

УДК 512.542

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОНОРМАЛЬНЫХ π -ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В E_π -ГРУППАХ

Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин

Аннотация. Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Доказано, что если конечная группа G обладает π -холловой подгруппой для некоторого множества π простых чисел, то любая ее нормальная подгруппа (в частности, сама G) обладает π -холловой подгруппой, пронормальной в G .

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: пронормальная подгруппа, холлова подгруппа, свойство E_π , аргумент Фраттини.

К 75-летию Юрия Леонидовича Ершова

Введение

На протяжении статьи термин «группа» будет использоваться в значении «конечная группа».

В соответствии с определением Ф. Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.

Для подгрупп свойство пронормальности является более общим, чем нормальность, и играет в теории групп важную роль. В частности, для пронормальных подгрупп справедлив аргумент Фраттини: *если пронормальная подгруппа H группы G содержится в некоторой нормальной подгруппе A , то $G = AN_G(H)$* . Это утверждение часто оказывается полезным при индуктивных рассуждениях. Отметим, что равенство $G = AN_G(H)$ эквивалентно совпадению множеств $H^G = \{H^g \mid g \in G\}$ и $H^A = \{H^a \mid a \in A\}$.

Ввиду теоремы Силова примерами пронормальных подгрупп в конечной группе являются силовские подгруппы, а также силовские подгруппы любой нормальной подгруппы. Цель данной работы — изучить, в какой мере данные свойства силовских подгрупп могут быть перенесены на холловы подгруппы. Напомним соответствующие определения.

На протяжении всей статьи будем считать, что π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π , через $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n , а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n , для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется π -числом, а группа G , для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется π -группой. Подгруппа H группы G называется π -холловой, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G:H|) \subseteq \pi'$. Таким образом, в случае $\pi = \{p\}$ понятие π -холловой подгруппы совпадает с обычным понятием силовской p -подгруппы.

Под холловой подгруппой понимается подгруппа, являющаяся π -холловой для некоторого множества π , т. е. подгруппа, индекс и порядок которой взаимно просты.

В соответствии с [1] будем говорить, что группа G обладает свойством E_π (или коротко $G \in E_\pi$), если в G имеется π -холлова подгруппа. Если при этом любые две π -холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G обладает свойством C_π ($G \in C_\pi$). Группу со свойством E_π или C_π будем называть также E_π - или C_π -группой соответственно.

Из теоремы Ф. Холла следует, что холловы подгруппы пронормальны в разрешимых группах. Установлено, что π -холловы подгруппы пронормальны

- в конечных простых группах [2];
- в C_π -группах [3].

В [4] изучались свойства групп, в которых π -холловы подгруппы существуют и все пронормальны.

Вместе с тем известно [3], что если множество π простых чисел таково, что $E_\pi \neq C_\pi$, то для любой группы $X \in E_\pi \setminus C_\pi$ и простого числа $p \in \pi'$ группа $X \wr \mathbb{Z}_p$ обладает непронормальными π -холловыми подгруппами, поэтому полностью перенести утверждение о пронормальности силовских подгрупп на холловы подгруппы не удастся.

В [5, теорема 1] доказан следующий аналог аргумента Фраттини для π -холловых подгрупп: если $G \in E_\pi$, то любая нормальная подгруппа A группы G содержит π -холлову подгруппу H такую, что $G = AN_G(H)$.

В данной работе, опираясь на результаты работ [2, 5–9], докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $G \in E_\pi$ для некоторого множества π простых чисел и $A \trianglelefteq G$. Тогда существует π -холлова подгруппа группы A , пронормальная в G .

Следствие 2. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда любая конечная группа, содержащая π -холлову подгруппу, содержит и пронормальную π -холлову подгруппу.

Заметим, что результат работы [9] о пронормальности π -холловых подгрупп в C_π -группах (или, эквивалентно, о наследуемости свойства C_π надгруппами π -холловых подгрупп) является частным случаем этого утверждения.

Теорема 1 обобщает цитированный выше результат из [5]. Отметим также следующее утверждение, обобщающее полезную лемму 6 (см. ниже) и дающее критерий существования π -холловых подгрупп в непростых группах.

Следствие 3. Пусть $A \trianglelefteq G$ и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in E_\pi$ если и только если $G/A \in E_\pi$ и A содержит π -холлову подгруппу H такую, что $H^A = H^G$.

1. Предварительные результаты

Используемые в работе обозначения, в основном, стандартны. Как отмечено во введении, через π всюду обозначается некоторое множество простых чисел. Для группы G через $\text{Hall}_\pi(G)$ обозначается множество всех π -холловых подгрупп группы G . Запись $H \text{ rgn } G$ используется для обозначения того, что H — пронормальная подгруппа группы G .

