*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2015. Том 56, № 3*

*УДК 512.542*

# О СТУПЕНЧАТЫХ СВОЙСТВАХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

**В. Го, А. Н. Скиба**

**Аннотация.** Пусть $A$ — подгруппа группы $G$ и $\theta$ — некоторое теоретико-групповое свойство подгрупп. Будем говорить, что $A$ *ступенчато* обладает свойством $\theta$ в $G$, если $G$ имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, что для каждого $i = 1, \dots, t$ подгруппа $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ обладает свойством $\theta$ в $G/G_{i-1}$. На основе данного понятия получены новые характеризации конечных сверхразрешимых и разрешимых групп.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.302

**Ключевые слова:** конечная группа, подгрупповой функтор, ступенчатое свойство, разрешимая группа, сверхразрешимая группа.

## 1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны, и $G$ всегда обозначает конечную группу. Подгруппы $A$ и $B$ из $G$ называются *$X$-перестановочными*, если по крайней мере для одного $x \in X \subseteq G$ имеем $AB^x = B^xA$ [1]. В этом случае также говорим, что *$A$ $X$-перестановочна* с $B$. 1-Перестановочные подгруппы называются *перестановочными.*

Каждой группе $G$ сопоставим некоторое множество ее подгрупп $\theta(G)$. Если $A \in \theta(G)$, то говорим, что $A$ является *$\theta$-подгруппой* в $G$ или $A$ обладает *свойством $\theta$* в $G$. Будем говорить, что $\theta$ является *подгрупповым функтором*, если для всякого изоморфизма $\tau : G \to G^*$ и каждой $\theta$-подгруппы $A$ из $G$ $\tau(A)$ является $\theta$-подгруппой в $G^*$.

Определение 1.1. Если $G$ имеет нормальный ряд

$$\Gamma : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$$

такой, что

$$(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \in \theta(G/G_{i-1})$$

для каждого $i = 1, \dots, t$, то говорим, что *$A$ $\Gamma$-ступенчато обладает свойством $\theta$* (или просто *$A$ ступенчато обладает свойством $\theta$*) в $G$.

Таким образом, будем говорить, например, что подгруппа $A$ из $G$ является $\Gamma$-*ступенчато перестановочной* с силовской $p$-подгруппой из $G$, $\Gamma$-*ступенчато*

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке NNSF-гранта Китая (грант № 11371335) и Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, USTC, Chinese Academy of Sciences, работа второго автора — при финансовой поддержке Chinese Academy of Sciences Visiting Professorship for Senior International Scientists (грант № 2010T2J12).

*субнормальной* в $G$, $\Gamma$-*ступенчато нильпотентной*, если $(A\cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ перестановочна с силовской $p$-подгруппой из $G/G_{i-1}$, $(A\cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ субнормальна в $G/G_{i-1}$, $(A\cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ нильпотентна соответственно для каждого $i = 1, \dots, t$.

Очевидно, что в случае, когда $A \in \theta(G)$, $A$ ступенчато обладает свойством $\theta$ в $G$. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1.2. Каждая подгруппа сверхразрешимой группы $G$ ступенчато нормальна, поэтому она ступенчато перестановочна со всеми подгруппами из $G$. Каждая подгруппа разрешимой группы $G$ ступенчато субнормальна, каждая силовская подгруппа и каждая максимальная подгруппа из $G$ ступенчато нормальны.

Пример 1.3. Каждая ступенчато нильпотентная (циклическая) подгруппа $A$ из $G$ разрешима (сверхразрешима соответственно), см. ниже доказательство леммы 3.2.

Пример 1.4. Напомним, что подгруппа $H$ из $G$ называется *CAP-подгруппой* (см. [2, с. 37]), если $H$ либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор из $G$; *частичной CAP-подгруппой* [3, 4], если $H$ либо покрывает, либо изолирует каждый фактор некоторого главного ряда из $G$. Нетрудно показать, что $H$ тогда и только тогда является ступенчато $CAP$-подгруппой в $G$, когда она является частичной $CAP$-подгруппой в $G$. Более того, $H$ тогда и только тогда ступенчато нормальна в $G$, когда она является ступенчато $CAP$-подгруппой в $G$.

Собственная подгруппа $A$ из $G$ называется $\cap$-*неразложимой* [5] или *примитивной* [6], если $A$ не может быть записана как пересечение некоторых подгрупп из $G$, содержащих $A$ в качестве собственной подгруппы. Очевидно, что каждая максимальная подгруппа из $G$ является $\cap$-неразложимой подгруппой в $G$.

Нам понадобится следующий

Пример 1.5. Пусть $p > q$ — простые числа и $G = (\langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle) \times \langle c\rangle$, где $|a| = |c| = p$, $|b| = q$ и $A = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$ — неабелева группа порядка $pq$. Тогда $G$ является сверхразрешимой группой, поэтому подгруппа $E = \langle ac\rangle$ ступенчато нормальна в $G$. Более того, $E$ $\cap$-неразложима и не перестановочна с любой подгруппой порядка $q$ из $G$.

