярной. В результате получаем

$$q < \frac{r\Lambda}{\Lambda - r\gamma} = \frac{p\Lambda}{\Lambda - p}.$$

Таким образом, использование цепочки вложений

$$W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) \Longrightarrow M_r^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|^\gamma, \mu) \Longrightarrow L_q(G_{\vec{\lambda}}, \mu)$$

приводит к точной оценке на показатель $q$, полученной в теореме 1. Следовательно, и оба вложения, с этой точки зрения, точны.

Заметим, что, хотя пространства Бесова $B_p^\gamma$ и пространства $M_p^1(\cdot, |*|^\gamma, \cdot)$ различны, в некотором смысле они близки.

Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = 1 - 1/p$, $Q$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$, $I$ — интервал $(-1, 1)$. Пространство Бесова $B_p^\gamma(Q)$ можно рассматривать как пространство следов функций из пространства Соболева $W_p^1(Q \times I) = M_p^1(Q \times I, |*|, m_{n+1})$. Из леммы 3 следует, что в данном случае следы образуют подпространство в пространстве $M_{p-\varepsilon}^1(Q, |*|^{\gamma-\varepsilon}, m_n)$.

С другой стороны, из принадлежности функции $u$ пространству $M_p^1(Q, |*|^\gamma, m_n)$ следует оценка $|(u(x+y) - u(x)| \leq |y|^\gamma(g(x+y) + g(x))$, из которой непосредственно получаем, что $u \in B_p^{\gamma-\varepsilon}(Q)$ при всех $\varepsilon > 0$.

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ выполняются вложения

$$B_p^\gamma(Q) \subset M_{p-\varepsilon}^1(Q, |*|^{\gamma-\varepsilon}, m_n), \quad M_p^1(Q, |*|^\gamma, m_n) \subset B_p^{\gamma-\varepsilon}(Q).$$

Если сравнивать не два конкретных пространства, а две шкалы пространств Бесова $B_p^\gamma$ и пространств $M_p^\gamma$, то можно отметить, что пространство из одной шкалы можно в некотором смысле «аппроксимировать» пространствами из другой шкалы. При этом следует учесть, что простое и естественное определение пространств $M_p^1$, основанное на оценке липшицева типа, позволяет достаточно легко получать различные оценки, имеющие весьма универсальный характер.

Отметим еще один результат, связанный с теоремой 2.

**Следствие 3.** *Пусть $p > \Lambda$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ в пространство $C^{0,\gamma}(G_\lambda)$ компактно при $\gamma < 1 - \Lambda/p$.*

Поскольку $p > \Lambda > n$, для соболевских функций локальная гёльдеровость с показателем $\alpha = 1 - n/p$ является следствием стандартной теоремы вложения для пространств Соболева в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, а компактность оператора вложения при $\gamma < 1 - \Lambda/p$ следует из п. 3 теоремы 2.

Используя стандартные процедуры, для функции $u \in M_p^1(G_{\vec{\lambda}}, |*|, m_n)$ п. в. на границе пика можно определить естественные предельные значения. Однако в данном случае проще заметить, что неравенство (1) в определении пространств $M_p^1$ должно выполняться лишь п. в. относительно меры $\mu$, поэтому можно считать, что изначально метрическим пространством, на котором определяется пространство $M_p^1$, является замыкание пика. При этом для функции $u \in M_p^1(\overline{G}_{\vec{\lambda}}, |*|, m_n)$ существование естественных значений п. в. на $\partial G_{\vec{\lambda}}$ следует из рассуждений, приведенных перед леммой 3. Учитывая совпадение пространств $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ и $M_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ при $p > \Lambda/n$, можно использовать при изучении следов соболевских функций леммы 3 и 4.

Обозначим через $\sigma$ сужение $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на границу пика $G_{\vec{\lambda}}$. Для произвольной точки $x \in \partial G_{\vec{\lambda}}$ и произвольного шара $B(x, \rho)$, $\rho <$ diam $G_{\vec{\lambda}}$, выполняется оценка $\sigma(B(x,\rho)) \leq C\rho^{-\lambda_{n-1}}\mu(B(x,\rho))$. Это позволяет воспользоваться леммой 3 при $p > \lambda_{n-1} \geq \Lambda/n$.

**Теорема 4.** *Пусть $\lambda_{n-1} < p < \infty$ и $0 < \gamma < 1$. Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) \to M_q^1(\partial G_{\vec{\lambda}}, |*|^\gamma, \sigma)$$

*компактен при*

1) $1 \leq q < p\frac{\Lambda - \lambda_{n-1}}{\Lambda - (1-\gamma)p}$, *если* $(1-\gamma)p < \Lambda$;

2) $1 \leq q < \infty$, *если* $(1-\gamma)p = \Lambda$;

3) $1 \le q \le \infty$, *если* $(1-\gamma)p > \Lambda$.

Как и ранее, из п. 3 теоремы следует вложение в пространство гёльдеровых функций.

**Следствие 5.** *Пусть* $p > \Lambda$. *Тогда вложение пространства Соболева* $W_p^1(G_{\vec{\lambda}})$ *в пространство* $C^{0,\gamma}(\partial G_{\vec{\lambda}})$ *компактно при* $\gamma < 1 - \Lambda/p$.

Лемма 4 позволяет получить вложение в соответствующее пространство Лебега на границе пика.

**Теорема 6.** *Пусть* $\lambda_{n-1} < p < \infty$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) \to L_q(\partial G_{\vec{\lambda}}, \sigma)$$

*компактен при*
1) $1 \le q < p\frac{\Lambda - \lambda_{n-1}}{\Lambda - p}$, *если* $p < \Lambda$;
2) $1 \le q < \infty$, *если* $p = \Lambda$;
3) $1 \le q \le \infty$, *если* $p > \Lambda$.