Лемма 4 [10, гл. IV, (5.11)]. Пусть A — нормальная подгруппа группы G . Если H — π -холлова подгруппа группы G , то $H \cap A$ является π -холловой подгруппой в A , а фактор-группа HA/A — π -холловой подгруппой в G/A .

Напомним, что конечная группа называется π -отделимой, если она обладает нормальным рядом, все факторы которого являются π - или π' -группами.

Лемма 5 [10, гл. V, теорема 3.7]. Любая π -отделимая группа обладает свойством C_π .

Лемма 6 [6, лемма 2.1(e)]. Пусть A — нормальная подгруппа группы G такая, что G/A является π -группой, U — π -холлова подгруппа группы A . Тогда π -холлова подгруппа H группы G , удовлетворяющая условию $H \cap A = U$, существует, если и только если $U^G = U^A$.

Лемма 7 [2, теорема 1]. Холловы подгруппы в простых группах пронормальны.

Лемма 8 [5, теорема 1]. Пусть $G \in E_\pi$ и $A \trianglelefteq G$. Тогда существует подгруппа $H \in \text{Hall}_\pi(A)$ такая, что $G = AN_G(H)$. При этом $N_G(H) \in E_\pi$ и $\text{Hall}_\pi(N_G(H)) \subseteq \text{Hall}_\pi(G)$.

Лемма 9. Пусть H — подгруппа группы G . Возьмем элементы $g \in G$, $y \in \langle H, H^g \rangle$ и предположим, что подгруппы H^y и H^g сопряжены в $\langle H^y, H^g \rangle$. Тогда подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \langle H^y, H^g \rangle$ и $H^{yz} = H^g$. Тогда $z \in \langle H, H^g \rangle$, так как $\langle H^y, H^g \rangle \leq \langle H, H^g \rangle$. Поэтому $x = yz \in \langle H, H^g \rangle$ и $H^x = H^g$. $\square$

Утверждения следующих двух лемм очевидны.

Лемма 10. Пусть $\bar{} : G \rightarrow G_1$ — гомоморфизм групп, $H \leq G$. Тогда если $H \text{ prn } G$, то $\bar{H} \text{ prn } \bar{G}$.

Лемма 11. Пусть G — группа. Тогда если $H \text{ prn } G$, то $H \text{ prn } K$ для любой подгруппы K группы G такой, что $H \leq K$.

Лемма 12 [2, лемма 7]. Пусть G — конечная группа и $G_1, \dots, G_n$ — нормальные подгруппы группы G такие, что $[G_i, G_j] = 1$ при $i \neq j$ и $G = G_1 \dots G_n$. Пусть для любого $i = 1, \dots, n$ в группе G_i выбрана пронормальная подгруппа H_i и $H = \langle H_1, \dots, H_n \rangle$. Тогда $H \text{ prn } G$.

Лемма 13 [7, следствие 9]. Пусть $G \in E_\pi$ и $A \trianglelefteq G$. Тогда для любой $K/A \in \text{Hall}_\pi(G/A)$ найдется $H \in \text{Hall}_\pi(G)$ такая, что $K = HA$.

Лемма 14. Пусть $H \leq G$ и $A \trianglelefteq G$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (1) $H \text{ prn } G$.
- (2) $HA \text{ prn } G$ и $H \text{ prn } N_G(HA)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено утверждение (1). Тогда $HA \text{ prn } G$ по лемме 10 и $H \text{ prn } N_G(HA)$ по лемме 11. Обратно, пусть выполнено утверждение (2). Пусть $g \in G$. Требуется показать, что существует элемент $x \in \langle H, H^g \rangle$ такой, что $H^x = H^g$. Поскольку $HA/A \text{ prn } G/A$, найдется $y \in \langle H, H^g \rangle$, для которого $H^y A = H^g A$. В соответствии с леммой 9 можно заменить H на H^y и считать, что $HA = H^y A = H^g A$, т. е. $g \in N_G(HA)$. Так как $H \text{ prn } N_G(HA)$, существование искомого x очевидно. $\square$

Лемма 15. Пусть A — π -отделимая нормальная подгруппа группы G и $H \in \text{Hall}_\pi(A)$. Тогда $H \text{ prn } G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма вытекает из того, что для любого $g \in G$ подгруппа $\langle H, H^g \rangle \leq A$ π -отделима, при этом H и H^g — ее π -холловы подгруппы и они сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$ по лемме 5. $\square$

Лемма 16. Пусть B — нормальная подгруппа конечной группы G . Тогда для любой нормальной подгруппы A группы G , содержащей B , и для любой $H \in \text{Hall}_\pi(A)$ из условий

- (1) $HB/B \text{ prn } G/B$,
- (2) $(H \cap B) \text{ prn } B$,
- (3) $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$

следует $H \text{ prn } G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $HB/B \text{ prn } G/B$, имеем $HB \text{ prn } G$. По лемме 14 достаточно установить, что $H \text{ prn } N_G(HB)$. Поэтому, не уменьшая общности рассуждений, можем считать, что $G = N_G(HB)$, т. е. $HB \trianglelefteq G$, и $A = N_A(HB)$. Заметим, что в этом случае группа A/B π -отделима, поскольку факторы A/HB и HB/B нормального ряда $A \supseteq HB \supseteq B$ являются соответственно π' - и π -группами.

Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Поскольку $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$, найдется элемент $b \in B$ такой, что $H^g \cap B = H^b \cap B$. Далее, так как $(H \cap B) \text{ prn } B$, найдется элемент

$$y \in \langle H \cap B, H^b \cap B \rangle = \langle H \cap B, H^g \cap B \rangle \leq \langle H, H^g \rangle$$

такой, что $H^y \cap B = H^b \cap B$. По лемме 9 из сопряженности H^y и H^b в $\langle H^y, H^b \rangle$ следует сопряженность H и H^b в $\langle H, H^b \rangle$. Тем самым можно заменить H на H^y и считать, что

$$(H \cap B)^g = (H \cap B)^b = (H \cap B)^y = H \cap B,$$

т. е. $g \in N_G(H \cap B)$. Ясно также, что $H \leq N_A(H \cap B)$.

Далее, так как $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$, применяя аргумент Фраттини, получаем $G = BN_G(H \cap B)$ и $A = BN_A(H \cap B)$. Поэтому группа

$$N_A(H \cap B)/N_B(H \cap B) \cong BN_A(H \cap B)/B = A/B$$

π -отделима. Группа $N_B(H \cap B)$ также π -отделима, поскольку обладает нормальной π -холловой подгруппой $H \cap B$. Следовательно, π -отделимой будет и группа $N_A(H \cap B)$. Но тогда из того, что $H \in \text{Hall}_\pi(N_A(H \cap B))$, по лемме 15, примененной к группе $N_G(H \cap B)$ и ее нормальной π -отделимой подгруппе $N_A(H \cap B)$, имеем $H \text{ prn } N_G(H \cap B)$. Поскольку $g \in N_G(H \cap B)$, для некоторого элемента $x \in \langle H, H^g \rangle$ выполнено равенство $H^x = H^g$. Тем самым установлено, что $H \text{ prn } G$. $\square$

2. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $G \in E_\pi$ и $A \trianglelefteq G$. Требуется показать, что A обладает π -холловой подгруппой H такой, что $H \text{ prn } G$. Доказательство будем проводить индукцией по $|G|$.

Если $|G| = 1$, доказывать нечего.

Пусть $|G| > 1$. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу B , содержащуюся в A (отметим, что при этом не предполагается, что $B \neq A$). Поскольку ввиду леммы 4 $G/B \in E_\pi$, группа A/B по предположению индукции

обладает π -холловой подгруппой K/B такой, что $K/B \operatorname{prn} G/B$. Из леммы 8 следует, что B содержит π -холлову подгруппу V такую, что $G = BN_G(V)$ или, что то же самое, $V^G = V^B$. Это, в частности, означает, что $V^K = V^B$ и по лемме 6 в подгруппе K найдется $H \in \operatorname{Hall}_\pi(K)$ такая, что $V = H \cap B$. Заметим, что $|A : H| = |A : K| |K : H| - \pi'$ -число, поэтому $H \in \operatorname{Hall}_\pi(A)$. Покажем, что $H \operatorname{prn} G$, и тем самым докажем теорему. Воспользуемся леммой 16. Ввиду выбора K имеем $HB/B = K/B \operatorname{prn} G/B$, что эквивалентно $HB = K \operatorname{prn} G$, и, таким образом, выполнено условие (1) в лемме 16. Далее, B является прямым произведением простых групп $B = S_1 \times \cdots \times S_n$, поскольку B — минимальная нормальная подгруппа группы G , и $V = \langle V \cap S_i \mid i = 1, \dots, n \rangle$.

Так как $V \cap S_i \in \operatorname{Hall}_\pi(S_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$ по лемме 4 и $(V \cap S_i) \operatorname{prn} S_i$ по лемме 7, применив лемму 12, получим $H \cap B = V \operatorname{prn} B$, и, таким образом, справедливо утверждение (2) в лемме 16. Наконец, $H \cap B = V$, и ввиду выбора подгруппы V в B имеем $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$. Тем самым выполнено условие (3) в лемме 16. Таким образом, $H \operatorname{prn} G$ по лемме 16. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 1 в случае, когда $G = A$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Пусть $A \trianglelefteq G$. Предположим, что $G/A \in E_\pi$ и A содержит π -холлову подгруппу H такую, что $H^A = H^G$. Покажем, что $G \in E_\pi$. Выберем $X/A \in \operatorname{Hall}_\pi(G/A)$. Поскольку $A \leq X \leq G$, имеем

$$H^A \subseteq H^X \subseteq H^G,$$

откуда $H^A \subseteq H^X$. Учитывая лемму 6 и тот факт, что X/A — π -группа, получаем $X \in E_\pi$. Так как $|G : X| = |G/A : X/A| - \pi'$ -число, имеем

$$\emptyset \neq \operatorname{Hall}_\pi(X) \subseteq \operatorname{Hall}_\pi(G) \text{ и } G \in E_\pi.$$

Обратно, пусть $G \in E_\pi$. Тогда $G/A \in E_\pi$ по лемме 4. В силу теоремы 1 найдется подгруппа $H \in \operatorname{Hall}_\pi(A)$ такая, что $H \operatorname{prn} G$. В частности, для любого $g \in G$ существует элемент $a \in \langle H, H^g \rangle \leq A$ такой, что $H^g = H^a$. Тем самым равенство $H^A = H^G$ доказано. $\square$

3. Замечания

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 утверждает существование пронормальной π -холловой подгруппы в любой нормальной подгруппе A группы $G \in E_\pi$. Требование $G \in E_\pi$ в условии теоремы нельзя заменить требованием $A \in E_\pi$, более слабым ввиду леммы 4. В самом деле, пусть $\pi = \{2, 3\}$ и $A = \operatorname{GL}_3(2) = \operatorname{SL}_3(2)$. Тогда (см. [11, теорема 1.2]) группа A обладает ровно двумя классами сопряженных π -холловых подгрупп с представителями

$$H_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\operatorname{GL}_2(2)} & * \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & * \\ 0 & \boxed{\operatorname{GL}_2(2)} \end{pmatrix}$$

соответственно. Класс H_1^A состоит из стабилизаторов прямых в естественном линейном представлении группы G , а H_2^A — из стабилизаторов плоскостей. Отображение $\iota : x \in A \mapsto (x^t)^{-1}$ является автоморфизмом порядка 2 группы A (здесь x^t — матрица, транспонированная к матрице x). Этот автоморфизм переставляет классы H_1^A и H_2^A . Рассмотрим естественное расщепляемое расширение $G = A : \langle \iota \rangle$. Подгруппы H_1 и H_2 сопряжены в G . Вместе с тем H_1

и H_2 не сопряжены в подгруппе A , содержащей H_1 и H_2 , а следовательно, не пронормальны в G . Остается заметить, что в данном примере $G \notin E_\pi$, как следует из леммы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [3, 9] определено понятие сильно пронормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется *сильно пронормальной*, если для любых $g \in G$ и $K \leq H$ найдется элемент $x \in \langle H, K^g \rangle$ такой, что $K^{gx} \leq H$. В [3] сформулирована гипотеза о том, что любая пронормальная холлова подгруппа конечной группы будет сильно пронормальной. В свете теоремы 1 и ее следствия представляется естественной следующее ослабление данной гипотезы: верно ли, что любая E_π -группа обладает сильно пронормальной π -холловой подгруппой?

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Важную роль в доказательстве теоремы 1 играет лемма 16, из которой, в частности, вытекает следующий признак пронормальности холловых подгрупп. Пусть $A \trianglelefteq G$ для некоторой группы G . Холлова подгруппа H группы G пронормальна, если

- (1) $HA/A \text{ prn } G/A$;
- (2) $(H \cap A) \text{ prn } A$;
- (3) $(H \cap A)^G = (H \cap A)^A$.

Авторам неизвестно, справедливо ли обратное утверждение. Более точно, верно ли, что из условия $H \text{ prn } G$ для холловой подгруппы H группы G следует справедливость утверждений (2) и (3)? Утверждение (1) следует из пронормальности подгруппы H ввиду леммы 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
2. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
3. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. О пронормальности холловых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 35–43.
4. Го В., Ревин Д. О. О классе групп с пронормальными π -холловыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 509–524.
5. Revin D. O., Vdovin E. P. Frattini argument for Hall subgroups // J. Algebra. 2014. V. 414. P. 95–104.
6. Revin D. O., Vdovin E. P. On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.
7. Revin D. O., Vdovin E. P. Existence criterion for Hall subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2011. V. 14, N 1. P. 93–101.
8. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.
9. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
10. Suzuki M. Group theory. II. New York: Springer-Verl., 1986.
11. Ревин Д. О. Холловы π -подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.

Статья поступила 15 июля 2014 г.

Вдовин Евгений Петрович, Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vdovin@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru