Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.929.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Ю. Александров, А. П. Жабко

Аннотация. Исследуются системы однородных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Предполагается, что при отсутствии запаздывания нулевые решения рассматриваемых систем асимптотически устойчивы. С помощью прямого метода Ляпунова и подхода Разумихина показывается, что если порядок однородности правых частей изучаемых уравнений больше единицы, то асимптотическая устойчивость сохраняется при любом значении запаздывания. Находятся оценки времени переходных процессов. Исследуется влияние возмущений на устойчивость нулевого решения. Доказывается теорема об асимптотической устойчивости сложной системы, описывающей взаимодействие двух нелинейных подсистем.

Ключевые слова: система с запаздыванием, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова, устойчивость по нелинейному приближению, нестационарное возмущение.

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом широко используются для моделирования различных реальных явлений и процессов [1–4]. Одна из наиболее актуальных проблем, возникающих при анализе динамики таких систем, — это проблема устойчивости [2, 3, 5]. При ее исследовании необходимо учитывать влияние запаздывания на устойчивость решений. Известно [1, 3], что введение даже малого запаздывания может привести к потере устойчивости. Поэтому большой интерес представляет задача нахождения предельных значений запаздываний, не нарушающих устойчивость решений, в том числе выделения таких классов систем, для которых устойчивость сохраняется при любых значениях запаздывания.

Основным методом анализа устойчивости нелинейных систем является прямой метод Ляпунова. Для систем с запаздывающим аргументом при его применении используются или функционалы Ляпунова — Красовского [1–5], или функции Ляпунова и подход Б. С. Разумихина [3–6]. С помощью указанных подходов получены условия устойчивости решений для многих типов систем с запаздыванием (см. [1–6]). Однако следует отметить, что до сих пор не существует общих конструктивных способов построения функций или функционалов Ляпунова для нелинейных систем.

В настоящей работе рассматриваются некоторые классы систем нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом. Предполагается, что при отсутствии запаздывания нулевые решения изучаемых систем асимптотически устойчивы. При применении метода функций Ляпунова и подхода Б. С. Разумихина показано, что если рассматриваемые уравнения существенно нелинейны (их правые части не содержат линейных членов относительно фазовых переменных), то асимптотическая устойчивость сохраняется при любом значении запаздывания. Получены оценки времени переходных процессов, исследовано влияние возмущений на устойчивость нулевого решения.

2. Устойчивость однородных систем

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \tag{1}$$

где $X(t)$ — n-мерный вектор, компоненты векторной функции $F(X)$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $X \in \mathbb{E}^n$ и являются однородными функциями порядка $\mu \geq 1$. Следовательно, рассматриваемые уравнения имеют решение $X(t) \equiv 0$. Будем предполагать, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

В [7, с. 115–117] доказано, что при указанном предположении для изучаемой системы существует функция Ляпунова $V(X)$, заданная при всех $X \in \mathbb{E}^n$ и обладающая следующими свойствами:

(а) $V(X)$ непрерывно дифференцируема;
(б) $V(X)$ положительно определена;
(в) $V(X)$ — однородная функция порядка $\gamma > 1$;
(г) справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial V(X)}{\partial X}\right)^T F(X) = -\|X\|^{\gamma+\mu-1}.$$

Далее рассмотрим соответствующую систему с запаздыванием

$$\dot{X}(t) = F(X(t-\tau)), \quad \tau = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Каждое решение $X(t, t_0, \varphi)$ системы (2) при $t \geq t_0$ определяется начальными условиями: начальным моментом t_0 и начальной вектор-функцией $\varphi(\xi)$, где $X(t_0 + \xi, t_0, \varphi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in [-\tau, 0]$. Будем считать, что для всех исследуемых в настоящей работе систем с запаздыванием функции $\varphi(\xi)$ принадлежат пространству $PC[-\tau, 0]$ кусочно непрерывных при $\xi \in [-\tau, 0]$ функций с равномерной нормой

$$\|\varphi\|_\tau = \sup_{\xi \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\xi)\|,$$

а под $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора. Через $X_t(t_0, \varphi)$ обозначим отрезок решения: $X_t(t_0, \varphi) : \xi \to X(t + \xi, t_0, \varphi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$. В случаях, когда начальный момент времени и начальная функция очевидны из контекста или несущественны, аргументы t_0 и φ в данных обозначениях будем опускать.

Известно [1], что если система (1) линейная ($\mu = 1$), то введение запаздывания может привести к потере устойчивости. Покажем, что для существенно нелинейных уравнений ($\mu > 1$) асимптотическая устойчивость сохраняется при любом значении запаздывания.

Теорема 1. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво. Если выполнено неравенство* $\mu > 1$, *то нулевое решение системы* (2) *асимптотически устойчиво при любом значении* $\tau > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(X)$, построенную для системы (1) и обладающую свойствами (а)–(г). При всех $X \in \mathbb{E}^n$ справедливы оценки

$$a_1\|X\|^\gamma \leq V(X) \leq a_2\|X\|^\gamma,$$

где a_1 и a_2 — положительные постоянные [7, с. 131].

Продифференцируем функцию $V(X)$ в силу системы (2). Получим

$$\dot{V}\big|_{(2)} = \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T F(X(t)) + \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T (F(X(t-\tau)) - F(X(t)))$$
$$\leq -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + b_1\|X(t)\|^{\gamma-1}\|F(X(t-\tau)) - F(X(t))\|,$$

где $b_1 = \mathrm{const} > 0$.