Многие известные результаты могут быть обобщены в терминах ступенчатых свойств. Результаты данной работы служат частичной иллюстрацией этого.

Классический результат Томпсона утверждает, что $G$ является разрешимой группой, если $G$ имеет нильпотентную максимальную подгруппу нечетного порядка. Нашим первым наблюдением является следующая «ступенчатая» модификация этого результата.

**Теорема A.** *Тогда и только тогда $G$ является разрешимой группой, когда некоторая максимальная подгруппа $M$ из $G$ ступенчато нильпотентна и 2-силовская подгруппа из $M$ ступенчато абелева в $G$.*

Напомним, что цепь $M_t < \dots < M_2 < M_1 < G_0 = G$, где $M_{i+1}$ — максимальная подгруппа в $M_i$ для всех $i = 0, \dots, t-1$, называется *максимальной цепью* длины $t$ в $G$.

Большое число известных результатов основываются на строгом условии для подгрупп: покрывает или изолирует главные факторы группы. Известно (см., например, [7, 8]), что если каждая максимальная подгруппа из $G$ является (частичной) $CAP$-подгруппой в $G$ или если каждая вторая максимальная подгруппа из $G$ является (частичной) $CAP$-подгруппой в $G$, то $G$ разрешима. Заметим, что в группе $A_4$ каждая подгруппа $L$ порядка 2 является второй максимальной подгруппой и $L$ не является частичной $CAP$-подгруппой в $A_4$.

Тем не менее справедлива

**Теорема B.** *Тогда и только тогда $G$ является разрешимой группой, когда для некоторого фиксированного $0 < n \leq 3$ каждая максимальная цепь длины $n$ из $G$ содержит собственную ступенчато субнормальную подгруппу из $G$.*

Джонсон [6] доказал, что в случае, когда индекс $|G : X|$ всякой $\cap$-неразложимой подгруппы $X$ из $G$ является степенью простого числа, $G$ сверхразрешима. Пример 1.5 показывает, что в общем случае обратное утверждение неверно. Заметим также, что если $|G : A|$ — степень простого числа, то, очевидно, подгруппа $A$ $G$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из $G$. Эти два замечания являются мотивацией для следующих результатов.

**Теорема C.** *Тогда и только тогда группа $G$ сверхразрешима, когда каждая $\cap$-неразложимая подгруппа из $G$ ступенчато $G$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из $G$.*

**Следствие 1.6** [6]. *Если индекс каждой $\cap$-неразложимой подгруппы из $G$ в $G$ является степенью простого числа, то $G$ сверхразрешима.*

**Теорема D.** *Тогда и только тогда группа $G$ сверхразрешима, когда $G$ содержит сверхразрешимое $p$-дополнение для некоторого простого числа $p$ и каждая $\cap$-неразложимая подгруппа $A$ из $G$, индекс которой $|G : A|$ не является степенью $p$, ступенчато перестановочна с некоторой силовской $p$-подгруппой и с некоторым $p$-дополнением в $G$.*

**Следствие 1.7** [9]. *Пусть $G$ имеет сверхразрешимое $p$-дополнение. Если индекс $|G : X|$ любой $\cap$-неразложимой подгруппы $X$ из $G$ является либо $p$-числом, либо $p'$-числом, то $G$ сверхразрешима.*

Пример 1.5 также показывает, что обратное утверждение для следствия 1.7 неверно.

## 2. Основная лемма

Говорим, что подгрупповой функтор $\theta$ является *индуктивным*, если для всякой группы $G$ из того, что $A \in \theta(G)$ и $N \trianglelefteq G$, следует, что $AN/N \in \theta(G/N)$, и *наследственным*, если для всякой группы $G$ из того, что $A \in \theta(G)$ и $A \leq E \leq G$, следует, что $A \in \theta(E)$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $A$ $\Gamma$-ступенчато обладает свойством $\theta$ в $G$, где*

$$\Gamma : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G.$$

(1) *Предположим, что функтор $\theta$ индуктивный. Пусть $N$ — нормальная подгруппа из $G$. Если либо $N \leq G_1$, либо $N \leq A$, либо $\pi(A) \cap \pi(N) = \varnothing$, либо $A$ является холловой подгруппой в $G$, то $AN/N$ $\Gamma^*$-ступенчато обладает свойством $\theta$ в $G/N$, где*

$$\Gamma^* : 1 = G_0N/N \leq G_1N/N \leq \cdots \leq G_tN/N = G/N.$$

(2) *Если функтор $\theta$ наследственный и $A \leq V \leq G$, то $A$ $\Gamma^{**}$-ступенчато обладает свойством $\theta$ в $V$, где*

$$\Gamma^{**} : 1 = G_0 \cap V \leq G_1 \cap V \leq \dots \leq G_t \cap V = V.$$

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$.