Условие на показатель $q$ в п. 1 теоремы 6 определяется степенью $\lambda_{n-1}$, соответствующей направлению наиболее быстрого вырождения пика. При этом оценка для показателя $q$ получается такой же, как и в работах [1, 2] для изотропного пика при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1}$.

В данном случае представляется более естественным рассматривать пространства следов на конкретной грани пика. Определим грань пика $\Gamma_k$ условием

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in \partial G_{\vec{\lambda}} \mid y_k = x^{\lambda_k}\}$$

и обозначим сужение меры $\sigma$ на грань $\Gamma_k$ через $\sigma_k$. Поскольку для произвольных точки $x \in \Gamma_k$ и шара $B(x, r)$ верна оценка $\sigma_k(B(x, \rho)) \le C\rho^{-\lambda_k}\mu(B(x, \rho))$, получаем следующее утверждение.

**Теорема 7.** *Пусть* $\max(\lambda_k, \Lambda/n) < p < \infty$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_{\vec{\lambda}}) \to L_q(\Gamma_k, \sigma_k)$$

*компактен при*
1) $1 \le q < p\frac{\Lambda - \lambda_k}{\Lambda - p}$, *если* $p < \Lambda$;
2) $1 \le q < \infty$, *если* $p = \Lambda$;
3) $1 \le q \le \infty$, *если* $p > \Lambda$.

Для анизотропного пика такая формулировка результата представляется более естественной: вполне очевидно, что для функции, зависящей только от расстояния до вершины пика, на самой «широкой» грани $\Gamma_{n-1}$ допустимое значение показателя суммируемости $q$ будет минимальным, а на самой «узкой» грани $\Gamma_1$ — максимальным.

Отметим, что точность оценок в теоремах 1, 6 и 7 можно продемонстрировать на одном универсальном примере.

Пример. Рассмотрим последовательность липшицевых функций $\{u_k\}$, определяемых в точке $(x, y) \in G_{\vec{\lambda}}$ условием

$$u_k(x, y) = k^{-1+\Lambda/p} \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x \le 1/2k; \\ 2(1 - kx), & \text{если } 1/2k \le x \le 1/k; \\ 0, & \text{если } x \ge 1/k. \end{cases}$$

Поскольку $|u_k| \le k^{-1+\Lambda/p}$, а $|\nabla u_k| = 2k^{\Lambda/p}$ при $1/2k \le x \le 1/k$ и $|\nabla u_k| = 0$ в остальных случаях, то $\|\nabla u_k \mid L_p(G_\alpha)\| \le C_0$ и $\|u_k \mid L_p(G_{\vec\lambda})\| \le C_1 k^{-1}$. Стало быть, последовательность функций $\{u_k\}$ ограничена по норме пространства $W^1_p(G_{\vec\lambda})$.

1. Пусть $q_0 = p\frac{\Lambda}{\Lambda - p}$ и $D_k = G_{\vec\lambda} \cap B(0, 1/2k)$. Тогда

$$\|u_k \mid L_{q_0}(G_{\vec\lambda}, \mu)\|^{q_0} \ge k^{q_0(-1+\Lambda/p)} \int\limits_{D_k} d\mu \ge C > 0.$$

Поскольку последовательность $\{u_k\}$ сходится к нулю п. в. в $G_{\vec\lambda}$ и при этом $\|u_k \mid L_{q_0}(G_{\vec\lambda}, \mu)\| \ge C_0 > 0$, из данной последовательности нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_{q_0}(G_{\vec\lambda}, \mu)$. Таким образом, оценка на показатель $q$, полученная в теореме 1, точна.

2. Обозначим через $v_k$ след функции $u_k$ на границе пика $G_{\vec\lambda}$. Тогда $v_k(x, y) = k^{-1+\Lambda/p}$ при $0 < x \le 1/2k$ и $v_k(x, y) = 0$ при $x \ge 1/k$.

Пусть $E_k = \partial(G_{\vec\lambda} \cap B(0, 1/2k))$. Если $q_1 = p\frac{\Lambda - \lambda_{n-1}}{\Lambda - p}$, то

$$\|v_k \mid L_{q_0}(\partial G_{\vec\lambda}, \sigma)\|^{q_1} \ge k^{q_1(-1+\Lambda/p)} \int\limits_{E_k} d\nu \ge C > 0.$$

Поскольку последовательность $\{v_k\}$ сходится к нулю п. в. на $\partial G_{\vec\lambda}$ и при этом $\|v_k \mid L_{q_1}(\partial G_{\vec\lambda}, \sigma)\| \ge C_1 > 0$, из данной последовательности нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_{q_1}(\partial G_{\vec\lambda}, \sigma)$. Это показывает точность оценки для показателя $q$ в теореме 6.

Точность результата теоремы 7 проверяется абсолютно аналогично.

Как было отмечено, точность результатов для вложений в пространства Лебега является косвенным подтверждением точности соответствующих результатов для вложений в пространства $M^1_q$, определяемые гёльдеровыми метриками.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Романов А. С.* О следах соболевских функций на границе пика с гёльдеровой особенностью // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 176–184.
2. *Романов А. С.* О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 848–866.
3. *Васильчик М. Ю., Гольдштейн В. М.* О разрешимости третьей краевой задачи для области с пиком // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 466–468.
4. *Bojarski B., Hajlasz P.* Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications // Studia Math. 1993. V. 106, N 1. P. 77–92.
5. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
6. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
7. *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.
8. *Романов А. С.* Об одном обобщении пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 949–953.


*Статья поступила 13 ноября 2009 г.*

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru