

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ

А. Г. Липчинский

Аннотация. Рассматривается интерполяционный процесс для класса функций, имеющих конечное число особых точек, с помощью рациональных функций, полюсы которых совпадают с особыми точками интерполируемой функции. Узлы интерполяции образуют треугольную матрицу. Найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости на любом компакте, не содержащем особых точек функции, последовательности интерполяционных дробей к интерполируемой функции, а также другие условия сходимости. Обобщаются и улучшаются известные результаты по интерполированию функций с конечным числом особых точек рациональными дробями и целых функций многочленами.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.308

Ключевые слова: аналитическая функция, особая точка функции, интерполяционный процесс, рациональная дробь, равномерная сходимость, условия сходимости.

Пусть однозначная аналитическая функция $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме, быть может, точек a_s , $s = 1, 2, \dots, p+1$, $a_{p+1} = \infty$. Класс таких функций обозначим через $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$.

Порядок ρ_s и тип σ_s функции около особой точки a_s определяются формулами (см. [1, 2])

$$\rho_s = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_s(f, r)}{\ln r}, \quad \rho_s > 0, \quad \sigma_s = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_s(f, r)}{r^{\rho_s}}, \quad s = 1, 2, \dots, p+1,$$

где $M_k(f, r) = \max_{|z-a_k|=\frac{1}{r}} |f(z)|$, $k = 1, 2, \dots, p$, $M_{p+1}(f, r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Класс функций $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, у которых порядок около точки a_s либо меньше, либо равен ρ_s , а тип около этой точки меньше σ_s , обозначим через $[\rho_s, \sigma_s]$.

Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, обладает следующим свойством. При всех $n > N$ n -ю строку матрицы можно разбить на $p+2$ группы точек $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, и $\{z_{0,j}^{(n)}\}$ так, что узлы $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(s)}$, при неограниченном возрастании n имеют единственную точку сгущения a , $z_{p+1,j}^{(n)} \neq 0$, а множество точек $\{z_{0,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(0)}$, содержится в некотором компакте, не включающем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

Класс матриц, обладающих таким свойством, обозначим символом $\bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$.

Введем обозначения

$$u_{n,j}^{(k)} = |a_k - z_{k,j}^{(n)}|^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad u_{n,j}^{(p+1)} = |z_{p+1,j}^{(n)}|.$$

Не нарушая общности, далее будем полагать, что при всех $n > n_0$ выполнены неравенства $u_{n,j}^{(s)} \leq u_{n,j+1}^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, в противном случае узлы интерполяции в строках матрицы можно перенумеровать.

Порядок μ_s и тип A_s сходимости последовательности $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_n^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, около точек a_s определяются равенствами (см. [1, 2])

$$\frac{1}{\mu_s} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_{n,j}^{(s)}}{\ln j}, \quad A_s = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n,j}^{(s)}}{(j)^{1/\mu_s}}.$$

Функция плотности узлов интерполяции в окрестности точки a_k , обозначаемая через $n_k(R)$, равна количеству чисел из группы $\{z_{k,j}^{(n)}\}$, находящихся вне круга $|z - a_k| < \frac{1}{R}$, $k = 1, 2, \dots, p$, и $n_{p+1}(R)$ — число точек группы $\{z_{p+1,j}^{(n)}\}$, попавших в круг $|z| \leq R$ (см. [2]).

Будем интерполировать функцию $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ в узлах $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ с помощью рациональных функций вида

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{m_n}(z)}, \quad (1)$$

где $P_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, $Q_{m_n}(z) = \prod_{k=1}^p (z - a_k)^{m_n^{(k)}}$, $m_n^{(k)}$ — целые неотрицательные числа, $\sum_{k=1}^p m_n^{(k)} = m_n \leq n-1$.

Далее будем полагать $m_n^{(p+1)} = n-1-m_n$ и обозначать через $b_{\eta_n^{(s)}}^{(s)}$ коэффициент при $\eta_n^{(s)}$ -м члене главной части ряда Лорана в окрестности точки a_s функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, где $\eta_n^{(s)} = m_n^{(s)} + 1$, если $b_{m_n^{(s)}+1}^{(s)} \neq 0$, и $\eta_n^{(s)}$ — наименьший номер отличных от нуля членов $b_v^{(s)}$ при $v > m_n^{(s)} + 1$, если $b_{m_n^{(s)}+1}^{(s)} = 0$.

Известно (см. [2, теорема 3]), что если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1,$$

то для равномерной сходимости последовательности (1), построенной для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, для функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , необходимо выполнение неравенств

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[|b_{\eta_n^{(s)}}^{(s)}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} u_{n,j}^{(s)} \right]^{1/n} \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, p+1, \quad (2)$$

и достаточно, чтобы они были строгими.

Прологарифмировав обе части неравенства (2) и применив неравенство Коши для коэффициентов ряда и формулу (см. [3, отд. II, гл. 4, § 1])

$$\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} \ln u_{n,j}^{(s)} = n_s(R_n^{(s)}) \cdot \ln R_n^{(s)} - N_s(R_n^{(s)}),$$

где $R_n^{(s)} = u_{n, \lambda_n^{(s)}}^{(s)}$, $n_s(R_n^{(s)})$ — функции плотности узлов интерполяции около точек a_s , $N_s(R_n^{(s)}) = \int_0^{R_n^{(s)}} \frac{n_s(t)}{t} dt$ — функции Неванлинна (см. [4, гл. III, § 1]), получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln M_s(f, r_n^{(s)}) - \eta_n^{(s)} \ln r_n^{(s)} + n_s(R_n^{(s)}) \cdot \ln R_n^{(s)} - N_s(R_n^{(s)})] \leq 0, \\ s = 1, 2, \dots, p+1,$$

где $r_n^{(s)} > 1$ такое, что $f(z)$ аналитическая в кольце $0 < |z - a_k| \leq \frac{1}{r_n^{(k)}}$, $k = 1, 2, \dots, p$, и аналитическая вне круга $|z| < r_n^{(p+1)}$, если $s = p+1$, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки.

Полагая

$$r_n^{(s)} = \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}, \quad 0 < \theta_n^{(s)} < 1,$$

последние предельные соотношения перепишем в виде

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln M_s \left(f, \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \right) - \ln \frac{1}{\theta_n^{(s)}} n_s(R_n^{(s)}) - N_s(R_n^{(s)}) + (\lambda_n^{(s)} - \eta_n^{(s)}) \ln \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \right] \leq 0. \quad (3)$$

Если выполнены условия

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \theta_n^{(s)} > 0 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1) \ln R_n^{(s)} \leq 0,$$

то имеют место неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - \eta_n^{(s)}}{n} \ln \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \leq 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1.$$

В самом деле, имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - \eta_n^{(s)}}{n} \ln \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \\ \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1}{n} (\ln R_n^{(s)} - \ln \theta_n^{(s)}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1}{n} \ln R_n^{(s)} \leq 0.$$

При таких условиях заключаем, что если выполнены неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln M_s \left(f, \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \right) - \ln \frac{1}{\theta_n^{(s)}} n_s(R_n^{(s)}) - N_s(R_n^{(s)}) \right] < 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1, \quad (4)$$

то неравенства (3) также выполняются. Отсюда следует, что при выполненных соотношениях (4) последовательность (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

В [5] (см. [5, теорема 2]) показано, что при интерполировании целых функций с помощью многочленов числа θ берутся из $(0, \frac{1}{2})$ и их, вообще говоря, нельзя брать из интервала $(\frac{1}{2}, 1)$. Однако в целях отыскания наиболее широкого класса равномерной сходимости интерполяционного процесса при дополнительных условиях, наложенных на узлы интерполяции, числа θ целесообразно выбирать из интервала $(0, 1)$.

Теорема 1. Пусть $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — матрица узлов интерполяции, выполнены условия

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = \chi_s > 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1) \ln R_n^{(s)} \leq 0, \\ s = 1, 2, \dots, p+1, \quad (5)$$

и около одной или нескольких точек a_τ , $1 \leq \tau \leq p+1$,

$$u_{n,j}^{(\tau)} = u_{n,\lambda_n^{(\tau)}}^{(\tau)} = A_\tau (\lambda_n^{(\tau)})^{1/\rho_\tau} = R_n^{(\tau)}, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\tau)}.$$

Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, p+1)$ такова, что около точек a_s , $s = 1, 2, \dots, p+1$, $s \neq \tau$, имеют место достаточные условия (2) или (4), а в окрестностях точек a_τ при всех $n > n_0$ она удовлетворяет неравенствам

$$\ln M_\tau \left(f, \frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}} \right) \leq \left(\frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}} \right)^{\rho_\tau} \sigma_\tau(\theta^{(\tau)}), \quad (6)$$

где

$$\sigma_\tau(\theta^{(\tau)}) = \left(\frac{\theta^{(\tau)}}{A_\tau} \right)^{\rho_\tau} \cdot \ln \frac{1}{\theta^{(\tau)}} - \varepsilon, \quad \theta^{(\tau)} = \exp \left\{ -\frac{1}{\rho_\tau} \right\},$$

$\varepsilon > 0$ как угодно мало, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство. По условию теоремы достаточные условия равномерной сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса около точек a_s , $s \neq \tau$, выполнены. Покажем, что неравенства (4) около точек a_τ также выполняются. Далее в доказательстве теоремы в целях упрощения записи индекс τ писать не будем.

При заданных узлах интерполяции $N(R_n) = 0$. В силу равенства $n(R_n) = (R_n A^{-1})^\rho$ при выполненных условиях теоремы найдем, что выражение под знаком предела в соотношении (4) не превосходит $\frac{1}{n} \left[-\left(\frac{A}{\theta} \right)^\rho n(R_n) \varepsilon \right]$. Поскольку $n(R_n) = \lambda_n$, левая часть неравенства (4) не превосходит

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} \left[-\left(\frac{A}{\theta} \right)^\rho \varepsilon \right] = -\chi \left(\frac{A}{\theta} \right)^\rho \varepsilon = -\chi A^\rho e \varepsilon.$$

Так как правая часть последнего равенства при любом $\varepsilon > 0$ отрицательна, неравенства (4) имеют место. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, такова, что имеют место равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad u_{n,j} = u_{n,\lambda_n} = A(\lambda_n)^{1/\rho} = R_n.$$

Если целая функция $f(z)$ при всех $n > n_0$ удовлетворяет неравенству

$$\ln M \left(f, \frac{R_n}{\theta} \right) \leq \left(\frac{R_n}{\theta} \right)^\rho \sigma(\theta),$$

где

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{\theta}{A}\right)^\rho \ln \frac{1}{\theta} - \varepsilon, \quad \theta = \exp\left\{-\frac{1}{\rho}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ как угодно мало, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_n^{(p+1)} \leq m_n^{(p+1)} + 1 = n,$$

условия (5) выполняются.

Справедливость следствия очевидна и вытекает из теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Числа $\theta^{(\tau)}$ в теореме 1 выбраны таким образом, что $\sigma_\tau(\theta^{(\tau)})$ на интервале $(0,1)$ принимают наибольшее значение. Следовательно, какие бы точки $\bar{\theta}^{(\tau)}$ из интервала $(0,1)$, отличные от точек $\theta^{(\tau)}$, мы ни взяли, получим классы равномерной сходимости около точек a_τ уже, чем в теореме 1.

Теорему 1 улучшить нельзя в том смысле, что при заданных узлах интерполяции классы равномерной сходимости функций около точек a_τ , определяемые неравенствами (6), расширить нельзя.

В неулучшаемости теоремы 1 можно убедиться также с помощью теоремы 5 из [2].

В самом деле, поскольку

$$\sigma_\tau\left(\exp\left\{-\frac{1}{\rho_\tau}\right\}\right) = (A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1},$$

неравенство (6) можно записать в виде

$$\ln M_\tau\left(f, \frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}}\right) \leq \left(\frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}}\right)^{\rho_\tau} [(A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1} - \varepsilon].$$

Отсюда следует, что около каждой особой точки a_τ функция $f(z)$ имеет порядок ρ_τ , а тип не превосходит $(A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1} - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть как угодно малым, заключаем, что $f(z) \in [\rho_\tau, (A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1}]$ около точек a_τ . На основании теоремы 5 из [2] можем утверждать, что теорему 1 улучшить нельзя.

Заметим, что при $\rho_\tau \geq \frac{1}{\ln 2}$ точки $\theta^{(\tau)}$ принадлежат промежутку $[\frac{1}{2}, 1)$.

Теорема 2. Пусть $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — матрица узлов интерполяции, выполнены условия (5) и около одной или нескольких точек a_τ , $1 \leq \tau \leq p+1$,

$$u_{n,j}^{(\tau)} = A_\tau(j)^{1/\rho_\tau}, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\tau)}.$$

Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ такова, что около точек a_s , $s = 1, 2, \dots, p+1$, $s \neq \tau$, имеют место достаточные условия (2) или (4), а в окрестностях точек a_τ при всех $n > n_0$ она удовлетворяет неравенствам

$$\ln M_\tau\left(f, \frac{R_n^{(\tau)}}{\theta_n^{(\tau)}}\right) \leq \left(\frac{R_n^{(\tau)}}{\theta_n^{(\tau)}}\right)^{\rho_\tau} \sigma_\tau(\theta_n^{(\tau)}), \quad (7)$$

где $R_n^{(\tau)} = A_\tau (\lambda_n^{(\tau)})^{1/\rho_\tau}$,

$$\sigma_\tau(\theta_n^{(\tau)}) = \left(\frac{\theta_n^{(\tau)}}{A_\tau}\right)^{\rho_\tau} \ln \frac{1}{\theta_n^{(\tau)}} + \left(\frac{\theta_n^{(\tau)}}{R_n^{(\tau)}}\right)^{\rho_\tau} N_\tau(R_n^{(\tau)}) - \varepsilon,$$

$$\theta_n^{(\tau)} = \exp \left\{ [A_n(R_n^{(\tau)})^{-1}]^{\rho_\tau} N_\tau(R_n^{(\tau)}) - \frac{1}{\rho_\tau} \right\},$$

$\varepsilon > 0$ как угодно мало, $N_\tau(R_n^{(\tau)})$ — функции Неванлинна, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве индекс τ писать не будем. Покажем сначала, что $\theta_n \in (0, 1)$. Применяя формулу (см. [4, гл. III, § 1])

$$N(r) = \sum_{\rho_n \leq r} \ln \frac{r}{\rho_n}$$

и полагая $r = R_n$, $\rho_n = u_{n,j}$, при заданных узлах интерполяции будем иметь

$$N(R_n) = \lambda_n \ln R_n - \sum_{j=1}^{\lambda_n} \ln u_{n,j} = \lambda_n \ln R_n - \lambda_n \ln A - \frac{1}{\rho} \ln(\lambda_n!).$$

С помощью формулы Стирлинга (см. [4, гл. II, § 1]), учитывая, что $R_n = A(\lambda_n)^{1/\rho}$, получим

$$\begin{aligned} N(R_n) &= \lambda_n \ln A + \frac{1}{\rho} \lambda_n \ln \lambda_n - \lambda_n \ln A \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left(\lambda_n \ln \lambda_n - \lambda_n + \frac{1}{2} \ln \lambda_n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1) \right) = \frac{1}{\rho} \lambda_n - \frac{1}{2\rho} \ln \lambda_n - c_n, \end{aligned}$$

где $c_n = \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1)$. Поскольку $(\frac{A}{R_n})^\rho = \lambda_n^{-1}$, окончательно найдем

$$\begin{aligned} \theta_n &= \exp \left\{ \left(\frac{A}{R_n} \right)^\rho N(R_n) - \frac{1}{\rho} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lambda_n^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \lambda_n - \frac{1}{2\rho} \ln \lambda_n - c_n \right) - \frac{1}{\rho} \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2\rho\lambda_n} \ln \lambda_n - \frac{c_n}{\lambda_n} \right\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\theta_n \in (0, 1)$, причем $\theta_n \rightarrow 1$, когда $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Покажем далее, что при выполненных неравенствах (7) условия (4) имеют место. В самом деле, если максимум модуля функции в окрестностях рассматриваемых особых точек подчинен условиям (7), то выражение под знаком предела в соотношении (4) не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{R_n}{\theta_n} \right)^\rho \left(\ln \frac{1}{\theta_n} \cdot \left(\frac{\theta_n}{A} \right)^\rho + \left(\frac{\theta_n}{R_n} \right)^\rho N(R_n) - \varepsilon \right) - \ln \frac{1}{\theta_n} n(R_n) - N(R_n) \right] \\ = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{R_n}{A} \right)^\rho \ln \frac{1}{\theta_n} - \varepsilon \left(\frac{R_n}{\theta_n} \right)^\rho - n(R_n) \ln \frac{1}{\theta_n} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $n(R_n) = (\frac{R_n}{A})^\rho$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln M \left(f, \frac{R_n}{\theta_n} \right) - \ln \frac{1}{\theta_n} n(R_n) - N(R_n) \right] \\ \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[-\varepsilon \left(\frac{R_n}{\theta_n} \right)^\rho \right] = -\varepsilon \chi A^\rho < 0. \end{aligned}$$

Отсюда на основании условий теоремы можем утверждать, что достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1) выполняются около всех особых точек функции. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, такова, что выполняются равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad u_{n,j} = A(j)^{1/\rho}, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n.$$

Если целая функция $f(z)$ при всех $n > n_0$ удовлетворяет неравенству

$$\ln M\left(f, \frac{R_n}{\theta_n}\right) \leq \left(\frac{R_n}{\theta_n}\right)^\rho \sigma(\theta_n),$$

где $R_n = A(\lambda_n)^{1/\rho}$,

$$\sigma(\theta_n) = \left(\frac{\theta_n}{A}\right)^\rho \ln \frac{1}{\theta_n} + \left(\frac{\theta_n}{R_n}\right)^\rho N(R_n) - \varepsilon, \quad \theta_n = \exp\left\{\left(\frac{A}{R_n}\right)^\rho N(R_n) - \frac{1}{\rho}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ как угодно мало, $N(R_n)$ — функции Неванлинна, то последовательность интерполяционных многочленов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Замечание 1 имеет силу для теоремы 2 и следствий.

В том, что теорема 2 неумлучшаема, можно убедиться также с помощью теоремы 4 из [2]. Индекс τ в следующем равенстве писать не будем.

Заметим, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\theta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\theta_n}{A}\right)^\rho \ln \frac{1}{\theta_n} + \left(\frac{\theta_n}{R_n}\right)^\rho N(R_n) - \varepsilon \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [R_n^{-\rho} N(R_n) - \varepsilon] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(A^\rho \lambda_n)^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \lambda_n - \frac{1}{2\rho} \ln \lambda_n - c_n \right) \right] - \varepsilon = (A^\rho \rho)^{-1} - \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу того, что ε как угодно мало, из неравенства (7) и последнего равенства следует принадлежность функции $f(z)$ около точек a_τ классу $[\rho, (A^\rho \rho)^{-1}]$, значит, с помощью теоремы 4 из [2] можно утверждать, что теорему 2 улучшить нельзя.

Поскольку следствия 1 и 2 являются следствиями неумлучшаемых теорем 1 и 2 соответственно, они также неумлучшаемы.

Так как $\varepsilon > 0$ в равенстве (8) как угодно мало, из следствия 2 и равенства (8) заключаем, что если целая функция $f(z)$ принадлежит $[\rho, (A^\rho \rho)^{-1}]$, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$ и $u_{n,j} = A(j)^{1/\rho}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Следствие 2 улучшает теорему VII из [4] (см. [4, гл. II, § 3, с. 182]). В самом деле, пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $\lambda_n^{(0)} = 0$, такова, что $z_j^{(n)} = j^2$. Тогда $|z_{j-1}^{(n)}| < |z_j^{(n)}| < \dots < |z_n^{(n)}| < \lambda \cdot n^2$, где $\lambda = 1 + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, откуда следует, что для таких узлов неравенство (157) из [4] выполняется при любом $\varepsilon_1 > 0$. На основании следствия 2 и равенства (8) можем утверждать, что если целая функция $f(z)$ принадлежит классу $[\frac{1}{2}, 2)$, то интерполяционные полиномы, построенные для функции $f(z)$ по узлам $|z_j^{(n)}| = j^2$, равномерно

сходятся к $f(z)$ на любом компакте. Из теоремы VII в [4] следует, что при тех же узлах классом равномерной сходимости интерполяционного процесса является класс целых функций $[\frac{1}{2}, \sigma + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ может быть как угодно малым, σ удовлетворяет неравенству

$$\sigma < \frac{2}{(2\lambda)^{1/2}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{2-t} dt = \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \ln(\sqrt{2}+1) \approx \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \ln(2,41) \approx 2 \cdot \frac{0,8796}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}.$$

Поскольку при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\sigma + \varepsilon < 2 \cdot \frac{0,8796}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} + \varepsilon < 2 - \varepsilon,$$

приходим к выводу, что класс равномерной сходимости функций при узлах интерполяции $|z_j^{(n)}| = j^2$, определяемый следствием 2, шире, чем при тех же узлах в теореме VII из [4].

Отметим также, что если $z_j^{(n)} = j$, то класс равномерной сходимости интерполяционного процесса, определяемый теоремой VII из [4], есть класс целых функций $[1, \frac{\ln 2}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon)$, где ε как угодно мало, а класс равномерной сходимости, определяемой следствием 2, составляют целые функции класса $[1, 1)$. В силу того, что при любом положительном ε_1 и ε , удовлетворяющем неравенству $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \ln 2$, имеет место соотношение $\frac{\ln 2}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon < \ln 2$, можем утверждать, что класс равномерной сходимости интерполяционного процесса, указанный в теореме VII из [4] при узлах $z_j^{(n)} = j$, не шире класса целых функций $[1, \ln 2)$. Значит, класс равномерной сходимости при узлах $z_j^{(n)} = j$ в следствии 2 шире, чем в теореме VII из [4]. Отсюда заключаем также, что следствие 2 улучшает теорему Фабера (см. [6, гл. II, § 5, теорема 2.5.1]) в том же смысле, что и теорему VII из [4].

Кроме того, следствие 2 обобщает теорему VII из [4] на случай треугольной матрицы узлов интерполяции при более слабых ограничениях, в частности, узлы интерполяции могут иметь предельные точки не только в бесконечности, но и в конечной части плоскости.

Следуя М. К. Гончаровой [7], введем обозначения для повторных показательных функций

$$e_0(x) = x, \quad e_1(x) = e^x, \quad e_l(x) = e_{l-1}(e(x)) = e(e_{l-1}(x)), \quad l = 1, 2, \dots,$$

и повторных логарифмов

$$\ln_0(x), \quad \ln_1 x = \ln x, \quad \ln_l(x) = \ln_{l-1}(\ln x), \quad (E_l < x < \infty), \quad E_l = e_l(0).$$

Будем говорить, что функция $f(z)$ около особой точки a_s , $s = 1, 2, \dots, p+1$, степени l_s , если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln_{l_s} M_s(f, r)}{\ln r} = \infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln_{l+1} M_s(f, r)}{\ln r} = \rho_s < \infty,$$

где ρ_s — порядок функции $f(z)$ степени l_s около особой точки a_s .

Если $\rho_s > 0$, то тип функции $f(z)$ степени l_s порядка ρ_s около точки a_s определим равенством

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln_{l_s} M_s(f, r)}{r^{\rho_s}} = \sigma_s.$$

Класс функций $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, у которых около особой точки a_s степень меньше l_s , либо равна l_s , но порядок меньше ρ_s , либо порядок равен ρ_s , а тип около этой точки меньше σ_s , обозначим через $[l_s, \rho_s, \sigma_s)$, $\sigma_s > 0$, а если при тех же степени и порядке около особой точки a_s тип не превосходит σ_s , то — через $[l_s, \rho_s, \sigma_s]$.

Теорема 3. Пусть $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — матрица узлов интерполяции, выполнены условия (5) и около одной или нескольких точек a_τ , $1 \leq \tau \leq p+1$,

$$u_{n,j}^\tau = u_{n,\lambda_n^{(\tau)}}^{(\tau)} = A_\tau \ln_{l_\tau}^{1/\rho_\tau} \lambda_n^{(\tau)} = R_n^{(\tau)}, \quad l_\tau \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\tau)}.$$

Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ такова, что в окрестностях точек a_s , $s = 1, 2, \dots, p+1$, $s \neq \tau$, выполнены достаточные условия (2) или (4), а около точек a_τ она принадлежит классам $[l_\tau + 1, \rho_\tau, A_\tau^{-\rho_\tau}]$, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство. По условию теоремы достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1) около точек a_s , $s \neq \tau$, выполнены. Покажем, что при выполненных условиях теоремы около точек a_τ неравенства (4) также имеют место.

Пусть функция $f(z)$ около точки a_τ принадлежит классу $[l_\tau + 1, \rho_\tau, \sigma_\tau^{\rho_\tau}]$, тогда для максимума модуля этой функции около точки a_τ выполняется неравенство

$$M_\tau(f, r) \leq e_{l_\tau+1}\{(r\sigma'_\tau)^{\rho_\tau}\}, \quad \sigma'_\tau = \sigma_\tau + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В целях упрощения записи далее в доказательстве индекс τ писать не будем.

Полагая $r = \frac{R_n}{\theta}$, $0 < \theta < 1$, найдем $\ln M(f, \frac{R_n}{\theta}) \leq e_l\{(\frac{R_n\sigma'}{\theta})^\rho\}$. Учитывая последнее соотношение и равенства

$$n(R_n) = \lambda_n = e_l\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho\right\}, \quad N(R_n) = 0,$$

получим, что выражение в квадратных скобках (4) не превосходит

$$\begin{aligned} & e_l\left\{\left(\frac{R_n\sigma'}{\theta}\right)^\rho\right\} - e_l\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho\right\} \cdot \ln \frac{1}{\theta} = e_l\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho \cdot \left(\frac{A\sigma'}{\theta}\right)^\rho\right\} - e_l\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho\right\} \cdot \ln \frac{1}{\theta} \\ & = e_l\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho\right\} \left[\exp\left\{e_{l-1}\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho \cdot \left(\frac{A\sigma'}{\theta}\right)^\rho\right\} - e_{l-1}\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho\right\}\right] - \ln \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Поскольку при любых x_1 и x_2 таких, что $0 < x_1 < x_2$, имеет место неравенство

$$x_1 - x_2 > e_1(x_1) - e_1(x_2) > \dots > e_{l-1}(x_1) - e_{l-1}(x_2), \quad (9)$$

при $\frac{A\sigma'}{\theta} < 1$ можно утверждать, что правая часть последнего равенства не превосходит

$$\lambda_n \left[\exp\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho \left[\left(\frac{A\sigma'}{\theta}\right)^\rho - 1\right]\right\} - \ln \frac{1}{\theta} \right].$$

Следовательно, если $\frac{A\sigma'}{\theta} < 1$, то в силу того, что $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln M\left(f, \frac{R_n}{\theta}\right) - n(R_n) \ln \frac{1}{\theta} - N(R_n) \right] \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} \left[\exp\left\{\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho - \left[\left(\frac{A\sigma'}{\theta}\right)^\rho - 1\right]\right\} - \ln \frac{1}{\theta} \right] = -\chi \ln \frac{1}{\theta} < 0, \end{aligned}$$

т. е. условие равномерной сходимости (4) около рассматриваемой особой точки функции $f(z)$ выполнено.

Из неравенства $\frac{A\sigma'}{\theta} < 1$ следует неравенство $\sigma^\rho < \left(\frac{\theta - A\varepsilon}{A}\right)^\rho$ для типа σ^ρ интерполируемой функции $f(z)$. Поскольку правая часть последнего неравенства возрастает с возрастанием θ , чем больше число $\theta \in (0, 1)$, тем шире класс равномерной сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса. Заметим, что $\sigma^\rho \rightarrow A^{-\rho}$ при $\theta \rightarrow 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, следовательно, при достаточно больших значениях $\theta < 1$ и малом $\varepsilon > 0$ разность $\left(\frac{1}{A}\right)^\rho - (\sigma)^\rho$ может быть сделана как угодно малой. Отсюда следует, что функция $f(z)$ около рассматриваемой особой точки принадлежит классу $[l + 1, \rho, A^{-\rho})$.

Итак, если функция $f(z)$ около рассматриваемой особой точки принадлежит классу $[l + 1, \rho, A^{-\rho})$, то условия равномерной сходимости (4) около этой точки выполняются. Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, такова, что выполняются равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad u_{n,j} = A \ln^{1/\rho} \lambda_n = R_n, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n.$$

Если целая функция $f(z)$ принадлежит классу $[l + 1, \rho, A^{-\rho})$, то последовательность интерполяционных многочленов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия очевидна и вытекает из теоремы 3.

Теорема 4. Пусть даны две матрицы узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$ и $\{z_j'^{(n)}\}$, которые принадлежат классу $\bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, являются тождественными, за исключением одного или нескольких $s = \tau$, $1 \leq \tau \leq p + 1$, и для которых выполнены условия (5). Пусть последовательность (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$. Если для всех τ , $1 \leq \tau \leq p + 1$, выполнены неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(\tau)}} u_{n,j}'^{(\tau)} \right]^{1/n} \cdot \left[\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(\tau)}} u_{n,j}^{(\tau)} \right]^{-1/n} < 1, \quad (10)$$

где $u_{n,j}'^{(\tau)} = |a_\tau - z_{\tau,j}'^{(n)}|^{-1}$, $1 \leq \tau \leq p$, и $u_{n,j}'^{(\tau)} = |z_{\tau,j}'^{(n)}|$, $\tau = p + 1$, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j'^{(n)}\}$, также равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , для всех a_s , $s = 1, 2, \dots, p + 1$, выполнены условия (2). Покажем теперь, что достаточные условия (2) выполняются для всех s и в случае, когда последовательность (1) построена для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j'^{(n)}\}$.

Поскольку матрицы $\{z_j^{(n)}\}$ и $\{z_j'^{(n)}\}$ тождественны для всех $s \neq \tau$, в случае последовательности (1), построенной по матрице узлов $\{z_j'^{(n)}\}$ для функции $f(z)$, условия (2) также выполняются для всех $s \neq \tau$.

Пусть теперь $s = \tau$. Далее в доказательстве теоремы индекс τ писать не будем. На основании неравенства (10) можем записать

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[|b_{\eta_n}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda'_n} u'_{n,j} \right]^{1/n} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[|b_{\eta_n}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\lambda'_n} u'_{n,j} : \prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j} \right) \right]^{1/n} \\ &< \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[|b_{\eta_n}| \prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j} \right]^{1/n} \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1), построенной для функции $f(z)$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, в окрестности рассматриваемой точки выполняются. Теорема доказана.

Следствие 4. Если последовательность интерполяционных полиномов, построенная для целой функции $f(z)$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, у которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, то, какова бы ни была матрица узлов $\{z_j^{(n)}\}$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{j=1}^{\lambda'_n} u'_{n,j} \right]^{1/n} \cdot \left[\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j} \right]^{-1/n} < 1,$$

последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, также равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 4.

Если функция плотности узлов интерполяции $n_s(r)$ ступени $l_s = 0$, то плотность последовательности узлов v_s и нижний тип A_s определяются так (см. [4, гл. II, § 1, с. 131]):

$$v_s = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n_s(r)}{\ln r}, \quad v_s = 0, \quad A_s = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_s(r)}{r^{v_s}}.$$

Для функций плотности узлов интерполяции $n_s(r)$ ступени $l_s \geq 1$ плотность v_s и нижний тип A_s последовательности определим формулами

$$v_s = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln_{l_s+1} n_s(r)}{\ln r}, \quad v_s = 0, \quad A_s = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln_{l_s} n_s(r)}{r^{v_s}}.$$

Класс последовательностей $\{z_{s,j}^{(n)}\}$ узлов интерполяции, у которых ступень около точки a_s либо больше l_s , либо равна l_s , а плотность больше v_s , либо плотность равна v_s , но нижний тип не меньше A_s , обозначим через $[l_s, v_s, A_s]$.

Теорема 5. Пусть $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — матрица узлов интерполяции, выполняны условия (5) и $\{z_{\tau,j}^{(n)}\} \in [l_\tau, v_\tau, A_\tau]$ около одной или нескольких точек a_τ , $1 \leq \tau \leq p+1$. Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ такова, что в окрестностях точек a_s , $s \neq \tau$, выполнены достаточные условия равномерной сходимости (2) или (4), а около точек a_τ она принадлежит классам $[1, v_\tau, A_\tau(e v_\tau)^{-1}]$ при

$l_\tau = 0$ или классам $[l_\tau + 1, v_\tau, A_\tau)$ при $l_\tau \geq 1$, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1) около точек a_s $s \neq \tau$, выполнены. Покажем, что условия (4) около точек a_τ также выполняются.

Действительно, пусть $s = \tau$. В целях упрощения записи индекс τ в доказательстве теоремы писать не будем. Возьмем $r = u_{n, \lambda_n}$. На основании определения класса $[l, v, A]$ последовательности узлов интерполяции в окрестности рассматриваемой точки для любого $\varepsilon > 0$ существует N_1 такое, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство

$$n(u_{n, \lambda_n}) = \lambda_n \geq e_l \{(A - \varepsilon)(u_{n, \lambda_n})^v\}. \quad (11)$$

Пусть $l = 0$. В силу принадлежности функции $f(z)$ классу $[1, v, \frac{A}{ev})$ на основании определения этого класса можем утверждать, что $f(z) \in [1, v, \frac{A'}{ev})$ при любом положительном $A' < A$. Следовательно, для того же ε при всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\ln M\left(f, \frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right) \leq \left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v \frac{A' + \varepsilon}{ev}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поскольку $N(u_{n, \lambda_n}) \geq 0$, при $\theta = e^{-(1/v)}$ с помощью (11) и последнего неравенства получим, что в окрестности рассматриваемой особой точки a выражение под знаком предела в условии (4) не превосходит

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v \frac{A' + \varepsilon}{ev} - \lambda_n \ln \frac{1}{\theta} \right] = \frac{\lambda_n}{n} \left[\left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v \frac{A' + \varepsilon}{ev \lambda_n} - \ln \frac{1}{\theta} \right] \leq \frac{\lambda_n}{nv} \left[\frac{A' + \varepsilon}{A - \varepsilon} - 1 \right]. \quad (12)$$

Выберем $\varepsilon < \frac{A - A'}{2}$, тогда $\frac{A' + \varepsilon}{A - \varepsilon} < 1$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \chi > 0$, предел правой части соотношения (12) при $n \rightarrow \infty$ отрицателен. Отсюда следует, что условие равномерной сходимости (4) около рассматриваемой особой точки a выполняется.

Пусть $l \geq 1$. Поскольку $f(z) \in [l + 1, v, A)$, по определению этого класса можно утверждать, что $f(z) \in [l + 1, v, A']$, где $0 < A' < A$. Следовательно, для того же $\varepsilon > 0$, что в соотношении (11), существует N_2 такое, что для всех $n > N_2$ в окрестности точки a имеет место неравенство

$$M\left(f, \frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right) \leq e_{l+1} \left\{ (A' + \varepsilon) \left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v \right\}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Используя последнее неравенство, неравенства (11) и $N(u_{n, \lambda_n}) \geq 0$, найдем, что выражение под знаком предела в (4) для всех $n > \max\{N_1, N_2\}$ не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[e_l \left\{ \left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v (A' + \varepsilon) \right\} - \lambda_n \ln \frac{1}{\theta} \right] &= \frac{\lambda_n}{n} \left[e_l \left\{ \left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v (A' + \varepsilon) \right\} : \lambda_n - \ln \frac{1}{\theta} \right] \\ &= \frac{\lambda_n}{n} \left[\exp \left\{ e_{l-1} \left\{ \left(\frac{u_{n, \lambda_n}}{\theta}\right)^v (A' + \varepsilon) \right\} - e_{l-1} \{(u_{n, \lambda_n})^v (A - \varepsilon)\} \right\} - \ln \frac{1}{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (9), заключаем, что правая часть последнего соотношения при $\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)} < 1$ не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n}{n} \left[\exp \left\{ \left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta} \right)^v (A' + \varepsilon) - (u_{n,\lambda_n})^v (A - \varepsilon) \right\} - \ln \frac{1}{\theta} \right] \\ = \frac{\lambda_n}{n} \left[\exp \left\{ (u_{n,\lambda_n})^v (A - \varepsilon) \left[\frac{A' + \varepsilon}{\theta^v(A - \varepsilon)} - 1 \right] \right\} - \ln \frac{1}{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)} < 1$, то в силу неограниченного возрастания u_{n,λ_n} при $n \rightarrow \infty$ предел правой части последнего равенства равен $-\chi \ln \frac{1}{\theta}$, откуда следует, что предел левой части неравенства (4) не превосходит $-\chi \ln \frac{1}{\theta}$.

Неравенство $\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)} < 1$ будет выполняться, если, например, положить $\varepsilon \leq \frac{A-A'}{4}$, а $\theta < 1$ взять удовлетворяющим неравенству $\frac{3A'+A}{3A+A'} < \theta^v$. Итак, каково бы ни было положительное число $A' < A$, число θ можно выбрать таким, чтобы в окрестности рассматриваемой особой точки неравенство (4) выполнялось. Поскольку разность $A - A'$ может быть как угодно малой, по определению класса $[l+1, v, A)$ можем утверждать, что если $f(z) \in [l+1, v, A)$, то в окрестности точки a достаточное условие равномерной сходимости (4) выполняется. В первой части доказательства показано, что это утверждение верно при $l = 0$.

Таким образом, достаточные условия (4) равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$ выполняются в окрестностях всех особых точек при любом неотрицательном целом l . Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a, a = \infty$, такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$ и $\{z_j^{(n)}\} \in [l, v, A]$. Если $f(z) \in [1, v, \frac{A}{ev})$ при $l = 0$ или $f(z) \in [l+1, v, A)$ при $l \geq 1$, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, также равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 5.

Заметим, что функции плотности $n_\tau(R_n^{(\tau)})$ последовательностей узлов интерполяции из теоремы 1:

$$u_{n,j}^{(\tau)} = u_{n,\lambda_n^{(\tau)}}^{(\tau)} = A_\tau (\lambda_n^{(\tau)})^{1/\rho_\tau} = R_n^{(\tau)}, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\tau)}, \quad (13)$$

около точек a_τ равны $(R_n^{(\tau)} A_\tau^{-1})^{\rho_\tau}$.

Плотности последовательностей узлов интерполяции около точек a_τ определяются равенствами

$$v_\tau = \lim_{R_n^{(\tau)} \rightarrow \infty} \frac{\ln n_\tau(R_n^{(\tau)})}{\ln R_n^{(\tau)}} = \lim_{R_n^{(\tau)} \rightarrow \infty} \frac{\rho_\tau \ln R_n^{(\tau)} - \rho_\tau \ln A_\tau}{\ln R_n^{(\tau)}} = \rho_\tau.$$

Отсюда следует, что функции плотности $n_\tau(R_n^{(\tau)})$ ступени 0. Нижние типы функций плотности последовательностей (13) равны A_τ^{-1} , значит, $n_\tau(R_n^{(\tau)}) \in [0, \rho_\tau, A_\tau^{-1}]$ около точки a_τ .

Из теоремы 1 вытекает, что интерполяционный процесс равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек $a_s, s = 1, 2, \dots, p$, если

функция $f(z)$ около точек a_τ принадлежит классам $[\rho_\tau, (A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1}]$. По теореме 5 для равномерной сходимости интерполяционного процесса, построенного по узлам (13) около точек a_τ , достаточно, чтобы $f(z) \in [1, \rho_\tau, (A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1}]$ около точек a_τ .

Поскольку определения порядка ρ_s и типа σ_s , данные в начале статьи, совпадают с определениями порядка и типа функции первой степени, классы равномерной сходимости в теоремах 1 и 5 при указанных узлах интерполяции тождественны. В силу неулучшаемости теоремы 1 теорему 5 при $l = 0$ без дополнительных условий на узлы интерполяции улучшить нельзя.

Так как при любых положительных A_1 и A_2 класс целых функций $[\rho_1, A_1)$ содержится в классе $[\rho_2, A_2)$, где $\rho_1 < \rho_2$, из следствия 5 вытекает вторая часть теоремы IV из [4] (см. [4, гл. II, § 3]).

В самом деле, если порядок целой функции $f(z)$ степени 1 $\rho < v$, то $[\rho, A_1) \subset [1, v, \frac{A}{ev})$, каково бы ни было число $A_1 > 0$, значит, последовательность интерполяционных полиномов, построенная по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in [0, v, A]$ для функции $f(z)$, равномерно сходится к $f(z)$ в любом конечном круге.

Таким образом, следствие 5 обобщает вторую часть теоремы IV из [4] (см. [4, гл. II, § 3]) на случай треугольной матрицы узлов при более слабых ограничениях, поскольку узлы интерполяции в следствии 5 могут иметь предельные точки в конечной плоскости. Кроме того, следствие 5 обобщает вторую часть теоремы IV из [4] на целые функции любой конечной степени.

Теорема 5 обобщает вторую часть теоремы IV из [4] на случай треугольной матрицы узлов интерполяции и функции любой конечной степени с конечным числом особых точек.

Из доказанных теорем можно сделать следующий вывод. Если выполнены условия (5), то чем медленнее узлы интерполяции стремятся к особым точкам функции, тем шире классы равномерной сходимости интерполяционного процесса с помощью дробей (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть для матрицы узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ выполняются условия (5), $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$. При выполненных условиях каждой из теорем 1–3, 5 верны условия (4) равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$. Может случиться так, что около точек a_s выполняются условия каких-либо двух, трех или всех четырех из указанных выше теорем. Если при этом условия каждой теоремы имеют место около некоторого множества точек из a_s , не имеющего общих элементов с другими множествами, и объединение всех множеств равно a_s , $s = 1, 2, \dots, p+1$, то условия (4) будут выполнены около всех особых точек функции $f(z)$. Следовательно, в таком случае можем утверждать, что последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

Теорема 6. Пусть $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — матрица узлов интерполяции, выполнены условия (5) и $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$. Если существуют последователь-

ности $\{\theta_n^{(s)}\}$, $0 < \theta_n^{(s)} < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^{(s)} > 0$, такие, что выполняются неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\ln M_s \left(f, \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \right) - N_s(R_n^{(s)}) \right) (n_s(R_n^{(s)}))^{-1} - \ln \frac{1}{\theta_n^{(s)}} \right] < 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1, \quad (14)$$

где $R_n^{(s)} = u_{n, \lambda_n^{(s)}}$, $n_s(R_n^{(s)})$ — функции плотности узлов интерполяции около точек a_s , $N_s(R_n^{(s)})$ — функции Неванлинна, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку из условий (5) и выбора $R_n^{(s)}$ следует соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(R_n^{(s)})}{n} = \chi_s > 0,$$

неравенства (14) непосредственно вытекают из условий (4) равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k , $k = 1, 2, \dots, p$. Теорема доказана.

Следствие 6. Пусть $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, — матрица узлов интерполяции,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$. Если существует последовательность $\{\theta_n\}$, $0 < \theta_n < 1$, такая, что выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\ln M \left(f, \frac{R_n}{\theta_n} \right) - N(R_n) \right) (n(R_n))^{-1} - \ln \frac{1}{\theta_n} \right] < 0,$$

где $R_n = u_{n, \lambda_n}$, $n(R_n)$ — функция плотности узлов интерполяции, $N(R_n)$ — функция Неванлинна, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(R_n)}{n} = 1 = \chi.$$

В силу того, что $\lambda_n \leq m_n + 1$, неравенство (4) имеет место без ограничения $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_s > 0$. Справедливость следствия вытекает из теоремы 6. Следствие доказано.

Ввиду того, что в теореме 6 $\theta_n^{(s)} \in (0, 1)$, она улучшает теорему 7 из [2], а следствие 6 улучшает следствие 6 из [2], теорему 1 из [5] (см. также [4, гл. II, § 3, теорема III]), теорему из [8] и теорему V из [4] (см. также [4, гл. II, § 3]), поскольку во всех этих теоремах $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Кроме того, в теореме 1 из [5] и теореме из [8] положено $N(R_n) = 0$ независимо от узлов интерполяции. Следствие 6 обобщает указанные выше теоремы на случай треугольной матрицы узлов интерполяции с более слабыми ограничениями на их расположение, так как в следствии 6 узлы могут иметь предельные точки в конечной части плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров В. Л. Об интерполировании функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. № 2. С. 171–189.
2. Липчинский А. Г. Интерполирование аналитических функций с конечным числом особенностей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1027–1047.
3. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. М.: Гостехиздат, 1956. Т. 1.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
5. Ибрагимов И. И., Келдыш М. В. Об интерполировании целых функций // Мат. сб. 1947. Т. 20. С. 283–292.
6. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
7. Гончарова М. К. О некоторых интерполяционных рядах, являющихся обобщением рядов Ньютона и Стирлинга // Уч. зап. Моск. ун-та. 1939. Т. 30. С. 17–48.
8. Дворкин Б. С. Интерполяционная проблема Ньютона для целой функции со специальными узлами интерполяции // Тр. Ставроп. пед. ин-та. 1958. № 10. С. 67–75.

Статья поступила 15 апреля 2014 г.

Липчинский Александр Григорьевич
Ишимский гос. педагогический институт им. П. П. Ершова,
ул. Ленина, 1, Ишим 627750 Тюменской обл.