Докажем, что при $\mu > 1$ функция $V(X)$ удовлетворяет требованиям теоремы 31.4 об асимптотической устойчивости систем с запаздыванием из [5].

Выберем число $\delta > 0$. Предположим, что для решения $X(t)$ системы (2) при $\xi \in [t-2\tau, t]$ выполнены неравенство $\|X(\xi)\| < \delta$ и условие Разумихина $V(X(\xi)) < \alpha V(X(t))$, где $\alpha > 1$. Тогда при $\xi \in [t-2\tau, t]$ имеем

$$\|X(\xi)\| \leq \left(\frac{\alpha a_2}{a_1}\right)^{1/\gamma} \|X(t)\|. \tag{3}$$

Используя оценку (3) и формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$\dot{V}(X(t)) \leq -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + \tau b_1 \|X(t)\|^{\gamma-1} \left\| \frac{\partial F(X(t-\theta\tau))}{\partial X} F(X(t-\theta\tau-\tau)) \right\|$$
$$\leq -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + \tau b_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}} \|X(t)\|^{\gamma+2\mu-2},$$

где $0 < \theta < 1$, $b_2 = \mathrm{const} > 0$.

Таким образом, при $\delta < (\tau b_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}})^{1/(1-\mu)}$ справедлива оценка

$$\dot{V}(X(t)) \leq -b_3 \|X(t)\|^{\gamma+\mu-1},$$

в которой $b_3 = 1 - \tau b_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}} \delta^{\mu-1} > 0$. Значит [5, с. 185, 186], нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда множество начальных функций* φ, *удовлетворяющих неравенству* $\|\varphi\|_\tau < \Delta$, *где* Δ — *корень уравнения*

$$\Delta + c\tau\Delta^\mu = (\tau b_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}})^{1/(1-\mu)},$$

а $c = \max\limits_{\|X\|=1} \|F(X)\|$, *содержится в области асимптотической устойчивости нулевого решения.*

3. Оценки решений

Известно [5, 7], что если $\mu > 1$ и нулевое решение однородной системы (1) без запаздывания асимптотически устойчиво, то при всех $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $X_0 \in \mathbb{E}^n$ и $t \geq t_0$ имеет место неравенство

$$\|X(t, t_0, X_0)\| \leq c_1 \|X_0\| (1 + c_2 \|X_0\|^{\mu-1}(t-t_0))^{-\frac{1}{\mu-1}}, \tag{4}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, а $X(t, t_0, X_0)$ — решение этой системы, проходящее при $t = t_0$ через точку X_0.

Цель настоящего раздела статьи — оценить время переходных процессов для соответствующей системы с запаздыванием.

Теорема 2. *Пусть $\mu > 1$ и нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво. Тогда для любого $\tau > 0$ существуют положительные числа $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{\delta}$ такие, что для решений $X(t, t_0, \varphi)$ системы* (2) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $\|\varphi\|_\tau < \tilde{\delta}$, при всех $t \geq t_0$ справедливы оценки*

$$\|X(t, t_0, \varphi)\| \leq \tilde{c}_1 \|\varphi\|_\tau (1 + \tilde{c}_2 (\|\varphi\|_\tau)^{\mu-1}(t - t_0))^{-\frac{1}{\mu-1}}. \tag{5}$$

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $t_0 = 0$. Построим для уравнений (1) функцию Ляпунова $V(X)$, обладающую свойствами (а)–(г). Из доказательства теоремы 1 следует, что если для решения $X(t)$ системы (2) при $\xi \in [t - 2\tau, t]$ выполнено условие Разумихина $V(X(\xi)) < \alpha V(X(t))$, где $\alpha = \text{const} > 1$, то

$$\dot{V}(X(t)) \leq -d_1 V^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}}(X(t)) + \tau d_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}} V^{\frac{\gamma+2\mu-2}{\gamma}}(X(t)).$$

Здесь d_1 и d_2 — положительные постоянные.

Выберем число $M > 0$ так, что

$$\bar{d} = d_1 - \tau d_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}} M^{\mu-1} > 0.$$

Пусть $a_1 = \min\limits_{\|X\|=1} V(X)$, $a_2 = \max\limits_{\|X\|=1} V(X)$, $c = \max\limits_{\|X\|=1} \|F(X)\|$, а $\tilde{\delta}$ — корень уравнения

$$\tilde{\delta} + c\tau\tilde{\delta}^\mu = a_2^{-\frac{1}{\gamma}} M.$$

Рассмотрим решение $X(t) = X(t, 0, \varphi)$ системы (2) с начальной функцией $\varphi(\xi)$, удовлетворяющей условию $0 < \|\varphi\|_\tau < \tilde{\delta}$. В силу выбора величины $\tilde{\delta}$ при $\xi \in [-\tau, \tau]$ имеем $V(X(\xi)) < M^\gamma$. Покажем, что $V(X(t)) < M^\gamma$ при всех $t > \tau$.