(1) Прежде всего заметим, что $AN \cap G_i N = N(A \cap G_i)$. Действительно, если $N \leq A$ или $N \leq G_1$, это очевидно. С другой стороны, если $\pi(A) \cap \pi(N) = \varnothing$, то каждая силовская подгруппа из $A \cap NG_i$ содержится в $G_i$, поэтому $A \cap NG_i = A \cap G_i$. Следовательно,

$$AN \cap G_i N = N(A \cap G_i N) = N(A \cap G_i).$$

Наконец, если $A$ является холловой подгруппой в $G$, то

$$AN \cap G_i N = N(A \cap G_i N) = N(A \cap G_i)(A \cap N) = N(A \cap G_i).$$

Пусть

$$\phi : G/G_{i-1} \to (G/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1})$$

— естественный эпиморфизм $G/G_{i-1}$ на $(G/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1})$. Тогда

$$\phi((A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}) = (A \cap G_i)(NG_{i-1}/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1}),$$

поэтому

$$(A \cap G_i)(NG_{i-1}/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1}) \in \theta((G/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1})),$$

так как подгрупповой функтор $\theta$ индуктивный. Следовательно,

$$(A \cap G_i)NG_{i-1}/NG_{i-1} \in \theta(G/(NG_{i-1})),$$

что влечет

$$((A \cap G_i)NG_{i-1}/N)/(NG_{i-1}/N) \in \theta((G/N)/(NG_{i-1}/N)).$$

Значит,

$$((AN/N) \cap (G_iN/N))(G_{i-1}N/N)/(G_{i-1}N/N) \in \theta((G/N)/(G_{i-1}N/N))$$

для всех $i = 1, \dots, t$. Это показывает, что $AN/N$ $\Gamma^{*}$-ступенчато обладает свойством $\theta$ в $G/N$.

(2) Пусть $f : VG_{i-1}/G_{i-1} \to V/V \cap G_{i-1}$ — канонический изоморфизм. Тогда

$$f((A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}) = (A \cap G_i)(G_{i-1} \cap V)/(G_{i-1} \cap V).$$

С другой стороны, поскольку $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \in \theta(G/G_{i-1})$ и функтор $\theta$ наследственный, имеем $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \in \theta(VG_{i-1}/G_{i-1})$. Следовательно,

$$(A \cap G_i)(G_{i-1} \cap V)/(G_{i-1} \cap V) \in \theta(V/G_{i-1} \cap V)$$

для всех $i = 1, \dots, t$, значит, $A$ $\Gamma^{**}$-ступенчато обладает свойством $\theta$ в $V$.

## 3. Доказательство теорем A и B

Следующая лемма хорошо известна (см. [10, (6.6.3)]).

**Лемма 3.1.** *Пусть $G = R \rtimes M$. Если $M$ — разрешимая максимальная подгруппа в $G$, то $R$ является абелевой группой.*

**Лемма 3.2.** *Если $H$ ступенчато нильпотентна в $G$, то $H$ разрешима.*

Доказательство. Пусть $\theta(X) = \{A \leq X \mid A \text{ нильпотентна}\}$ для любой группы $X$. Тогда, очевидно, $\theta$ является индуктивным подгрупповым функтором. Ввиду условия леммы $G$ имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$, что $(H \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ нильпотентна для каждого $i = 1, \ldots, t$. Ввиду леммы 2.1 $HG_1/G_1$ ступенчато нильпотентна в $G/G_1$. Следовательно, $HG_1/G_1$ разрешима по индукции. С другой стороны, $H \cap G_1$ нильпотентна. Стало быть, $H$ разрешима.

Доказательство теоремы A. Если $G$ разрешима, то для каждого главного фактора $H/K$ и каждой подгруппы $A$ из $G$ подгруппа $(A \cap H)K/K$ абелева. Следовательно, в этом случае каждая подгруппа из $G$ ступенчато абелева.

Предположим, что некоторая максимальная подгруппа $M$ из $G$ ступенчато нильпотентна и силовская 2-подгруппа $P$ из $M$ ступенчато абелева в $G$. Покажем, что $G$ разрешима. Предположим, что это не так, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка.

Ввиду условия теоремы $G$ имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$, что $(M \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ нильпотентна для каждого $i = 1, \ldots, t$, и такой нормальный ряд $1 = M_0 < M_1 < \cdots < M_l = G$, что $(P \cap M_i)M_{i-1}/M_{i-1}$ абелева для каждого $i = 1, \ldots, l$.

(1) *$M$ разрешима* (см. лемму 3.2).

(2) *$G/R$ разрешима для всякой минимальной нормальной подгруппы $R$ из $G$. Следовательно, $C_G(R) = 1$ и $R \nleq M$.*

Если $R \nleq M$, то $G/R = MR/R \simeq M/M \cap R$ разрешима по утверждению (1). Предположим, что $R \leq M$. Тогда $R$ является $p$-группой для некоторого простого числа $p$, поэтому либо $R \leq P$, либо $p \neq 2$. Тем самым силовская 2-подгруппа $RP/R$ из $M/R$ ступенчато абелева в $G/R$ и $M/R$ ступенчато нильпотентна в $G/R$ по лемме 2.1. Это показывает, что условие теоремы справедливо для $G/R$, поэтому $G/R$ разрешима по выбору группы $G$. Более того, в силу выбора $G$ $R$ не абелева и $R$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$. Следовательно, ввиду утверждения (1) $R \nleq M$ и $C_G(R) = 1$.

