

УДК 517.983+517.968.25

## О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В $L_2$

В. Б. Коротков

**Аннотация.** Рассматриваются системы линейных функциональных уравнений 3-го рода с компактными по мере операторами в  $L_2$  и общие системы линейных интегральных уравнений 3-го рода в  $L_2$ . Предлагается метод сведения этих систем либо к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с ядерными операторами, либо к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. К получающимся интегральным уравнениям применимы различные точные и приближенные методы решения.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.307

**Ключевые слова:** система линейных функциональных уравнений 3-го рода, компактный по мере оператор, интегральный оператор, линейное интегральное уравнение 1-го или 2-го рода, ядерный оператор, квазивырожденное карлемановское ядро.

Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с  $\sigma$ -конечной положительной мерой  $\mu$ . *Атомом меры* называется множество положительной меры, которое нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера  $\mu$  не является чисто атомической, если в  $X$  существует множество положительной меры, не содержащее атомов меры  $\mu$ .

Пусть  $E_m$  — евклидово пространство размерности  $m$  с нормой  $\|\cdot\|_m$ , и пусть  $L_{2,m}(X, \mu)$  — пространство всех вектор-функций  $f = \{f_1, \dots, f_m\}$  с компонентами  $f_i \in L_2(X, \mu)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и конечной нормой

$$\|f\|_{m,\mu} = \left( \int_X \|f(s)\|_m^2 d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_X \sum_{j=1}^m |f_j(s)|^2 d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  будем обозначать скалярное произведение в  $L_{2,m}(X, \mu)$ .

Рассмотрим в  $L_{2,m}(X, \mu)$  общую систему линейных функциональных уравнений 3-го рода

$$a(s)x(s) - \lambda Dx(s) = f(s) \in L_{2,m}(X, \mu), \quad (1)$$

где неизвестная вектор-функция  $x(s)$  ищется в  $L_{2,m}(X, \mu)$ , все элементы  $(m \times m)$ -матрицы  $a(s)$  определены на  $X$ , почти всюду конечны и измеримы,  $D := (D_{ij})$  —  $(m \times m)$ -матричный оператор, все элементы  $D_{ij}$  которого являются линейными непрерывными операторами, действующими из  $L_2(X, \mu)$  в  $L_2(X, \mu)$ . Систему (1) будем называть *общей системой 2-го рода*, если  $a(s) = \alpha I$  при почти всех  $s \in X$  для некоторого  $\alpha \neq 0$  (здесь  $I$  — единичная матрица), и *общей системой 1-го рода*, если  $a(s) = 0$  для почти всех  $s \in X$ .

Будем рассматривать в статье систему (1) при следующих дополнительных условиях:

(А) все элементы  $a_{ij}(s)$  матрицы  $a(s)$  принадлежат  $L_\infty(X, \mu)$ ;

(В) все операторы  $D_{ij}$  компактны по мере, т. е.  $D_{ij}$  отображают единичный шар пространства  $L_2(X, \mu)$  в множество, любая последовательность элементов которого содержит подпоследовательность, сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры.

Так как всякий интегральный оператор в  $L_2(X, \mu)$  компактен по мере [1, с. 156], общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода в  $L_2(X, \mu)$  с ограниченными измеримыми элементами матричного коэффициента является системой (1), удовлетворяющей условиям (А), (В).

Целью настоящей статьи является редукция системы (1) с помощью явной линейной непрерывной обратимой замены к эквивалентному линейному интегральному уравнению в  $L_2$  либо 1-го, либо 2-го рода, к которому можно применить известные методы решения.

Напомним определения понятий, фигурирующих в формулировке основного результата — теоремы 1.

Будем называть число  $\beta$  *существенным собственным значением матрицы*  $a(s)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mu\{s \in X : |\det(a(s) - \beta I)| < \varepsilon\} > 0.$$

Отметим, что если  $X$  — замыкание открытого множества евклидова пространства,  $\mu$  — мера Лебега и все элементы матрицы  $a(s)$  непрерывны на  $X$ , то любое собственное значение этой матрицы является ее существенным собственным значением.