Действительно, если существует момент времени $\bar{t} > \tau$ такой, что $V(X(\bar{t})) = M^\gamma$ и $V(X(t)) < M^\gamma$ на интервале $(\tau, \bar{t})$, то $V(X(\xi)) < \alpha V(X(\bar{t}))$ при $\xi \in [\bar{t} - 2\tau, \bar{t}]$. Следовательно,

$$\dot{V}(X(\bar{t})) \leq -d_1 V^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}}(X(\bar{t})) + \tau d_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}} V^{\frac{\gamma+2\mu-2}{\gamma}}(X(\bar{t})) \leq -\bar{d} V^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}}(X(\bar{t})) < 0.$$

Приходим к противоречию.

Таким образом, на промежутке $[\tau, +\infty)$ справедливо неравенство

$$-d_1 + \tau d_2 \alpha^{\frac{2\mu-1}{\gamma}} V^{\frac{\mu-1}{\gamma}}(X(t)) < -\bar{d}.$$

Пусть $z_0 = a_2(\|\varphi\|_\tau + c\tau(\|\varphi\|_\tau)^\mu)^\gamma$, $0 < \varrho < \bar{d}$, $\tau\varrho(\mu - 1)M^{\mu-1}/\gamma < 1$,

$$1 + 2\tau\varrho \frac{\mu - 1}{\gamma} M^{\mu-1} \leq \alpha^{\frac{\mu-1}{\gamma}}. \tag{6}$$

Докажем, что решение $\tilde{z}(t)$ уравнения

$$\dot{z}(t) = -\varrho\, z^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}(t)$$

с начальным условием $z(\tau) = z_0$ будет мажорантой функции $V(X(t))$.

Имеем

$$\tilde{z}(t) = z_0 \left(1 + \varrho \frac{\mu - 1}{\gamma} z_0^{\frac{\mu-1}{\gamma}}(t - \tau)\right)^{-\frac{\gamma}{\mu-1}}.$$

Из неравенства (6) следует, что если $t \geq \tau$ и $\max\{-2\tau; \tau - t\} \leq \xi \leq 0$, то $\tilde{z}(t + \xi) < \alpha\tilde{z}(t)$.

Предположим, что

$$V(X(t)) \leq \tilde{z}(t) \tag{7}$$

при $t \in [\tau, t_1]$ и $V(X(t_1)) = \tilde{z}(t_1)$, где $t_1 \geq \tau$. Тогда $V(X(\xi)) < \alpha\tilde{z}(t_1) = \alpha V(X(t_1))$ при $\xi \in [t_1 - 2\tau, t_1]$. Значит,

$$\dot{V}(X(t_1)) \leq -\bar{d}V^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}(X(t_1)) < -\varrho\,\tilde{z}^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}(t_1) = \dot{\tilde{z}}(t_1).$$

Получаем, что неравенство (7) выполняется при всех $t \geq \tau$.

Таким образом,

$$\|X(t)\| \leq \|\varphi\|_\tau + c\tau(\|\varphi\|_\tau)^\mu \leq (1 + c\tau M^{\mu-1})\|\varphi\|_\tau$$

при $t \in [0, \tau]$, а на промежутке $[\tau, +\infty)$ справедлива оценка

$$\|X(t)\| \leq \hat{c}_1\|\varphi\|_\tau(1 + \hat{c}_2(\|\varphi\|_\tau)^{\mu-1}t)^{-\frac{1}{\mu-1}},$$

в которой

$$\hat{c}_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/\gamma}(1 + c\tau M^{\mu-1})\left(1 - \frac{\mu-1}{\gamma}\tau\varrho M^{\mu-1}\right)^{-\frac{1}{\mu-1}},$$

$$\hat{c}_2 = \frac{\frac{\mu-1}{\gamma}\varrho a_2^{\frac{\mu-1}{\gamma}}(1 + c\tau M^{\mu-1})^{\mu-1}}{1 - \frac{\mu-1}{\gamma}\tau\varrho M^{\mu-1}}.$$

Выберем число $L > 1$, удовлетворяющее условию

$$1 + c\tau M^{\mu-1} \leq L\hat{c}_1(1 + \hat{c}_2 M^{\mu-1}\tau)^{-\frac{1}{\mu-1}}.$$

Тогда при всех $t \geq 0$ имеем

$$\|X(t)\| \leq \widehat{L}c_1\|\varphi\|_\tau(1 + \hat{c}_2(\|\varphi\|_\tau)^{\mu-1}t)^{-\frac{1}{\mu-1}}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В начале настоящего раздела отмечалось, что если положение равновесия $X = 0$ однородной порядка $\mu > 1$ системы без запаздывания асимптотически устойчиво, то ее решения убывают по степенному закону с показателем степени, равным $1/(1-\mu)$. Теорема 2 утверждает, что тогда аналогичная степенная оценка с тем же самым показателем степени справедлива и для решений соответствующей системы с запаздыванием. При этом неравенство (4) имеет место для всех $X_0 \in \mathbb{E}^n$, а выполнение неравенства (5) можно гарантировать только для достаточно малых значений $\|\varphi\|_\tau$.

4. Устойчивость по нелинейному приближению

Далее наряду с системой (2) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{X}(t) = F(X(t-\tau)) + R(t, X_t). \tag{8}$$

Будем считать, что функционал $R(t, \varphi)$ задан и непрерывен в области

$$\{t \in \mathbb{E} : t \geq 0\} \times \Omega_H, \tag{9}$$

где Ω_H — множество функций $\varphi(\xi) \in PC[-\tau, 0]$, удовлетворяющих условию $\|\varphi\|_\tau < H$, $H = \text{const} > 0$. Предположим, что в области (9) справедлива оценка

$$\|R(t, \varphi)\| \leq \beta(\|\varphi\|_\tau)^\sigma, \quad \beta > 0,\ \sigma > 0. \tag{10}$$

Значит, система (8) также имеет решение $X(t) \equiv 0$. Определим условия, при которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения.

Теорема 3. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво. Если выполнено неравенство*

$$\sigma > \mu > 1, \tag{11}$$

то нулевое решение системы (8) *асимптотически устойчиво при любом значении* $\tau > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(X)$, построенную для уравнений (1) и обладающую свойствами (а)–(г). Дифференцируя ее в силу системы (8), при $t \geq 0$, $\|X_t\|_\tau < H$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(8)} &= \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T F(X(t)) + \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T (F(X(t-\tau)) - F(X(t)) + R(t, X_t)) \\ &\leq -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + b_1\|X(t)\|^{\gamma-1}(\|F(X(t-\tau)) - F(X(t))\| + \beta(\|X_t\|_\tau)^\sigma),\end{aligned}$$

где $b_1 = \mathrm{const} > 0$.

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 1, получаем, что если выполнено неравенство (11), то функция $V(X)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 31.4 из [5]. Следовательно, нулевое решение уравнений (8) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 3 представляет собой теорему об устойчивости по нелинейному приближению. Она утверждает, что возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения, если их порядок превосходит порядок однородности функций, входящих в правые части невозмущенных уравнений.

Замечание 3. Анализ доказательства теоремы 3 показывает, что нулевое решение системы (8) асимптотически устойчиво и в случае, когда в оценке (10) $\sigma = \mu$, а коэффициент β достаточно мал.

5. Системы с возмущениями, имеющими нулевые средние значения

Покажем, что для некоторых классов возмущений найденные в предыдущем разделе условия сохранения асимптотической устойчивости нулевого решения можно ослабить. Для этого воспользуемся предложенным в [8, 9] способом построения нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем.

Пусть система (8) имеет вид

$$\dot{X}(t) = F(X(t-\tau)) + B(t)Q(X(t-\tau)), \tag{12}$$

где $B(t)$ — матрица размера $n \times l$, элементы которой непрерывны и ограничены при $t \in [0, +\infty)$, а компоненты l-мерного вектора $Q(X)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка $\sigma \geq 1$.

Применяя теорему 3, получаем, что если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво и выполнено неравенство (11), то нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво при любом значении запаздывания. Цель этого раздела — показать, что в случае, когда матрица $B(t)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, асимптотическая устойчивость сохраняется и при $\sigma \leq \mu$.

Предположим сначала, что интеграл

$$I(t) = \int_0^t B(s)\,ds \tag{13}$$

ограничен на промежутке $[0, +\infty)$.

В частности, элементы матрицы $B(t)$ могут описывать периодические колебания с нулевыми средними значениями. При этом на амплитуды указанных колебаний никаких ограничений не накладывается.

Замечание 4. Известно [10], что возмущения такого рода могут нарушать устойчивость линейных стационарных систем, т. е. из асимптотической устойчивости системы

$$\dot{X}(t) = PX(t),$$

где P — постоянная матрица, не следует асимптотической устойчивости возмущенной системы

$$\dot{X}(t) = (P + B(t))X(t).$$

Теорема 4. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво, а интеграл* (13) *ограничен на промежутке* $[0, +\infty)$. *Если выполнены неравенства*

$$\mu > 1, \quad 2\sigma > \mu + 1, \tag{14}$$

то нулевое решение системы (12) *асимптотически устойчиво при любом значении* $\tau > 0$.

Доказательство. В [11] показано, что для асимптотически устойчивой системы (1) функцию Ляпунова $V(X)$, обладающую свойствами (а)–(г), можно выбрать так, чтобы она была дважды непрерывно дифференцируемой при всех $X \in \mathbb{E}^n$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{V}(t, X) = V(X) - \left(\frac{\partial V(X)}{\partial X}\right)^T I(t)Q(X).$$

Если интеграл (13) ограничен на промежутке $[0, +\infty)$, то найдутся положительные числа a_1, a_2, a_3 такие, что для любых $t \geq 0$ и $X \in \mathbb{E}^n$ справедливы оценки

$$a_1\|X\|^\gamma - a_3\|X\|^{\gamma+\sigma-1} \leq \widetilde{V}(t, X) \leq a_2\|X\|^\gamma + a_3\|X\|^{\gamma+\sigma-1}.$$

Продифференцируем функцию $\widetilde{V}(t, X)$ в силу возмущенной системы. Получим

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{V}}\Big|_{(12)} = &-\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T (F(X(t-\tau)) - F(X(t))) \\
&+ \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T B(t)(Q(X(t-\tau)) - Q(X(t))) \\
&- (F(X(t-\tau)) + B(t)Q(X(t-\tau)))^T \frac{\partial}{\partial X}\left(\left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T I(t)Q(X(t))\right) \\
\leq &-\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + b_1\|X(t)\|^{\gamma-1}\|F(X(t-\tau)) - F(X(t))\| \\
&+ b_2\|X(t)\|^{\gamma-1}\|Q(X(t-\tau)) - Q(X(t))\| \\
&+ b_3\|X(t)\|^{\gamma+\sigma-2}(\|X(t-\tau)\|^\mu + \|X(t-\tau)\|^\sigma),
\end{aligned}$$

где b_1, b_2, b_3 — положительные постоянные.

Зададим число $\delta > 0$ и предположим, что для решения $X(t)$ системы (12) при $\xi \in [t-2\tau, t]$ выполнены неравенство $\|X(\xi)\| < \delta$ и условие Разумихина $\widetilde{V}(\xi, X(\xi)) < \alpha\widetilde{V}(t, X(t))$, $\alpha = \mathrm{const} > 1$. Если $\sigma > 1$, а $\delta < \left(\frac{a_1}{2a_3}\right)^{1/(\sigma-1)}$, то при $\xi \in [t-2\tau, t]$ имеем

$$\frac{a_1}{2}\|X(\xi)\|^\gamma \le \widetilde{V}(\xi, X(\xi)) \le 2a_2\|X(\xi)\|^\gamma,$$

$$\|X(\xi)\| \le \left(\frac{4\alpha a_2}{a_1}\right)^{1/\gamma}\|X(t)\|. \tag{15}$$

Используя оценку (15), получаем

$$\dot{\widetilde{V}}(t, X(t)) \le -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + b_4\|X(t)\|^{\gamma-1}(\|X(t)\|^{\sigma+\mu-1} + \|X(t)\|^{2\sigma-1} + \|X(t)\|^{2\mu-1}),$$

где b_4 — положительная постоянная, зависящая от выбранных значений τ и α. Следовательно, если параметры μ и σ удовлетворяют условиям (14), то при достаточно малом δ справедливо неравенство

$$\dot{\widetilde{V}}(t, X(t)) \le -\frac{1}{2}\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Пусть задана система

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j^\mu(t), \quad i = 1, \dots, n, \tag{16}$$

где p_{ij} — постоянные коэффициенты, μ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\mu > 1$.

Будем считать, что существуют положительные постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, при которых квадратичная форма

$$W(Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i p_{ij} y_i y_j$$

отрицательно определена. Условия существования таких значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ получены в [12, 13]. При выполнении данного предположения нулевое решение системы (16) асимптотически устойчиво, а однородную функцию Ляпунова для нее можно выбрать в виде

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{\mu+1}.$$

Наряду с уравнениями (16) рассмотрим возмущенную систему с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} + b_{ij}(t))x_j^\mu(t-\tau), \quad i = 1, \dots, n, \tag{17}$$

где $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, функции $b_{ij}(t)$ непрерывны и ограничены на промежутке $[0, +\infty)$ вместе с интегралами $\int\limits_0^t b_{ij}(s)\,ds$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Применяя теорему 4, получаем, что нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво при любом значении $\tau > 0$.

Предположим теперь, что интеграл (13) не является ограниченным на промежутке $[0, +\infty)$. Снова будем считать, что элементы матрицы $B(t)$ имеют нулевые средние значения, причем предельное соотношение

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} B(s)\,ds \to 0 \quad \text{при } T \to +\infty \tag{18}$$

выполняется равномерно относительно $t \geq 0$.

Покажем, что для возмущений такого вида асимптотическая устойчивость нулевого решения сохраняется и в случае, когда их порядки совпадают с порядком однородности правых частей невозмущенных уравнений.

Теорема 5. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и равномерно относительно* $t \geq 0$ *выполняется предельное соотношение* (18). *Если* $\sigma \geq \mu > 1$, *то нулевое решение системы* (12) *асимптотически устойчиво при любом значении* $\tau > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(X)$, построенную для системы (1) и обладающую свойствами (а)–(г). Как и при доказательстве теоремы 4, будем считать, что $V(X)$ дважды непрерывно дифференцируема при всех $X \in \mathbb{E}^n$.

Используя предложенный в [14] способ построения нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем, функцию Ляпунова выбираем в виде

$$\widetilde{V}(t, X) = V(X) - \left(\frac{\partial V(X)}{\partial X}\right)^T L(t, \varepsilon) Q(X),$$

где ε — положительный параметр, а

$$L(t, \varepsilon) = \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-s)} B(s)\,ds.$$

При всех $t \geq 0$ и $X \in \mathbb{E}^n$ справедливы оценки

$$a_1\|X\|^\gamma - \frac{a_3}{\varepsilon}\|X\|^{\gamma+\sigma-1} \leq \widetilde{V}(t, X) \leq a_2\|X\|^\gamma + \frac{a_3}{\varepsilon}\|X\|^{\gamma+\sigma-1},$$

в которых положительные постоянные a_1, a_2, a_3 не зависят от выбранного значения ε.

Дифференцируя $\widetilde{V}(t, X)$ в силу системы (12), получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{V}}|_{(12)} &= -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T (F(X(t-\tau)) - F(X(t))) \\
&+ \left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T B(t)(Q(X(t-\tau)) - Q(X(t))) + \varepsilon\left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T L(t, \varepsilon) Q(X(t)) \\
&- (F(X(t-\tau)) + B(t)Q(X(t-\tau)))^T \frac{\partial}{\partial X}\left(\left(\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\right)^T L(t, \varepsilon) Q(X(t))\right) \\
&\leq -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + b_1\|X(t)\|^{\gamma-1}(\|F(X(t-\tau)) - F(X(t))\| + \|Q(X(t-\tau)) - Q(X(t))\|) \\
&+ b_2\varepsilon\|L(t, \varepsilon)\|\|X(t)\|^{\gamma+\sigma-1} + \frac{b_3}{\varepsilon}\|X(t)\|^{\gamma+\sigma-2}(\|X(t-\tau)\|^\mu + \|X(t-\tau)\|^\sigma),
\end{aligned}$$

где $b_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

В [15] доказано, что если предельное соотношение (18) выполняется равномерно относительно $t \geq 0$, то существует функция $\eta(\varepsilon)$, заданная при $\varepsilon \in (0, +\infty)$ и обладающая следующими свойствами: $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon\|L(t,\varepsilon)\| \leq \eta(\varepsilon)$ для всех $t \geq 0$. Значит, при $\sigma > 1$ на решениях $X(t)$ системы (12), удовлетворяющих условиям $\|X(\xi)\| < \delta$, $\widetilde{V}(\xi, X(\xi)) < \alpha\widetilde{V}(t, X(t))$ при $\xi \in [t - 2\tau, t]$, где $0 < \delta < \left(\frac{a_1\varepsilon}{2a_3}\right)^{1/(\sigma-1)}$, $\alpha = \text{const} > 1$, справедлива оценка

$$\dot{\widetilde{V}}(t, X(t)) \leq -\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1} + b_4\|X(t)\|^{\gamma-1}(\|X(t)\|^{\sigma+\mu-1} + \|X(t)\|^{2\sigma-1} + \|X(t)\|^{2\mu-1}) + b_2\eta(\varepsilon)\|X(t)\|^{\gamma+\sigma-1} + \frac{b_5}{\varepsilon}(\|X(t)\|^{\gamma+\sigma+\mu-2} + \|X(t)\|^{\gamma+2\sigma-2}),$$

где b_4 и b_5 — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Пусть $\sigma \geq \mu > 1$. Выберем и зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, что $b_2\eta(\varepsilon) < 1/4$. Тогда при достаточно малых значениях $\delta > 0$ получим

$$\dot{\widetilde{V}}(t, X(t)) \leq -\frac{1}{2}\|X(t)\|^{\gamma+\mu-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание 5. В частности, предельное соотношение (18) выполняется равномерно относительно $t \geq 0$ в случае, когда элементы матрицы $B(t)$ представляют собой почти периодические функции с нулевыми средними значениями. Известно [16], что при этом интеграл (13) может быть не ограничен на промежутке $[0, +\infty)$.

6. Устойчивость сложных систем

Рассмотрим еще один класс возмущенных систем, для которого можно получить менее жесткие условия асимптотической устойчивости по сравнению с условиями, найденными в разд. 4.

Разобьем вектор фазовых координат на две группы: $X = (Y^T, Z^T)^T$, где $Y \in \mathbb{E}^k$, $Z \in \mathbb{E}^{n-k}$, $1 \leq k < n$. Будем считать, что система (8) имеет следующую структуру:

$$\dot{Y}(t) = F_1(Y(t-\tau)) + R_1(t, X_t), \quad \dot{Z}(t) = F_2(Z(t-\tau)) + R_2(t, X_t), \tag{19}$$

где компоненты векторных функций $F_1(Y)$ и $F_2(Z)$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $Y \in \mathbb{E}^k$ и $Z \in \mathbb{E}^{n-k}$ соответственно и являются однородными функциями порядка $\mu \geq 1$; функционалы $R_1(t,\varphi)$ и $R_2(t,\varphi)$ заданы и непрерывны в области (9) и удовлетворяют неравенствам

$$\|R_1(t,\varphi)\| \leq \beta_1(\|\varphi_Z\|_\tau)^{\sigma_1}, \quad \|R_2(t,\varphi)\| \leq \beta_2(\|\varphi_Y\|_\tau)^{\sigma_2},$$

в которых β_1, β_2, σ_1, σ_2 — положительные постоянные, $\varphi = \left(\varphi_Y^T, \varphi_Z^T\right)^T$.

Таким образом, (19) представляет собой сложную систему [17], описывающую взаимодействие двух изолированных подсистем

$$\dot{Y}(t) = F_1(Y(t-\tau)), \quad \dot{Z}(t) = F_2(Z(t-\tau)),$$

а функционалы $R_1(t,\varphi)$ и $R_2(t,\varphi)$ характеризуют связи между этими подсистемами.

Предположим, что нулевые решения изолированных подсистем без запаздывания

$$\dot{Y}(t) = F_1(Y(t)), \tag{20}$$

$$\dot{Z}(t) = F_2(Z(t)) \tag{21}$$

асимптотически устойчивы. Применяя теорему 3, получаем, что при выполнении неравенств $\mu > 1$, $\sigma_1 > \mu$, $\sigma_2 > \mu$ нулевое решение системы (19) асимптотически устойчиво при любом значении $\tau > 0$.

Покажем далее, что учет специальной структуры рассматриваемой системы позволяет ослабить указанные ограничения на параметры σ_1 и σ_2. Для этого воспользуемся предложенным в [18] способом исследования устойчивости сложных систем по нелинейному приближению.

Теорема 6. *Пусть нулевые решения подсистем* (20) *и* (21) *асимптотически устойчивы. Если выполнены неравенства*

$$\mu > 1, \quad \sigma_1 \geq 1, \quad \sigma_2 \geq 1, \quad \sigma_1\sigma_2 > \mu^2, \tag{22}$$

то нулевое решение системы (19) *асимптотически устойчиво при любом значении* $\tau > 0$.

Доказательство. Из асимптотической устойчивости изолированных подсистем (20) и (21) следует существование заданных при $Y \in \mathbb{E}^k$ и $Z \in \mathbb{E}^{n-k}$ непрерывно дифференцируемых положительно определенных однородных порядка γ_1 и γ_2 соответственно функций Ляпунова $V_1(Y)$ и $V_2(Z)$, для которых имеют место соотношения

$$\left(\frac{\partial V_1(Y)}{\partial Y}\right)^T F_1(Y) = -\|Y\|^{\gamma_1+\mu-1}, \quad \left(\frac{\partial V_2(Z)}{\partial Z}\right)^T F_2(Z) = -\|Z\|^{\gamma_2+\mu-1}.$$

При этом в качестве γ_1 и γ_2 можно выбирать любые рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, бóльшие единицы [7, с. 119–123].

Рассмотрим функцию $V(X) = V_1(Y) + V_2(Z)$. При всех $t \geq 0$ и $X \in \mathbb{E}^n$ справедливы оценки

$$a_1(\|Y\|^{\gamma_1} + \|Z\|^{\gamma_2}) \leq V(X) \leq a_2(\|Y\|^{\gamma_1} + \|Z\|^{\gamma_2}),$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Продифференцируем $V(X)$ в силу системы (19). При $t \geq 0$, $\|X_t\|_\tau < H$ получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(19)} = -\|Y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \left(\frac{\partial V_1(Y(t))}{\partial Y}\right)^T (F_1(Y(t-\tau)) - F_1(Y(t)) + R_1(t, X_t))\\ - \|Z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} + \left(\frac{\partial V_2(Z(t))}{\partial Z}\right)^T (F_2(Z(t-\tau)) - F_2(Z(t)) + R_2(t, X_t))\\ \leq -\|Y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + b_1\|Y(t)\|^{\gamma_1-1}(\|F_1(Y(t-\tau)) - F_1(Y(t))\| + \beta_1(\|Z_t\|_\tau)^{\sigma_1})\\ - \|Z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1} + b_2\|Z(t)\|^{\gamma_2-1}(\|F_2(Z(t-\tau)) - F_2(Z(t))\| + \beta_2(\|Y_t\|_\tau)^{\sigma_2}),\end{aligned}$$

где b_1 и b_2 — положительные постоянные.

Зададим число δ, $0 < \delta < H$, и предположим, что для решения $X(t)$ системы (19) при $\xi \in [t - 2\tau, t]$ выполнены неравенство $\|X(\xi)\| < \delta$ и условие

Разумихина $V(X(\xi)) < \alpha V(X(t))$, $\alpha = \text{const} > 1$. Тогда найдутся числа $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$ такие, что при $\xi \in [t-2\tau, t]$ имеем

$$\|Y(\xi)\| \le d_1(\|Y(t)\| + \|Z(t)\|^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}), \quad \|Z(\xi)\| \le d_2(\|Y(t)\|^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} + \|Z(t)\|). \tag{23}$$

Используя оценки (23), получаем

$$\begin{aligned}\dot V(X(t)) \le &-\|Y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} - \|Z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}\\ &+ b_3\|Y(t)\|^{\gamma_1-1}(\|Y(t)\|^{\sigma_1\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} + \|Z(t)\|^{\sigma_1} + \|Z(t)\|^{(2\mu-1)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} + \|Y(t)\|^{2\mu-1})\\ &+ b_4\|Z(t)\|^{\gamma_2-1}(\|Z(t)\|^{\sigma_2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} + \|Y(t)\|^{\sigma_2} + \|Y(t)\|^{(2\mu-1)\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} + \|Z(t)\|^{2\mu-1}),\end{aligned}$$

где $b_3 > 0$, $b_4 > 0$.

Если параметры μ, σ_1, σ_2 удовлетворяют условиям (22), то величины $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 > 1$ можно выбирать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\mu}{\sigma_1} < \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{\sigma_2}{\mu}, \quad \frac{\mu}{\sigma_1} < \frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_2+\mu-1} < \frac{\sigma_2}{\mu},$$

$$\frac{\mu\gamma_1}{(2\mu-1)\gamma_2} < \frac{\gamma_1+\mu-1}{\gamma_2+\mu-1} < \frac{(2\mu-1)\gamma_1}{\mu\gamma_2}.$$

Нетрудно показать [19, с. 187–191], что при таких значениях γ_1 и γ_2 и при достаточно малом $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\dot V(X(t)) \le -\frac{1}{2}(\|Y(t)\|^{\gamma_1+\mu-1} + \|Z(t)\|^{\gamma_2+\mu-1}).$$

Следовательно, нулевое решение системы (19) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Предположим далее, что $R_2(t, X_t) \equiv 0$. Тогда уравнения (19) принимают вид

$$\dot Y(t) = F_1(Y(t-\tau)) + R_1(t, X_t), \quad \dot Z(t) = F_2(Z(t-\tau)). \tag{24}$$

Система (24) относится к классу так называемых каскадных систем [20, 21].

Следствие 2. *Пусть нулевые решения подсистем* (20) *и* (21) *асимптотически устойчивы. Если выполнены неравенства $\mu > 1$, $\sigma_1 \ge 1$, то нулевое решение системы* (24) *асимптотически устойчиво при любом значении $\tau > 0$.*

Пример 2. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O, расположенной в его центре инерции. Предположим, что с телом связаны оси координат $Oxyz$, которые являются главными центральными осями этого тела. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента M имеют вид

$$\Theta\dot\omega(t) + \omega(t) \times \Theta\omega(t) = M.$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости, $\Theta = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, A_3\}$ — тензор инерции тела, A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции [22, с. 413–419].

Будем считать, что первые два главных центральных момента инерции тела равны друг другу ($A_1 = A_2$), а управляющий момент $M = M(\omega(t))$ определяется по формуле

$$M(\omega(t)) = \big(p_{11}\omega_1^\mu(t) + p_{12}\omega_2^\mu(t),\, p_{21}\omega_1^\mu(t) + p_{22}\omega_2^\mu(t),\, p_{33}\omega_3^\mu(t)\big)^T,$$

где $\mu > 1$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем; p_{ij} — постоянные коэффициенты, удовлетворяющие следующим условиям: $p_{ii} < 0$, $i = 1, 2, 3$, и $p_{12}p_{21} < 0$. Таким образом, получаем систему

$$A_1\dot{\omega}_1(t) + (A_3 - A_1)\omega_2(t)\omega_3(t) = p_{11}\omega_1^\mu(t) + p_{12}\omega_2^\mu(t),$$

$$A_1\dot{\omega}_2(t) + (A_1 - A_3)\omega_1(t)\omega_3(t) = p_{21}\omega_1^\mu(t) + p_{22}\omega_2^\mu(t),$$

$$A_3\dot{\omega}_3(t) = p_{33}\omega_3^\mu(t).$$

С помощью функций Ляпунова $V_1(\omega_1, \omega_2) = |p_{21}|\omega_1^{\mu+1} + |p_{12}|\omega_2^{\mu+1}$ и $V_2(\omega_3) = \omega_3^2$ нетрудно проверить, что нулевые решения изолированных подсистем

$$A_1\dot{\omega}_1(t) = p_{11}\omega_1^\mu(t) + p_{12}\omega_2^\mu(t), \quad A_1\dot{\omega}_2(t) = p_{21}\omega_1^\mu(t) + p_{22}\omega_2^\mu(t),$$

и

$$A_3\dot{\omega}_3(t) = p_{33}\omega_3^\mu(t)$$

асимптотически устойчивы.

Предположим, что в контуре управления угловая скорость определяется с некоторым запаздыванием $\tau > 0$. Тогда $M = M(\omega(t - \tau))$ и уравнения вращательного движения тела принимают вид

$$\begin{gathered} A_1\dot{\omega}_1(t) + (A_3 - A_1)\omega_2(t)\omega_3(t) = p_{11}\omega_1^\mu(t - \tau) + p_{12}\omega_2^\mu(t - \tau), \\ A_1\dot{\omega}_2(t) + (A_1 - A_3)\omega_1(t)\omega_3(t) = p_{21}\omega_1^\mu(t - \tau) + p_{22}\omega_2^\mu(t - \tau), \\ A_3\dot{\omega}_3(t) = p_{33}\omega_3^\mu(t - \tau). \end{gathered} \tag{25}$$

Данная система представляет собой частный случай системы (24) (здесь $Y = (\omega_1, \omega_2)^T$, $Z = \omega_3$). Применяя следствие 2, получаем, что положение равновесия $\omega = 0$ системы (25) асимптотически устойчиво при любом значении $\tau > 0$.

7. Заключение

В настоящей статье найдены достаточные условия асимптотической устойчивости решений некоторых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Принципиальная особенность полученных результатов по сравнению со случаем линейных систем заключается в том, что асимптотическая устойчивость имеет место для любых значений запаздывания.

Нетрудно проверить, что доказанные теоремы остаются справедливыми, когда запаздывание является непрерывной ограниченной и неотрицательной функцией времени. Кроме того, результаты могут быть распространены на системы с распределенным запаздыванием, а также на некоторые другие типы существенно нелинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Воротников В. И., Румянцев В. В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.

5. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
6. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.
7. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973.
8. *Александров А. Ю.* Об асимптотической устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 3. С. 295–296.
9. *Александров А. Ю.* К вопросу об устойчивости по нелинейному приближению // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1203–1210.
10. *Виноград Р. Э.* Об одном критерии неустойчивости в смысле А. М. Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84, № 2. С. 201–204.
11. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Syst. Control Lett. 1992. V. 19. P. 467–473.
12. *Cross G. W.* Three types of matrix stability // Linear Algebra Appl. 1978. V. 20. P. 253–263.
13. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhauser, 1999.
14. *Тихомиров О. Г.* Устойчивость однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2007. № 3. С. 123–130.
15. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
16. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
17. *Метод* векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987.
18. *Косов А. А.* Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1432–1434.
19. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.
20. *Seibert P., Suarez R.* Global stabilization of nonlinear cascaded systems // Syst. Control Lett. 1990. V. 14. P. 347–352.
21. *Panteley E., Loria A.* Growth rate conditions for stability of cascaded time-varying systems // Automatica. 2001. V. 37, N 3. P. 453–460.
22. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.

Статья поступила 29 июня 2011 г.

Александров Александр Юрьевич, Жабко Алексей Петрович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 35, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504
`alex43102006@yandex.ru`, `zhabko@apmath.spbu.ru`