(3) *$G = MR$ и $D = R \cap M \neq 1$ — нильпотентная нормальная подгруппа в $M$ с абелевой силовской 2-подгруппой. Более того, если $S$ — силовская $p$-подгруппа из $D$ для некоторого простого числа $p$, делящего $|D|$, то $S$ является силовской $p$-подгруппой в $R$, $M = N_G(V)$ и $D = N_R(V)$ для каждой характеристической подгруппы $V$ из $S$.*

Утверждение (2) влечет, что $G = RM$ и $R \leq G_1 \cap M_1$. Тем самым ввиду леммы 3.1 и условия теоремы $1 \neq D = M \cap R \leq M \cap G_1$ является нормальной нильпотентной подгруппой в $M$. Значит, $S$ является характеристической подгруппой в $D$, поэтому $M \leq N_G(S)$. Но поскольку $R$ не абелева, имеем $M = N_G(S)$ и $D = N_R(S)$. Следовательно, $S$ — силовская $p$-подгруппа в $R$. Аналогично получаем, что $M = N_G(V)$ и $D = N_R(V)$. Наконец, для силовской 2-подгруппы $D_2$ из $D$ имеем $D_2 \leq R \cap M \leq M_1 \cap P$, поэтому $D_2$ является абелевой группой.

(4) $|D|$ — *нечетное число.*

Действительно, предположим, что 2 делит $|D|$, и пусть $S$ — силовская 2-подгруппа из $D$. Поскольку $S$ — абелева силовская 2-подгруппа в $R$ и $D = N_R(S)$ нильпотентна по утверждению (3), $S \leq Z(N_R(S))$. Следовательно, $R$ является 2-нильпотентной группой по теореме Бернсайда о нормальном $p$-дополнении [11, IV, 2.6]. Пусть $E$ — $2'$-холлова подгруппа из $R$. Тогда $E$ является характеристической подгруппой в $R$, поэтому она нормальна в $G$. Минимальность подгруппы $R$ влечет, что $R$ является 2-группой; противоречие с утверждением (2). Значит, (4) верно.

*Заключительное противоречие.*

В силу утверждений (2) и (4) некоторое нечетное число $p$ делит $|D|$. Пусть $S$ — силовская $p$-подгруппа из $D$. Тогда $N_R(Z(J(S))) = D$ нильпотентна и $S$ является силовской $p$-подгруппой в $R$ по утверждению (3). Следовательно, $R$ является $p$-нильпотентной группой по теореме Глаубермана — Томпсона. Но тогда $R$ является $p$-группой. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы B. Достаточно доказать, что если в каждой цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$, где $M_i$ — максимальная подгруппа в $M_{i-1}$, $i = 1, 2, 3$, по крайней мере одна из подгрупп $M_1$, $M_2$ или $M_3$ ступенчато субнормальна в $G$, то $G$ разрешима. Предположим, что это не так, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Пусть $R$ — минимальная нормальная подгруппа из $G$, $p$ — наибольший простой делитель $|R|$ и $R_p$ — силовская $p$-подгруппа из $R$.

(1) *$G/R$ разрешима, $C_G(R) = 1$, поэтому $p > 3$.*

Действительно, для всякой группы $X$ пусть $\theta(X)$ — множество всех субнормальных подгрупп из $X$. Ввиду [2, A, 14.1(b)] $\theta$ — индуктивный подгрупповой функтор. Следовательно, условие теоремы справедливо для $G/R$ по лемме 2.1. Значит, $G/R$ разрешима, и $R$ не является абелевой группой по выбору $G$. Более того, $R$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$. Стало быть, $C_G(R) = 1$, и $p > 3$ по $p^a q^b$-теореме Бернсайда.

(2) *Для некоторой максимальной подгруппы $M$ из $G$ и некоторой силовской $p$-подгруппы $G_p$ из $G$ имеем $R_p \leq G_p \leq N_G(R_p) \leq M$ и $M_G = 1$.* (Данное утверждение следует из утверждения (1) и рассуждения Фраттини.)

(3) *$R \neq G$, поэтому $D = M \cap R \neq M$.*

Предположим, что $R = G$ — простая неабелева группа. Пусть $q$ — наименьший простой делитель $|G|$. Тогда $G$ не является $q$-нильпотентной группой, поэтому имеет $q$-замкнутую подгруппу Шмидта $H = H_q \rtimes H_r$ по [11, IV, 5.4]. Очевидно, что $|H_q| \neq q$ и $H \neq G$. Следовательно, $G$ имеет максимальную цепь $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$, где $M_3 \neq 1$. Значит, ввиду условия теоремы по крайней мере одна из подгрупп $M_3$, $M_2$ или $M_1$ является собственной неединичной ступенчато субнормальной подгруппой в $G$. Таким образом, $G$ не является простой группой. Полученное противоречие показывает, что имеет место (3).

(4) *$D$ — нормальная ненильпотентная подгруппа в $M$, поэтому $D \nleq \Phi(M)$.*

Очевидно, что $R_p$ является силовской подгруппой в $D$. Предположим, что $D$ нильпотентна. Тогда $R_p$ является характеристической подгруппой в $D$, поэтому $M \leq N_G(R_p)$, так как $D$ нормальна в $M$. Более того, ввиду (1) имеем $M = N_G(R_p)$, стало быть, $N_R(R_p) = D$ нильпотентна. Значит, $N_R(R_p)/C_R(R_p)$ является $p$-группой, следовательно, $O^p(R) \neq R$ по [12, X, 8.13], так как $p > 3$

по (1). Но ввиду утверждения (1) каждый композиционный фактор из $R$ не абелев; противоречие. Таким образом, имеем (4).

(5) *Подгруппа $M$ содержит такую максимальную подгруппу $T$, что $M = DT$ и $D \cap T \neq 1$.*

По утверждению (4) существует такая максимальная подгруппа $T$ в $M$, что $M = DT$. Предположим, что $D \cap T = 1$. Тогда $D$ является минимальной нормальной подгруппой в $M$. Заметим также, что

$$G/R \simeq MR/R \simeq M/M \cap R = M/D \simeq T$$

разрешима по утверждению (1). Тогда $D$ является $p$-группой по лемме 3.1, что противоречит утверждению (4). Следовательно, $D \cap T \neq 1$.

(6) $1 < D \cap T < T$. *Значит, $T$ имеет такую максимальную подгруппу $V$, что* $1 < D \cap T \leq V$. (Это следует из утверждений (3) и (5).)

(7) *По крайней мере одна из подгрупп $V \cap R$, $T \cap R$ или $D = M \cap R$ субнормальна в $G$.*

По условию теоремы по крайней мере одна из подгрупп $V$, $T$ или $M$ ступенчато субнормальна в $G$. Обозначим эту подгруппу через $L$. Тогда $G$ имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$, что $(L \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ субнормальна в $G/G_{i-1}$ для каждого $i = 1, \ldots, t$. В частности, $L \cap G_1$ субнормальна в $G$. Следовательно, в силу [2, A, 14.2] $L \cap G_1 \cap R = L \cap R$ субнормальна в $G$, так как $R \leq G_1$ по утверждению (1).

*Заключительное противоречие.*

Пусть $L$ — подгруппа из $\{V \cap R, T \cap R, D = M \cap R\}$ такая, что $L$ субнормальна в $G$. Тогда $1 < L \leq M$ и $R$ нормализует $L$ по [2, A, 14.3]. Следовательно, $L^G = L^{RM} = L^M \leq M_G$, поэтому $M_G \neq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

### 4. Доказательство теорем C и D

Нам понадобятся следующие два известных факта.

**Лемма 4.1** [13]. *Пусть $H$, $K$ и $N$ — попарно перестановочные подгруппы из $G$ и $H$ — холлова подгруппа в $G$. Тогда $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$.*

**Лемма 4.2** [5, § 4, 5.1]. *Пусть $A \leq B \leq G$, где $A$ — $\cap$-неразложимая подгруппа из $B$. Тогда в $G$ существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа $X$, что $A = B \cap X$.*

Доказательство теоремы C. Если $G$ сверхразрешима, то, рассмотрев главный ряд из $G$, легко показать необходимость. Значит, нужно только доказать, что если каждая $\cap$-неразложимая подгруппа из $G$ ступенчато $G$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из $G$, то $G$ сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Пусть $R$ — произвольная минимальная нормальная подгруппа из $G$.

(1) *Условие теоремы справедливо для $G/R$, поэтому $G/R$ сверхразрешима.*

Для всякой группы $X$ положим $\theta(X) = \{A \leq X \mid A\ X\text{-перестановочна}$ с каждой силовской подгруппой из $X\}$. Пусть $A \in \theta(X)$ и $N$ — нормальная подгруппа из $X$. Тогда для каждого простого числа $p$, делящего $|X|$, существует такая силовская $p$-подгруппа $P$ в $X$, что $AP = PA$. Следовательно, $(AN/N)(PN/N) = (PN/N)(AN/N)$. Значит, $\theta$ — индуктивный подгрупповой функтор. Стало быть, условие теоремы справедливо для $G/R$ по лемме 2.1. Выбор группы $G$ влечет, что $G/R$ сверхразрешима.

(2) *$R$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$, и $R$ не циклическая.* (Это утверждение следует непосредственно из утверждения (1).)

(3) *Если $X$ — $\cap$-неразложимая подгруппа из $G$, то $X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской $p$-подгруппой $P$ из $G$ для каждого простого числа $p$, делящего $|G|$.*

Ввиду условия теоремы найдется такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_t = G$ из $G$, что для каждого $i = 1, \dots, t$ подгруппа $(X \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ $(G/G_{i-1})$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из $G/G_{i-1}$. В частности, существует такая силовская $p$-подгруппа $P$ из $G$, что $(X \cap G_1)P = P(X \cap G_1)$ является подгруппой в $G$. Ввиду утверждения (2) $R \leq G_1$, поэтому

$$RP \cap (X \cap G_1)P = P(R \cap (X \cap G_1)P) = P(R \cap X \cap G_1)(R \cap P) = P(X \cap R) = (X \cap R)P$$

по лемме 4.1.

(4) *$R$ является абелевой $p$-группой для некоторого простого числа $p$, делящего $|G|$.*

Предположим, что это не так. Тогда ввиду теоремы Томпсона — Фейта 2 делит $|R|$ и $R$ не является 2-группой. Пусть $R_2 = P_1 \cap R$ — силовская 2-подгруппа из $R$, где $P_1$ — некоторая силовская 2-подгруппа из $G$ и $V$ — максимальная подгруппа из $R_2$. Тогда $N_R(V)/V$ является 2-нильпотентной группой по [11, IV, 2.8], поэтому $N_R(V)$ содержит подгруппу $W$ с $|N_R(V) : W| = 2$. Тогда $W$ является $\cap$-неразложимой подгруппой в $N_R(V)$. Следовательно, по лемме 4.2 существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа $X_0$ из $R$, что $W = X_0 \cap N_R(V)$. Ясно, что 2 делит $|R : X_0|$ и 4 не делит $|R : X_0|$. Снова применяя лемму 4.2, получаем, что $X_0 = X \cap R$ для некоторой $\cap$-неразложимой подгруппы $X$ из $G$.

Утверждение (3) влечет, что $X_0 = X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской $p$-подгруппой из $G$ для всякого простого числа $p$, делящего $|G|$. В частности, $G$ имеет такую силовскую 2-подгруппу $P$, что $X_0P = PX_0$. Пусть $R_2 = P \cap R$ — силовская 2-подгруппа из $R$. Тогда по лемме 4.1 получаем, что $X_0P \cap R = X_0(P \cap R) = X_0R_2$ является подгруппой в $R$ и $X_0 < X_0R_2$, так как 2 делит $|R : X_0|$.

Предположим, что некоторое простое число $q \neq 2$ делит $|R : X_0|$. По утверждению (3) найдется такая силовская $q$-подгруппа $Q$ из $G$, что $X_0Q = QX_0$. Тогда $X_0Q \cap R = X_0(Q \cap R)$ является подгруппой в $R$ и $X_0 < X_0R_q$, так как $q$ делит $|R : X_0|$, где $R_q = Q \cap R$ — силовская $q$-подгруппа из $R$. Очевидно также, что $X_0Q \cap X_0R_2 = X_0$. Следовательно, $X_0$ не является $\cap$-неразложимой подгруппой в $R$. Полученное противоречие показывает, что $|R : X_0| = 2$, поэтому $X_0$ нормальна в $R$. Тем самым $1 \neq O^2(R) \neq R$. Поскольку $O^2(R)$ является характеристической подгруппой в $R$, она нормальна в $G$, что противоречит минимальности подгруппы $R$. Следовательно, $R$ является абелевой $p$-группой для некоторого простого числа $p$.

*Заключительное противоречие.*

Пусть $V$ — максимальная подгруппа из $R$ такая, что $V$ нормальна в силовской $p$-подгруппе $G_p$ из $G$. Пусть $q \neq p$ — некоторый простой делитель $|G|$. Ввиду леммы 4.2 существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа $X$ из $G$, что $V = X \cap R$. С другой стороны, в силу утверждения (3) $VQ = QV$ для некоторой силовской $q$-подгруппы $Q$ из $G$. Легко видеть также, что $V = VQ \cap R$

нормальна в $VQ$, поэтому $q$ не делит $|G : N_G(V)|$. Следовательно, $V$ нормальна в $G$, тем самым $|R| = p$, что противоречит утверждению (2). Последнее противоречие завершает доказательство теоремы.

**Лемма 4.3** [14]. *Если $G = AB$, где $A$ — сверхразрешимая подгруппа из $G$ и $B$ — силовская $p$-подгруппа из $G$ для некоторого нечетного простого числа $p$, то $G$ разрешима.*

Доказательство теоремы D. Необходимость очевидна, нужно доказать лишь достаточность. Предположим, что достаточность неверна, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. По условию теоремы $G$ содержит сверхразрешимое $p$-дополнение $B$ для некоторого простого числа $p$. Следовательно, $G = G_pB$ для любой силовской $p$-подгруппы $G_p$ из $G$. Пусть $R$ — произвольная минимальная нормальная подгруппа из $G$.

(1) *Условие теоремы справедливо для $G/R$, поэтому $G/R$ сверхразрешима.*

Очевидно, что $BR/R \simeq B/B \cap RN$ — сверхразрешимое $p$-дополнение в $G/R$. Положим для всякой группы $X$ и фиксированного непустого множества простых чисел $\pi$, что $\theta(X) = \{X\}$, если $X$ не имеет $\pi$-холловых подгрупп, и $\theta(X) = \{A \leq X \mid A$ перестановочна с некоторой $\pi$-холловой подгруппой из $X\}$ в противном случае. Если $N$ — нормальная подгруппа из $X$ и $A \in \theta(X)$, то, очевидно, $AN/N \in \theta(X/N)$. Следовательно, $\theta$ — индуктивный подгрупповой функтор, поэтому условие теоремы справедливо для $G/R$ по лемме 2.1. Значит, $G/R$ сверхразрешима ввиду выбора $G$.

(2) *$R$ является единственной минимальной нормальной подгруппой в $G$, $R \nleq \Phi(G)$, и $R$ не циклическая.* (Это прямо следует из утверждения (1) и выбора группы $G$.)

(3) *Если $X$ — $\cap$-неразложимая подгруппа из $G$ и $|G : X|$ не является степенью числа $p$, то $X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской $p$-подгруппой из $G$ и с некоторым $p$-дополнением в $G$.*

По условию теоремы существует нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_t = G$ из $G$ такой, что для каждого $i = 1, \dots, t$ подгруппа $(X \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ перестановочна с некоторым $p$-дополнением в $G/G_{i-1}$. В частности, существует такое $p$-дополнение $S$ в $G$, что $(X \cap G_1)S = S(X \cap G_1)$ является подгруппой в $G$. Ввиду утверждения (2) $R \leq G_1$, поэтому

$$RS \cap (X \cap G_1)S = S(R \cap (X \cap G_1)S) = S(R \cap X \cap G_1)(R \cap S) = S(X \cap R) = (X \cap R)S$$

по лемме 4.1. Аналогично можно доказать первую часть утверждения (3).

(4) *Для всякой $\cap$-неразложимой подгруппы $X_0$ из $R$ индекс $|R : X_0|$ является либо $p$-числом, либо $p'$-числом.*

Пусть $X$ — $\cap$-неразложимая подгруппа из $G$ такая, что $X_0 = X \cap R$. Если $|G : X| = p^a$, то $|XR : X| = |R : X_0|$ — степень числа $p$. В противном случае в силу утверждения (3) $X_0$ перестановочна с некоторой силовской $p$-подгруппой $P$ из $G$ и с некоторым $p$-дополнением $E$ в $G$. Тогда $X_0 = X_0P \cap X_0S$ по лемме 4.1, поэтому

$$X_0 = X_0P \cap X_0S \cap R = X_0(P \cap R) \cap X_0(S \cap R).$$

Следовательно, либо $X_0(P \cap R) = X$, либо $X_0(S \cap R) = X$, откуда получаем, что $|R : X_0|$ является либо $p$-числом, либо $p'$-числом.

(5) *$R$ является абелевой $q$-группой для некоторого простого числа $q$, поэтому $R \leq G_p$ или $R \leq B$.*

Предположим, что это не так. Тогда $R = A_1 \times \dots \times A_n$, где $A_1, \dots, A_n$ — изоморфные простые неабелевы группы. Пусть $R_p$ — силовская $p$-подгруппа из $R$ и $S = B \cap R$. Тогда $R = R_pS$. Пусть $V$ — максимальная подгруппа из $R_p$ и $N = N_R(V)$. Тогда $N = R_pN_S(V)$ и $|N : VN_S(V)| = p$. Следовательно, $VN_S(V)$ — максимальная подгруппа в $N$. Ввиду леммы 4.2 существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа $X_0$ из $R$, что $X_0 \cap N = VN_S(V)$. Тогда $p$ делит $|R : X_0|$, но $p^2$ не делит $|R : X_0|$. Стало быть, $|R : X_0| = p$ ввиду утверждения (4). Значит, для некоторого $i$ имеем $R = A_iX_0$, поэтому $|A_i : A_i \cap X_0| = p$. Поскольку $A_i$ — простая неабелева группа, то $p > 2$. Но тогда $R = R_pS$ разрешима по лемме 4.3; противоречие. Таким образом, имеем (5).

(6) *$G = R \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы $M$ из $G$.* (Это прямо следует из утверждений (2) и (5).)

(7) *Если $R \leq E$, где $E \in \{G_p, B\}$, то $E$ имеет такую максимальную подгруппу $W$, что $R \nleq W$ и $|R : R \cap W| = q$.*

Пусть, например, $R \leq B$. Тогда $B = R \rtimes (B \cap M)$. Поскольку $B$ сверхразрешима по условию теоремы, $B$ содержит такую максимальную подгруппу $W$ с $|B : W| = q$, что $B \cap M \leq W$. Поэтому $|R : R \cap W| = q$.

*Заключительное противоречие.*

Ввиду утверждения (5) $R \leq G_p$ или $R \leq B$. Пусть, например, $E = B$ и $V = R \cap W$. Тогда $V$ нормальна в $E$ и $V$ является максимальной подгруппой в $R$ по утверждению (7). Поскольку $R$ не является циклической группой, то $V \neq 1$. Ввиду леммы 4.2 найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа $X$ из $G$, что $V = X \cap R$. Если $|G : X|$ является степенью числа $p$, то, очевидно, $X$ перестановочна с некоторой силовской подгруппой $P$ из $G$, поэтому $V = X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской подгруппой $P$ из $G$. С другой стороны, если $|G : X|$ не является степенью $p$, то в силу утверждения (3) $V$ перестановочна с некоторой силовской $p$-подгруппой $P$ из $G$. Следовательно, $V = R \cap VP$ нормальна в $VP$. Поэтому $BP = G \leq N_G(V)$. Минимальность подгруппы $R$ влечет, что $V = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

## 5. Заключительные замечания

Рассуждая, как при доказательстве теоремы A, можно доказать следующий факт.

**Теорема 5.1.** *Тогда и только тогда $G$ является разрешимой группой, когда каждая максимальная подгруппа из $G$ ступенчато нильпотентна в $G$.*

**Следствие 5.2** (О. Ю. Шмидт). *Если каждая максимальная подгруппа из $G$ нильпотентна, то $G$ разрешима.*

В [15, 16] авторами доказано, что если для всякой силовской подгруппы $P$ из $G$ индекс $|G : N_G(P)|$ является степенью простого числа, то $G$ разрешима. В разрешимой группе $G = C_p \wr S_3$ $(p > 3)$ индекс $|G : N_G(S)|$ не является степенью простого числа, где $S$ — силовская 2-подгруппа из $G$. Тем не менее может быть доказан следующий факт.

**Теорема 5.3.** *Пусть $\theta(X) = \{A \leq X \mid |X : N_X(A)|$ — степень простого числа$\}$ для всякой группы $X$. Тогда $G$ является разрешимой группой в том и только том случае, когда каждая силовская подгруппа из $G$ ступенчато обладает свойством $\theta$ в $G$.*

Хорошо известно, что $G$ является разрешимой группой, если индекс каждой максимальной подгруппы из $G$ является либо простым числом, либо квадратом простого числа. Нетрудно показать, что верно следующее обобщение этого результата. *Пусть* $\theta_0(X) = \{A \leq X \mid |X : N_X(A)|$ *— простое число или квадрат простого числа*$\}$ *для всякой группы* $X$. *Тогда* $G$ *является разрешимой группой в том и только том случае, когда каждая максимальная подгруппа из* $G$ *ступенчато обладает свойством* $\theta_0$ *в* $G$. В связи с этим наблюдением естественным выглядит

**Вопрос 5.4.** *Пусть* $\theta_0(X) = \{A \leq X \mid |X : N_X(A)|$ *— простое число или квадрат простого числа*$\}$ *для всякой группы* $X$. *Предположим, что для некоторого фиксированного числа* $1 < n \leq 3$ *каждая максимальная цепь длины* $n$ *из* $G$ *содержит собственную подгруппу из* $G$, *ступенчато обладающую свойством* $\theta_0$ *в* $G$. *Верно ли, что тогда* $G$ *является разрешимой группой?*

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные предложения и замечания.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Guo W., Shum K. P, Skiba A. N.* $X$-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
2. *Doerk K., Hawkes H.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Skiba A. N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. V. 36, N 3. P. 12–31.
4. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Skiba A. N.* Local embeddings of some families of subgroups of finite groups // Acta Math. Sin. 2009. V. 25. P. 869–882.
5. *Weinstein M. (ed.), etc.* Between nilpotent and solvable. Passaic, NJ: Polygonal Publ. House, 1982.
6. *Johnson D. L.* A note on supersoluble groups // Can. J. Math. 1971. V. 23. P. 562–564.
7. *Guo X., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.
8. *Guo X., Wang J., Shum K. P.* On semi-cover-avoiding maximal subgroups and solvability of finite groups // Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 3235–3244.
9. *Chen M. S.* A remark on finite groups // Tamkang J. Math. 1977. V. 8. P. 105–109.
10. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: An introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
11. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
12. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
13. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О $\pi'$-свойствах конечной группы, обладающей $\pi$-холловой подгруппой // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 297–309.
14. *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп // Конечные группы. Тр. Гомельского семинара (Гомель, 1975–1977). Минск: Наука и техника, 1978. С. 50–63.
15. *Zhang J.* Sylow numbers of finite groups // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 111–123.
16. *Го В.* Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 295–300.


*Статья поступила 4 августа 2014 г.*

Го Веньбинь (Wenbin Guo)
University of Science and Technology of China, School of Mathematical Science,
Hefei, 230026, P. R. China
wbguo@ustc.edu.cn

Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com