Пусть  $H, H_1$  — гильбертовы пространства с нормами  $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{H_1}$ . Линейный оператор  $T : H \rightarrow H_1$  называется *унитарным*, если область значений  $T$  есть все  $H_1$  и  $\|Th\|_{H_1} = \|h\|_H$  для каждого  $h \in H$ .

Линейный оператор  $T : H \rightarrow H$  называется *ядерным*, если существуют последовательности  $\{u_n\}, \{v_n\} \subset H$  такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_H \|v_n\|_H < \infty \quad (2)$$

и для всех  $h \in H$

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} (h, u_n)_H v_n, \quad (3)$$

здесь  $(\cdot, \cdot)_H$  — скалярное произведение в  $H$ . Ядерной нормой ядерного оператора  $T$  называется

$$\inf \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_H \|v_n\|_H,$$

где нижняя грань берется по всевозможным  $\{u_n\}, \{v_n\}$ , участвующим в представлениях (3) и удовлетворяющим (2).

Ядерный оператор в любом  $L_2(Y, \nu)$  является компактным интегральным оператором с ядром, удовлетворяющим условию Гильберта — Шмидта.

**Теорема 1.** Пусть  $L_2(X, \mu), L_2(Y, \nu)$  — комплексные сепарабельные пространства, меры  $\mu, \nu$  положительны и  $\sigma$ -конечны,  $\mu$  не имеет атомов,  $\nu$  не является чисто атомической. Пусть  $\alpha$  — какое-нибудь существенное собственное значение матрицы  $a(s)$  в системе (1). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно построить не зависящий от  $\lambda$  и  $f$  унитарный оператор  $V : L_{2,m}(X, \mu) \rightarrow L_2(Y, \nu)$  такой, что

замена  $y = Vx$ ,  $g = Vf$  приводит систему (1), удовлетворяющую условиям (А), (В), к эквивалентному интегральному уравнению в  $L_2(Y, \nu)$

$$\begin{aligned} \alpha y(\eta) + \int_Y [\Gamma_1(\eta, \xi) + K_1(\eta, \xi)] y(\xi) d\nu(\xi) \\ - \lambda \int_Y [\Gamma_2(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] y(\xi) d\nu(\xi) = g(\eta), \quad (4) \end{aligned}$$

где ядра  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) порождают ядерные операторы в  $L_2(Y, \nu)$  с ядерной нормой, меньшей, чем  $\varepsilon$ , ядра  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) — квазивырожденные карлемановские ядра

$$K_i(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{p_{n,i}(\xi)}.$$

Здесь  $\{p_{n,i}\}$  — ограниченные в  $L_2(Y, \nu)$  последовательности,  $\{e_n\}$  — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из  $Y$  с конечными положительными мерами.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как известно [2, с. 239], каждая  $(m \times m)$ -матрица представляется в виде произведения унитарной  $(m \times m)$ -матрицы на верхнюю треугольную  $(m \times m)$ -матрицу. Пользуясь этим, запишем для каждого  $s \in X$  матрицу  $a^*(s) - \bar{\alpha}I$  в виде  $u(s)b(s)$ , где  $a^*(s)$  — сопряженная к  $a(s)$  матрица,  $u(s)$  — унитарная матрица,  $b(s)$  — верхняя треугольная матрица. Так как  $|\det b(s)| = |\det(a^*(s) - \bar{\alpha}I)|$  и 0 является существенным значением  $|\det(a^*(s) - \bar{\alpha}I)|$ , то 0 будет существенным значением хотя бы одного диагонального элемента  $b_{rr}(s)$  матрицы  $b(s)$ . Будем считать без ограничения общности, что  $r = 1$ . Тогда найдутся последовательность попарно не пересекающихся множеств  $\Delta_j$  с конечными положительными мерами и монотонно убывающая к нулю последовательность чисел  $\varepsilon_j$  такие, что

$$|b_{11}(s)| \leq \varepsilon_j \quad \text{для п. в. } s \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Рассмотрим для каждого  $j$  равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций  $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(X, \mu)$  с носителями в  $\Delta_j$ . Существование такой последовательности вытекает из того, что в  $X$  нет атомов меры  $\mu$ . В качестве  $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$  можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера  $\{r_{k,\Delta_j}\}_{k=1}^{\infty}$ , носители которых совпадают с  $\Delta_j$  (определение этих функций см., например, в [3, с. 11, 12]). Пусть  $h_0$  — координатный столбец  $(1, 0, \dots, 0) \in E_m$ . Введем вектор-функции  $\varphi_{k,j} = h_0 g_{k,j}$ . Их носители лежат в  $\Delta_j$ , и  $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$  — ортонормированная система в  $L_{2,m}(X, \mu)$ . Пользуясь унитарностью матриц  $u(s)$  и тем, что  $b(s)$  — верхние треугольные матрицы, для п. в.  $s \in X$  в силу (5) получим

$$\begin{aligned} \|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\varphi_{k,j}(s)\|_m &= \|u(s)b(s)\varphi_{k,j}(s)\|_m \\ &= \|b(s)\varphi_{k,j}(s)\|_m = |b_{11}(s)g_{k,j}(s)| \leq \varepsilon_j |g_{k,j}(s)|, \end{aligned}$$

здесь  $\|\cdot\|_m$  — норма в  $E_m$ . Отсюда для любых  $k, j$

$$\|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\varphi_{k,j}\|_{m,\mu} \leq \varepsilon_j \left( \int_X |g_{k,j}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_j. \quad (6)$$

Зафиксируем  $j$  и покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^* \varphi_{k,j}\|_{m,\mu} = 0, \quad (7)$$

где  $D^*$  — сопряженный к  $D$  оператор. Имеем

$$\begin{aligned} \|D^* \varphi_{k,j}\|_{m,\mu}^2 &= \langle D^* \varphi_{k,j}, D^* \varphi_{k,j} \rangle = \langle DD^* \varphi_{k,j}, \varphi_{k,j} \rangle \\ &= \langle \chi_{\Delta_j} DD^* \varphi_{k,j}, \chi_{\Delta_j} \varphi_{k,j} \rangle = \int_{\Delta_j} h_k g_{k,j} d\mu \leq C_j \int_{\Delta_j} |h_k| d\mu, \end{aligned}$$

где

$$C_j = \sup_{k=1,2,\dots} \|g_{k,j}\|_{L_\infty(\Delta_j,\mu)} < \infty,$$

$h_k$  — первая компонента вектор-функции  $\chi_{\Delta_j} DD^* \varphi_{k,j}$ . Ортонормированная последовательность  $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$  слабо сходится к 0 в  $L_{2,m}(X,\mu)$ . Следовательно,  $\{\chi_{\Delta_j} DD^* \varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$  слабо сходится к 0 в  $L_{2,m}(X,\mu)$ . Но тогда  $\{h_k\}$  слабо сходится к 0 в  $L_2(\Delta_j,\mu)$  и, стало быть, в  $L_1(\Delta_j,\mu)$ . При этом для любого измеримого множества  $e \subset \Delta_j$

$$\int_e |h_k| d\mu \leq K_j \sqrt{\mu e}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$K_j = \sup_{k=1,2,\dots} \left( \int_{\Delta_j} |h_k|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Кроме того, последовательность  $\{h_k\}$  компактна по мере. Отсюда и из слабой сходимости  $\{h_k\}$  к 0 в  $L_1(\Delta_j,\mu)$  следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta_j} |h_k| d\mu = 0.$$

Таким образом, равенство (7) доказано.

Из (7) вытекает, что для каждого  $j$  найдется номер  $k_j$  такой, что

$$\|D^* \varphi_{k_j,j}\|_{m,\mu} < \varepsilon_j. \quad (8)$$

Положим  $\psi_j = \varphi_{k_j,j}$ . Так как  $\|\psi_j\|_{m,\mu} = 1$ , носитель функции  $\psi_j$  содержится в  $\Delta_j$  и множества  $\Delta_j$  попарно не пересекаются, то  $\{\psi_j\}$  — ортонормированная система в  $L_{2,m}(X,\mu)$ , для которой в силу (8), (6) выполняются неравенства

$$\|D^* \psi_j\|_{m,\mu} < \varepsilon_j, \quad \|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\psi_j\|_{m,\mu} < \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем, пользуясь (9), подпоследовательность  $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$  так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|D^* \varphi_n\|_{m,\mu} < \varepsilon, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\varphi_n(s)\|_{m,\mu} < \varepsilon. \quad (10)$$

Введем оператор  $Ah(s) = (a(s) - \alpha I)h(s)$ ,  $h \in L_{2,m}(X,\mu)$ , и рассмотрим ядерные операторы в  $L_{2,m}(X,\mu)$

$$P_1 h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle A^* \varphi_n, \quad P_2 h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle D^* \varphi_n. \quad (11)$$

В силу (10) их ядерные нормы меньше, чем  $\varepsilon$ . Рассмотрим еще операторы  $Q_1 = A^* - P_1$ ,  $Q_2 = D^* - P_2$ . Так как для всех  $n$  имеем  $Q_i \varphi_n = 0$  ( $i = 1, 2$ ), то  $\text{im } Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^\perp$ , где  $[\varphi_n]^\perp$  — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке  $[\varphi_n]$  ортонормированной последовательности  $\{\varphi_n\}$ . Пусть  $\{e_n\}$  — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из  $Y$  с конечными положительными мерами,  $E$  — замкнутая линейная оболочка ортонормированной системы  $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\nu e_n}\}$  и  $E^\perp$  — ортогональное дополнение к  $E$ . Тогда  $\dim E = \dim E^\perp = \dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^\perp = \infty$ .

Пусть  $\{\varphi_n^\perp\}$  — ортонормированный базис подпространства  $[\varphi_n]^\perp$ , а  $\{e_n^\perp\}$  — ортонормированный базис подпространства  $E^\perp$ . Определим унитарный оператор  $V : L_{2,m}(X, \mu) \rightarrow L_2(Y, \nu)$  равенствами

$$V\varphi_n^\perp = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}, \quad V\varphi_n = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Для любого  $h \in L_{2,m}(X, \mu)$  имеем  $Q_i^* h \in [\varphi_n]^\perp$  ( $i = 1, 2$ ) и

$$P_1^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, A^* \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad P_2^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, D^* \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Обозначив через  $(\cdot, \cdot)$  скалярное произведение в  $L_2(Y, \nu)$ , для любого  $z \in L_2(Y, \nu)$  получим

$$\begin{aligned} VAV^{-1}z &= V(Q_1^* + P_1^*)V^{-1}z \\ &= V \sum_{n=1}^{\infty} \langle Q_1^* V^{-1}z, \varphi_n^\perp \rangle \varphi_n^\perp + V \sum_{n=1}^{\infty} \langle V^{-1}z, A^* \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (z, VQ_1 \varphi_n^\perp) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (z, VA^* \varphi_n) e_n^\perp. \end{aligned}$$

Аналогично

$$VDV^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty} (z, VQ_2 \varphi_n^\perp) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (z, VD^* \varphi_n) e_n^\perp.$$

Положим

$$\begin{aligned} p_{n,1} &= VQ_1 \varphi_n^\perp = V(A^* - P_1) \varphi_n^\perp = VA^* \varphi_n^\perp, \\ p_{n,2} &= VQ_2 \varphi_n^\perp = V(D^* - P_2) \varphi_n^\perp = VD^* \varphi_n^\perp, \\ K_i(\eta, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{p_{n,i}(\xi)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда  $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$ , где  $K_1$  — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром  $K_1(\eta, \xi)$ , оператор  $\Gamma_1$  — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньше, чем  $\varepsilon$ , и ядром

$$\Gamma_1(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(\eta) \overline{VA^* \varphi_n(\xi)}.$$

Аналогично  $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$ , где  $K_2$  — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром  $K_2(\eta, \xi)$  и  $\Gamma_2$  — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньше, чем  $\varepsilon$ , и ядром

$$\Gamma_2(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(\eta) \overline{VD^* \varphi_n(\xi)}.$$

Записав систему (1) в виде  $\alpha x + Ax - \lambda Dx = f$  и сделав замену  $y = Vx$ , получим

$$\alpha V^{-1}y + AV^{-1}y - \lambda DV^{-1}y = f.$$

Применив к обеим частям оператор  $V$ , придем к эквивалентному уравнению

$$\alpha y + VAV^{-1}y - \lambda VDV^{-1}y = Vf.$$

Учитывая, что  $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$ ,  $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$ , получим уравнение (4).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если  $a(s) = \alpha I$  для почти всех  $s \in X$ , то  $A = 0$ . Следовательно,  $K_1 + \Gamma_1 = 0$ , и первое слагаемое в (4) будет отсутствовать.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В случае  $a(s) = \alpha I$  для почти всех  $s \in X$  утверждение теоремы 1 останется верным, если в ее формулировке заменить условие компактности по мере всех  $D_{ij}$  более широким условием: существует множество  $e \subset X$ ,  $0 < \mu e < \infty$ , такое, что все  $P_e D_{ij}$  компактны по мере; здесь  $P_e \varphi = \chi_e \varphi$ ,  $\varphi \in L_2(X, \mu)$ .

Действительно, подобно (7)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^* h_0 g_k\|_{m, \mu} = 0,$$

где  $\{g_k\}$  — равномерно ограниченная ортонормированная система функций из  $L_2(X, \mu)$  с носителями в  $e$ . Отсюда и из  $A = 0$  получим справедливость утверждения теоремы 1, применяя доказательство теоремы 1 к последовательности  $\{h_0 g_k\}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Отметим три важных варианта условий теоремы 1: 1)  $X = Y$ ,  $\mu = \nu$ ; 2)  $Y$  — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства,  $\nu$  — мера Лебега; 3)  $Y = (a, b)$ ,  $\nu$  — мера Лебега. В последнем случае в качестве  $e_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , удобно выбрать конечные попарно не пересекающиеся интервалы (длины 1, если  $(a, b)$  — бесконечный интервал).

**Следствие 1.** При  $\alpha = 0$  уравнение (4) умножением обеих его частей на не зависящую от системы (1) и унитарного оператора  $V$  функцию

$$\chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{e_n},$$

где  $e_0 = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$ , сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го рода с ядерным оператором.

**Следствие 2.** При  $\alpha \neq 0$  уравнение 2-го рода (4) сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_{\lambda}(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{p_{n, \lambda}(\xi)},$$

где  $\{p_{n, \lambda}\}$  — ограниченная последовательность в  $L_2(Y, \nu)$  и функции  $p_{n, \lambda}$  выражаются через  $p_{n, i}$  ( $i = 1, 2$ ) в явном виде.

Следствие 2 непосредственно вытекает из теоремы 6 в [4].

Линейный непрерывный оператор  $B : L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$  называется почти компактным, если существует разбиение множества  $X$  на попарно не пересекающиеся измеримые множества  $X_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) такое, что все операторы  $P_n T : L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$  компактны; здесь  $P_n \varphi = \chi_{X_n} \varphi$ ,  $\varphi \in L_2(X, \mu)$ .

Каждый почти компактный оператор компактен по мере. Важным примером почти компактного оператора является любой интегральный оператор в  $L_2(X, \mu)$  [5, с. 66; 6, 7].

**Следствие 3.** Утверждение теоремы 1 справедливо, если все операторы  $D_{ij}$  почти компактны.

**Следствие 4.** Утверждение теоремы 1 справедливо, если все операторы  $D_{ij}$  интегральные.

Приведем приложение теоремы 1. Рассмотрим систему линейных уравнений в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ :

$$\sum_{j=1}^m B_{ij} x_j = g_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (13)$$

где  $g_i \in H$  ( $i = 1, \dots, m$ ), элементы  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) решения ищутся в  $H$ . Пусть линейные непрерывные операторы  $B_{ij} : H \rightarrow H$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) удовлетворяют условию: существуют числа  $\lambda_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) и ортонормированная система  $\{u_n\} \subset H$  такие, что для всех  $i, j = 1, \dots, m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(B_{ij}^* - \overline{\lambda_{ij}} 1) u_n\|_H = 0. \quad (14)$$

Тогда по теореме 2 из [8] можно построить в явном виде унитарный оператор  $W : H \rightarrow L_2(Y, \nu)$  такой, что операторы  $K_{ij} = W(B_{ij} - \lambda_{ij} 1)W^{-1}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) являются карлемановскими интегральными операторами в  $L_2(Y, \nu)$ . Сделав в (13) замены  $y_j = Wx_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ),  $f_i = Wg_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), получим эквивалентную систему линейных интегральных уравнений 3-го рода:

$$\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^m K_{ij} y_j = f_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

к которой применимы теорема 1 и ее следствия.

Отметим, что условие типа (14) выполняется для любого линейного непрерывного оператора  $B : H \rightarrow H$ , так как предельный спектр сопряженного оператора  $B^*$  непуст. Таким образом, уравнение  $Bx = h \in H$  может быть сведено к эквивалентному линейному интегральному уравнению в  $L_2$  с карлемановским интегральным оператором.

Итак, удовлетворяющая условиям (А), (В) система 3-го рода (1), общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода и система (13) с условием (14) могут быть редуцированы либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го рода с компактным (и даже ядерным) оператором (к этому уравнению применима известная теорема Пикара), либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром (к такому уравнению применимы два приближенных метода решения, предложенные в [9; 10, с. 133–139]). Отметим еще, что определяемый равенствами (12) унитарный оператор  $V$ , приводящий систему (1) к эквивалентному интегральному уравнению (4), строится в явном виде и ядра  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  в (4) также имеют явный вид.

Теорема 1 является новой и в случае  $m = 1$ : общее линейное функциональное уравнение 3-го рода в  $L_2(X, \mu)$  с непрерывным и компактным по мере оператором эквивалентно линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода с карлемановским интегральным оператором в  $L_2(Y, \nu)$ . В связи с этим

результатом отметим очень интересную теорему И. М. Новицкого [11], в которой доказывается эквивалентность общего линейного интегрального уравнения 3-го рода в  $L_2(X, \mu)$  с биинтегральным оператором интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в  $L_2(-\infty, \infty)$  с бесконечно дифференцируемым ядром, исчезающим на бесконечности вместе со всеми производными и обладающим, кроме того, рядом других важных аналитических свойств.

В заключение заметим, что теорема 1 усиливает и дополняет результат автора об общих системах линейных интегральных уравнений 3-го рода [12; 10, с. 123].

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Функциональный анализ* / М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др.: Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
3. Коротков В. Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
4. Коротков В. Б. О линейных функциональных уравнениях 1-го, 2-го и 3-го родов в  $L_2$  // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1294–1303.
5. Коротков В. Б., Степанов В. Д. О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979. С. 64–68.
6. Коротков В. Б. О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в  $L_p$  // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
7. Schachermayer W., Weis L. Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.
8. Коротков В. Б. Приведение некоторых семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 97–101.
9. Коротков В. Б. Об одном методе решения интегральных уравнений с произвольными ядрами // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1. С. 119–122.
10. Коротков В. Б. Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
11. Новицкий И. М. A Kernel smoothing method for general integral equations // Дальневост. мат. журн. 2012. Т. 12, № 2. С. 255–261.
12. Коротков В. Б. О системах интегральных уравнений // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 121–133.

*Статья поступила 16 июня 2014 г.*

Коротков Виталий Борисович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090