

СУПЕРАЛГЕБРЫ ПУАССОНА И ФИЛИППОВА

А. П. Пожидаев

Аннотация. Установлена связь между супералгебрами Пуассона с некоторым дополнительным тождеством (Фаркаса) и супералгебрами Филиппова. Из данной конструкции получаются все известные к настоящему моменту простые алгебры Филиппова. Построены новые примеры простых конечномерных супералгебр Филиппова характеристики 2.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.314

Ключевые слова: супералгебра Пуассона, супералгебра Филиппова, простая супералгебра, супералгебра Грассмана.

Посвящается 75-летию Юрия Леонидовича Ершова

Введение

Пусть A — супералгебра Пуассона $(A; \{, \}, \cdot)$, где $\{, \}$ — лиева операция, $\cdot$ — ассоциативная суперкоммутативная операция. Отметим, что $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ — $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра ($A_{\bar{i}} \cdot A_{\bar{j}} \subseteq A_{\overline{i+j}}$), $(A; \{, \})$ — супералгебра Ли и на A выполнено тождество Лейбница $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + (-1)^{p(b)p(c)} \{a, c\} \cdot b$. Элементы из $A_{\bar{0}}$ называются *четными*, а элементы из $A_{\bar{1}}$ — *нечетными*; при этом пишут $p(a) = i$, если $a \in A_{\bar{i}}$. В выражениях вида $(-1)^{p(a)p(b)}$ и т. п. условимся опускать символ p , т. е. $(-1)^{ab} := (-1)^{p(a)p(b)}$. Пусть D либо однородное ($D(A_{\bar{i}}) \subseteq A_{\overline{i+p}}$) дифференцирование четности $p = p(D)$ в A относительно обеих операций (т. е. для любых однородных $a, b \in A$ выполнены равенства

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + (-1)^{aD} a \cdot D(b), \quad D\{a, b\} = \{D(a), b\} + (-1)^{aD} \{a, D(b)\},$$

здесь и далее обозначаем $D(a) := \bar{a}$ и $(-1)^{p(a)p(D)} := (-1)^{aD}$, либо тождественное отображение на A (при этом $D(a) = \bar{a} = a$). Заметим, что если $A_{\bar{1}} = 0$, то приходим к определению алгебры Пуассона.

Определим на векторном пространстве супералгебры A новую тернарную операцию $[, ,]$ правилом

$$[x, y, z] = (-1)^{(x+y)D} \{x, y\} \cdot \bar{z} - (-1)^{(x+z)D+yz} \{x, z\} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \{y, z\} \quad (1)$$

для любых однородных $x, y, z \in A$, а далее продолжим ее по линейности. Обозначим получившуюся тернарную супералгебру через A_D .

Тернарная антикоммутативная алгебра $\mathcal{F}$ называется *алгеброй Филиппова*, если все ее операторы правого умножения являются дифференцированиями

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-01-33031, 14-01-00014).

данной алгебры, т. е. на $\mathcal{F}$ кроме антикоммутативности также выполнено *обобщенное тождество Якоби* (тождество Филиппова)

$$[[x, y, z], u, v] = [[x, u, v], y, z] + [x, [y, u, v], z] + [x, y, [z, u, v]].$$

В 1997 г. И. П. Шестаков поставил вопрос: если A — алгебра Пуассона, то будет ли A_D алгеброй Филиппова? Автор показал, что ответ на этот вопрос отрицателен. Однако тогда автором не было замечено, что при некоторых дополнительных естественных предположениях на алгебру A вопрос решается положительно. Это положительное решение для более общего случая супералгебр мы и приводим ниже (в § 1). В § 2 показываем, что из конструкции алгебры A_D из § 1 получаются все известные к настоящему моменту простые тернарные алгебры Филиппова. В § 3, используя результаты § 1, строим новые примеры простых конечномерных супералгебр Филиппова характеристики 2.

Условимся опускать запятые в операциях и символ операции $\cdot$, когда это не приводит к двусмысленности. Так, например, $[\{xy\}zt|u]$ означает $[\{x, y\}, z, t] \cdot u$.

§ 1. Супералгебры Пуассона — Фаркаса и Филиппова

Предположим, что на A выполняется тождество

$$\{xy\}\{zu\} + (-1)^{z(x+y)}\{zx\}\{yu\} + (-1)^{x(y+z)}\{yz\}\{xu\} = 0. \quad (2)$$

Алгебры Пуассона с данным тождеством (убирая знаки четностей) рассматривались Фаркасом (см., например, [1]), поэтому супералгебры с данным тождеством будем называть *супералгебрами Пуассона — Фаркаса*, а само тождество (2) — *тождеством Пуассона — Фаркаса*. Если нечетная часть A нулевая, то приходим к понятию *алгебры Пуассона — Фаркаса*.

Пусть A — супералгебра Пуассона, а Γ — супералгебра Грассмана от нечетных порождающих $x_1, x_2, \dots$. Тогда грассманова оболочка $\Gamma(A) := (A_0 \otimes \Gamma_0) \oplus (A_1 \otimes \Gamma_1)$ является алгеброй Пуассона относительно операций (для однородных элементов)

$$(a \otimes f) \cdot (b \otimes g) = (-1)^{ab}(a \cdot b \otimes fg),$$

$$\{a \otimes f, b \otimes g\} = (-1)^{ab}\{a, b\} \otimes fg.$$

Если D — супердифференцирование на A относительно обеих операций, то отображение $a \otimes f \mapsto D(a) \otimes f$ будет дифференцированием алгебры $\Gamma(A)$ относительно обеих операций, которое также обозначим через D . Легко видеть, что если A — супералгебра Пуассона — Фаркаса, то $\Gamma(A)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса.

Напомним, что *тернарной супералгеброй* над полем F называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированная тернарная алгебра $A = A_0 \oplus A_1$ над F (с операцией $(\cdot, \cdot, \cdot)$), т. е. если $x_i \in A_{\alpha_i}$, то $(x_1, x_2, x_3) \in A_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$. *Тернарная супералгебра Филиппова* над F — это тернарная антикоммутативная супералгебра $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$ над F с одной тернарной операцией $[\cdot, \cdot, \cdot]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1, x_2, x_3], y, z] = (-1)^{pp_1}[[x_1, y, z], x_2, x_3] + (-1)^{pp_2}[x_1, [x_2, y, z], x_3] + [x_1, x_2, [x_3, y, z]], \quad (3)$$

где $p = p(y) + p(z)$, $p_1 = p(x_2) + p(x_3)$, $p_2 = p(x_3)$. Другими словами, грассманова оболочка тернарной супералгебры $\mathcal{F}$ является тернарной алгеброй Филиппова, где грассманова оболочка определяется аналогично предыдущему. Далее, вместо использования «длинного» термина «тернарная (супер)алгебра» просто используем термин «(супер)алгебра».

Теорема 1. Пусть $(A; \{, \}, \cdot)$ — супералгебра Пуассона — Фаркаса с дифференцированием D . Тогда $(A_D; [,], \cdot)$ является супералгеброй Филиппова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к грассмановой оболочке $\Gamma(A)$. Как замечено ранее, $\Gamma(A)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса. Определим на $\Gamma(A)$ тернарную операцию $[,], \cdot$ правилом

$$[a \otimes x_1, b \otimes x_2, c \otimes x_3] = \{a \otimes x_1, b \otimes x_2\} \cdot D(c \otimes x_3) - \{a \otimes x_1, c \otimes x_3\} \cdot D(b \otimes x_2) + D(a \otimes x_1) \cdot \{b \otimes x_2, c \otimes x_3\}.$$

Легко проверяется, что

$$[a \otimes f, b \otimes g, c \otimes h] = (-1)^{ab+ac+bc}[a, b, c] \otimes fgh$$

для любых однородных $a, b, c \in A, f, g, h \in \Gamma$ (заметим, что $p(a) = p(f)$ и т. д.).

Покажем, что $\Gamma(A)$ является тернарной алгеброй Филиппова, откуда и следует утверждение теоремы.

Антикоммутативность операции $[,], \cdot$ на $\Gamma(A)$ вытекает из определения данной операции. Тожество Филиппова запишем в виде

$$[[abc]ed] + [[ade]bc] + [[ebd]ca] + [[dec]ab] = 0. \quad (4)$$

Заметим, что для любых $a, b, c, x, y, e, d \in A_D$ имеем

$$[a, b, c] = \{a, b\} \cdot \bar{c} - \{a, c\} \cdot \bar{b} + \{b, c\} \cdot \bar{a},$$

$$\begin{aligned} [xy, e, d] &= \{xy, e\} \bar{d} - \{xy, d\} \bar{e} + \{e, d\} \bar{xy} + \{e, d\} x \bar{y} \\ &= \{x, e\} y \bar{d} + \{y, e\} x \bar{d} + \{d, x\} y \bar{e} + \{d, y\} x \bar{e} + \{e, d\} \bar{xy} + \{e, d\} x \bar{y}. \end{aligned}$$

Полагая последовательно $x = \{ab\}, y = \bar{c}; x = \{ac\}, y = \bar{b}; x = \{bc\}, y = \bar{a}$, получаем, что $[[abc]ed]$ перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\{\{ab\}e\} \bar{c} \bar{d} + \{\bar{c}e\} \{ab\} \bar{d} + \{d\{ab\}\} \bar{c} \bar{e} + \{d\bar{c}\} \{ab\} \bar{e} + \{ed\} \{\bar{a}b\} \bar{c} + \{ed\} \{\bar{a}b\} \bar{c} \\ &+ \{ed\} \{ab\} \bar{c} + \{\{ca\}e\} \bar{b} \bar{d} + \{\bar{b}e\} \{ca\} \bar{d} + \{d\{ca\}\} \bar{b} \bar{e} + \{d\bar{b}\} \{ca\} \bar{e} + \{ed\} \{\bar{c}a\} \bar{b} \\ &+ \{ed\} \{\bar{c}a\} \bar{b} + \{ed\} \{ca\} \bar{b} + \{\{bc\}e\} \bar{a} \bar{d} + \{\bar{a}e\} \{bc\} \bar{d} + \{d\{bc\}\} \bar{a} \bar{e} + \{d\bar{a}\} \{bc\} \bar{e} \\ &+ \{ed\} \{\bar{b}c\} \bar{a} + \{ed\} \{bc\} \bar{a} + \{ed\} \{bc\} \bar{a}. \end{aligned}$$

Аналогично для $[[ade]bc]$ выводим

$$\begin{aligned} &\{\{ad\}b\} \bar{e} \bar{c} + \{\bar{e}b\} \{ad\} \bar{c} + \{c\{ad\}\} \bar{e} \bar{b} + \{c\bar{e}\} \{ad\} \bar{b} + \{bc\} \{\bar{a}d\} \bar{e} + \{bc\} \{\bar{a}d\} \bar{e} \\ &+ \{bc\} \{ad\} \bar{e} + \{\{ea\}b\} \bar{d} \bar{c} + \{\bar{d}b\} \{ea\} \bar{c} + \{c\{ea\}\} \bar{d} \bar{b} + \{cd\} \{ea\} \bar{b} + \{bc\} \{\bar{e}a\} \bar{d} \\ &+ \{bc\} \{\bar{e}a\} \bar{d} + \{bc\} \{ea\} \bar{d} + \{\{de\}b\} \bar{a} \bar{c} + \{\bar{a}b\} \{de\} \bar{c} + \{c\{de\}\} \bar{a} \bar{b} + \{c\bar{a}\} \{de\} \bar{b} \\ &+ \{bc\} \{\bar{d}e\} \bar{a} + \{bc\} \{de\} \bar{a} + \{bc\} \{de\} \bar{a}, \end{aligned}$$

для $[[ebd]ca]$ получаем

$$\begin{aligned} &\{\{eb\}c\} \bar{d} \bar{a} + \{\bar{d}c\} \{eb\} \bar{a} + \{a\{eb\}\} \bar{d} \bar{c} + \{a\bar{d}\} \{eb\} \bar{c} + \{ca\} \{\bar{e}b\} \bar{d} + \{ca\} \{\bar{e}b\} \bar{d} \\ &+ \{ca\} \{eb\} \bar{d} + \{\{de\}c\} \bar{b} \bar{a} + \{\bar{b}c\} \{de\} \bar{a} + \{a\{de\}\} \bar{b} \bar{c} + \{a\bar{b}\} \{de\} \bar{c} + \{ca\} \{\bar{d}e\} \bar{b} \\ &+ \{ca\} \{\bar{d}e\} \bar{b} + \{ca\} \{de\} \bar{b} + \{\{bd\}c\} \bar{e} \bar{a} + \{\bar{e}c\} \{bd\} \bar{a} + \{a\{bd\}\} \bar{e} \bar{c} + \{a\bar{e}\} \{bd\} \bar{c} \\ &+ \{ca\} \{\bar{b}d\} \bar{e} + \{ca\} \{bd\} \bar{e} + \{ca\} \{bd\} \bar{e}, \end{aligned}$$

и $[[dec]ab]$ запишется в виде

$$\begin{aligned} & \{\{de\}a\}\bar{c}\bar{b} + \{\bar{c}a\}\{de\}\bar{b} + \{b\{de\}\}\bar{c}\bar{a} + \{b\bar{c}\}\{de\}\bar{a} + \{ab\}\{\bar{d}e\}\bar{c} + \{ab\}\{d\bar{e}\}\bar{c} \\ & + \{ab\}\{de\}\bar{c} + \{\{cd\}a\}\bar{e}\bar{b} + \{\bar{e}a\}\{cd\}\bar{b} + \{b\{cd\}\}\bar{e}\bar{a} + \{b\bar{e}\}\{cd\}\bar{a} + \{ab\}\{\bar{c}d\}\bar{e} \\ & + \{ab\}\{cd\}\bar{e} + \{ab\}\{cd\}\bar{e} + \{\{ec\}a\}\bar{d}\bar{b} + \{\bar{d}a\}\{ec\}\bar{b} + \{b\{ec\}\}\bar{d}\bar{a} + \{b\bar{d}\}\{ec\}\bar{a} \\ & + \{ab\}\{\bar{e}c\}\bar{d} + \{ab\}\{e\bar{c}\}\bar{d} + \{ab\}\{ec\}\bar{d}. \end{aligned}$$

Обозначим слагаемое с номером $7i + j$ (из всех последних полученных 84 слагаемых) через $s_{i+1,j}$, $i = 0, \dots, 11$, $j = 1, \dots, 7$ (пишем s_{ij} , если $i < 10$), т. е. левая часть (4) равна $\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^7 s_{i,j}$. Тогда следующие суммы равны нулю по антикоммутативности:

$$\begin{aligned} & s_{61} + s_{10,3}; \quad s_{81} + s_{63}; \quad s_{10,1} + s_{83}; \quad s_{12} + s_{12,6}; \quad s_{22} + s_{76}; \quad s_{32} + s_{56}; \\ & s_{62} + s_{15}; \quad s_{82} + s_{35}; \quad s_{10,2} + s_{25}; \quad s_{14} + s_{11,5}; \quad s_{24} + s_{95}; \quad s_{34} + s_{45}; \\ & s_{64} + s_{26}; \quad s_{84} + s_{16}; \quad s_{10,4} + s_{36}; \quad s_{17} + s_{10,7}; \quad s_{27} + s_{87}; \quad s_{37} + s_{67}, \end{aligned}$$

последующие — по тождеству Якоби:

$$\begin{aligned} & s_{11} + s_{51} + s_{73}; \quad s_{21} + s_{53} + s_{12,1}; \quad s_{31} + s_{71} + s_{12,3}; \\ & s_{41} + s_{13} + s_{93}; \quad s_{91} + s_{33} + s_{11,3}; \quad s_{11,1} + s_{23} + s_{43}, \end{aligned}$$

и последние — по тождеству (2):

$$\begin{aligned} & s_{42} + s_{94} + s_{10,6}; \quad s_{52} + s_{74} + s_{10,5}; \quad s_{72} + s_{12,4} + s_{65}; \\ & s_{92} + s_{11,4} + s_{66}; \quad s_{11,2} + s_{44} + s_{86}; \quad s_{12,2} + s_{54} + s_{85}; \quad s_{55} + s_{75} + s_{12,5}; \\ & s_{46} + s_{96} + s_{10,6}; \quad s_{47} + s_{97} + s_{11,7}; \quad s_{57} + s_{77} + s_{12,7}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^7 s_{i,j} = 0$, что и доказывает теорему. $\square$

Легко заметить, что существуют алгебры Пуассона, на которых (2) выполняется, и такие, на которых (2) не справедливо. Это показывают следующие три примера.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим кольцо многочленов $A = F[x, y, z]$ над полем F . Положим

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}; \quad D(f) := \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Тогда A — алгебра Пуассона с дифференцированием D и тождеством (2). Заметим, что при этом A D -проста, однако простой не является.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим кольцо многочленов $A = F[x, y, u, v]$ над полем F . Положим

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Тогда A — алгебра Пуассона, однако тождество (2) в A не выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что (2) в случае алгебр влечет тождество

$$\{\{tz\}x\}y + \{\{yt\}x\}z + \{\{zy\}x\}t = 0.$$

Также можно заметить, что если рассмотреть A как алгебраическую систему с тремя операциями $(A; \{, \}, \cdot, [, ,])$, то на A выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \{ad\}R_{b,c} + \{bc\}R_{a,d} &= \{aR_{b,c}, x\} + \{a, xR_{b,c}\}, \\ \{aR_{b,c}, x\} + \{a, xR_{b,c}\} &= \{bR_{a,x}, c\} + \{b, cR_{a,x}\}, \end{aligned}$$

где $R_{a,b}$ — оператор правого умножения в $(A; [, ,])$: $xR_{a,b} = [x, a, b]$.

Легко видеть, что $R_{a,b}$ — дифференцирование относительно ассоциативной операции:

$$(xy)R_{a,b} = (xR_{a,b})y + x(yR_{a,b}).$$

ПРИМЕР 3. Как известно (см., например, [2]), один из примеров алгебр Пуассона дают скобки Пуассона — Ли на пространстве многочленов от n переменных $x_1, \dots, x_n$ с ассоциативной и коммутативной операцией умножения многочленов и лиевой операцией, определенной для образующих $x_1, \dots, x_n$ по формуле

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} x_k, \quad (5)$$

где c_{ijk} — структурные константы фиксированной алгебры Ли L на n -мерном пространстве. Для остальных многочленов операция определяется на основе (5) с помощью тождества Лейбница. Обозначим полученную алгебру через $P(L)$. Легко заметить, что в общем случае $P(L)$ не является алгеброй Пуассона — Фаркаса. Пример дает уже $P(sl_3)$: достаточно рассмотреть (2) на элементах $e_{12}, e_{23}, e_{11} - e_{22}, e_{11} - e_{33}$. Тем не менее даже среди простых алгебр Ли L существуют $P(L)$, являющиеся алгебрами Пуассона — Фаркаса, что показывает

Предложение 1. $P(sl_2)$ является алгеброй Пуассона — Фаркаса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лиева операция на порождающих задается следующим образом:

$$\{x_1, x_2\} = x_3, \quad \{x_1, x_3\} = 2x_1, \quad \{x_2, x_3\} = -2x_2. \quad (6)$$

Обозначим произвольный базисный элемент $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ алгебры $P(sl_2)$ через $x^{(k)}$, где $(k) = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$. Из тождества Лейбница и (6) получаем следующие правила умножения:

$$\begin{aligned} \{x^{(k)}, x_1^s\} &= -sk_2 x^{(k)+(s-1, -1, 1)} - 2sk_3 x^{(k)+(s, 0, -1)}, \\ \{x^{(k)}, x_2^s\} &= sk_1 x^{(k)+(-1, s-1, 1)} + 2sk_3 x^{(k)+(0, s, -1)}, \\ \{x^{(k)}, x_3^s\} &= (2k_1 - k_2) s x^{(k)+(0, 0, s-1)}, \end{aligned}$$

откуда вытекает общая формула:

$$\begin{aligned} \{x^{(k)}, x^{(s)}\} &= (k_1 s_2 - s_1 k_2) x^{(k)+(s)+(-1, -1, 1)} \\ &\quad + 2(k_3(s_2 - s_1) + s_3(k_1 - k_2)) x^{(k)+(s)+(0, 0, -1)}. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma_{k,s,t}$ — оператор взятия циклической суммы по k, s, t . Проверяем тождество Пуассона — Фаркаса:

$$\sigma_{k,s,t} \{x^{(k)}, x^{(s)}\} \cdot \{x^{(t)}, x^{(l)}\} = \sigma_{k,s,t} (x_{k,s} \cdot x_{t,l} \cdot x^{(k)+(s)+(t)+(l)}) = 0,$$

где $x_{a,b} := (a_1 b_2 - b_1 a_2) x^{(-1, -1, 1)} + 2(a_3(b_2 - b_1) + b_3(a_1 - a_2)) x^{(0, 0, -1)}$.

Рассмотрим коэффициент при $x^{(k)+(s)+(t)+(l)+(-2,-2,2)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{k,s,t}(k_1s_2 - s_1k_2)(t_1l_2 - l_1t_2) \\ = l_2(t_1(k_1s_2 - s_1k_2) + s_1(t_1k_2 - k_1t_2) + k_1(s_1t_2 - t_1s_2)) \\ - l_1(t_2(k_1s_2 - s_1k_2) + s_2(t_1k_2 - k_1t_2) + k_2(s_1t_2 - t_1s_2)) \\ = l_2 \cdot 0 + l_1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что коэффициенты при всех остальных базисных элементах также равны 0. $\square$

Теорема 2. Пусть $(A; \{, \}, \cdot)$ либо супералгебра Пуассона над полем F характеристики 2, либо супералгебра Пуассона — Фаркаса. Тогда $(A_D; [,], \cdot)$ является тернарной супералгеброй Филиппова, если D — тождественное отображение на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Антикоммутативность операции $[,]$ следует из определения данной операции. Ради разнообразия дадим прямое доказательство супертождества Филиппова, которое запишем в виде

$$[[abc]ed] + \overbrace{[[ade]bc]}^{(e+d)(b+c)+ed} + \overbrace{[[ebd]ca]}^{a(b+c+e+d)+c(e+d)+eb} + \overbrace{[[dec]ab]}^{(a+b)(c+e+d)+c(e+d)+ed} = 0 \quad (7)$$

(здесь и далее используем обозначение $\overbrace{X}^{ab} := (-1)^{ab}X$, где X — некоторое выражение).

Заметим, что для любых $a, b, c, x, y, z, e, d \in A_D$ имеем

$$[a, b, c] = \{a, b\}c - (-1)^{bc}\{a, c\}b + a\{b, c\},$$

$$\begin{aligned}[xy, e, d] &= \{xy, e\}d - (-1)^{ed}\{xy, d\}e + xy\{e, d\} = (-1)^{ye}\{x, e\}yd \\ &\quad + x\{y, e\}d - (-1)^{ed+yd}\{x, d\}ye - (-1)^{ed}x\{y, d\}e + xy\{e, d\}.\end{aligned}$$

Полагая во втором равенстве последовательно $x = \{ab\}$, $y = c$; $x = \{a, c\}$, $y = b$; $x = a$, $y = \{b, c\}$, получаем, что $[[abc]ed]$ перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}&\overbrace{\{\{ab\}e\}cd}^{ec} + \overbrace{\{ab\}\{ce\}d}^{d(e+c)} - \overbrace{\{\{ab\}d\}ce}^{ed} - \overbrace{\{ab\}\{cd\}e}^{ed} + \overbrace{\{ab\}c\{ed\}}^{ed} \\ &- \overbrace{\{\{ac\}e\}bd}^{b(e+c)} - \overbrace{\{ac\}\{be\}d}^{bc} + \overbrace{\{\{ac\}d\}be}^{d(e+b)+bc} + \overbrace{\{ac\}\{bd\}e}^{ed+bc} - \overbrace{\{ac\}b\{ed\}}^{bc} \\ &+ a\{\{bc\}e\}d + \overbrace{\{ae\}\{bc\}d}^{e(b+c)} - \overbrace{a\{\{bc\}d\}e}^{ed} - \overbrace{\{ad\}\{bc\}e}^{d(b+c+e)} + a\{bc\}\{ed\}.\end{aligned}$$

Аналогично для $(-1)^{(e+d)(b+c)+ed}[[ade]bc]$ имеем

$$\begin{aligned}&\overbrace{\{\{ad\}b\}ec}^{be} + \overbrace{\{ad\}\{eb\}c}^{c(e+b)} - \overbrace{\{\{ad\}c\}eb}^{bc} - \overbrace{\{ad\}\{ec\}b}^{bc} + \overbrace{\{ad\}e\{bc\}}^{bc} \\ &- \overbrace{\{\{ae\}b\}dc}^{d(e+b)} - \overbrace{\{ae\}\{db\}c}^{de} + \overbrace{\{\{ae\}c\}db}^{c(b+d)+de} + \overbrace{\{ae\}\{dc\}b}^{bc+de} - \overbrace{\{ae\}d\{bc\}}^{de} \\ &+ a\{\{de\}b\}c + \overbrace{\{ab\}\{de\}c}^{b(d+e)} - \overbrace{a\{\{de\}c\}b}^{bc} - \overbrace{\{ac\}\{de\}b}^{c(d+e+b)} + a\{de\}\{bc\};\end{aligned}$$

для $(-1)^{a(b+c+e+d)+c(e+d)+eb}[[ebd]ca]$ получаем

$$\begin{aligned} & \overbrace{\{\{eb\}c\}da}^{cd} + \overbrace{\{eb\}\{dc\}a}^{a(d+c)} - \overbrace{\{\{eb\}a\}dc}^{ac} - \overbrace{\{eb\}\{da\}c}^{ac} + \overbrace{\{eb\}d\{ca\}}^{ac} \\ & - \overbrace{\{\{ed\}c\}ba}^{b(d+c)} - \overbrace{\{ed\}\{bc\}a}^{bd} + \overbrace{\{\{ed\}a\}bc}^{a(b+c)+bd} + \overbrace{\{ed\}\{ba\}c}^{ac+bd} - \overbrace{\{ed\}b\{ca\}}^{bd} \\ & + e\{\{bd\}c\}a + \overbrace{\{ec\}\{bd\}a}^{c(b+d)} - \overbrace{e\{\{bd\}a\}c}^{ca} - \overbrace{\{ea\}\{bd\}c}^{a(b+c+d)} + e\{bd\}\{ca\} \end{aligned}$$

и для $(-1)^{(a+b)(c+e+d)+c(e+d)+ed}[[dec]ab]$ выводим

$$\begin{aligned} & \overbrace{\{\{de\}a\}cb}^{ac} + \overbrace{\{de\}\{ca\}b}^{b(a+c)} - \overbrace{\{\{de\}b\}ca}^{ab} - \overbrace{\{de\}\{cb\}a}^{ab} + \overbrace{\{de\}c\{ab\}}^{ab} \\ & - \overbrace{\{\{dc\}a\}eb}^{e(a+c)} - \overbrace{\{dc\}\{ea\}b}^{ec} + \overbrace{\{\{dc\}b\}ea}^{(a+e)b+ec} + \overbrace{\{dc\}\{eb\}a}^{ab+ec} - \overbrace{\{dc\}e\{ab\}}^{ec} \\ & + d\{\{ec\}a\}b + \overbrace{\{da\}\{ec\}b}^{a(e+c)} - \overbrace{d\{\{ec\}b\}a}^{ab} - \overbrace{\{db\}\{ec\}a}^{b(a+c+e)} + d\{ec\}\{ab\}. \end{aligned}$$

Обозначая $s_{i,j}$, как в теореме 1 (теперь это $5i + j$, $i = 0, \dots, 11$, $j = 1, \dots, 5$), получим, что следующие суммы равны нулю по антикоммутативности:

$$\begin{aligned} & s_{61} + s_{10,3}; \quad s_{81} + s_{63}; \quad s_{10,1} + s_{83}; \quad s_{12} + s_{12,5}; \quad s_{22} + s_{75}; \quad s_{32} + s_{55}; \\ & s_{15} + s_{62}; \quad s_{35} + s_{65}; \quad s_{25} + s_{85}; \quad s_{14} + s_{11,5}; \quad s_{24} + s_{95}; \quad s_{34} + s_{45}, \end{aligned}$$

последующие — по антикоммутативности и тождеству Якоби:

$$\begin{aligned} & s_{11} + s_{51} + s_{73}; \quad s_{21} + s_{53} + s_{12,1}; \quad s_{31} + s_{71} + s_{12,3}; \\ & s_{41} + s_{13} + s_{93}; \quad s_{91} + s_{33} + s_{11,3}; \quad s_{11,1} + s_{23} + s_{43}, \end{aligned}$$

и последние — либо из условия $\text{char } F = 2$, либо по антикоммутативности и тождеству (2):

$$s_{44} + s_{54} + s_{64} + s_{10,2} + s_{11,2} + s_{12,2}; \quad (8)$$

$$s_{72} + s_{82} + s_{92} + s_{10,4} + s_{11,4} + s_{12,4}; \quad (9)$$

$$s_{42} + s_{52} + s_{10,5} + s_{74} + s_{84} + s_{94}. \quad (10)$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^5 s_{i,j} = 0$, что и доказывает теорему. $\square$

Заметим, что в силу (8)–(10) утверждение теоремы остается справедливым и для более ослабленного тождества на алгебре Пуассона

$$\begin{aligned} & a(\{be\}\{cd\} + \{bc\}\{de\} + \{bd\}\{ec\}) + b(\{ad\}\{ce\} + \{ae\}\{dc\} + \{ac\}\{ed\}) \\ & + c(\{ad\}\{eb\} + \{ae\}\{bd\} + \{ab\}\{de\}) = 0, \end{aligned}$$

в частности, для тождества

$$(\{ab\}\{cd\} + \{ca\}\{bd\} + \{bc\}\{ad\})e = 0.$$

Теорема 3. Пусть $(A; \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра, на которой также определены антикоммутативная операция $\{, \}$ и инволюция $\sim$ относительно обеих операций. Предположим, что на A также выполнены тождества

$$(\{ab\}c + \{ca\}b + \{bc\}a)\{ed\} = 0, \quad (11)$$

$$a\{b\{ed\}, c\} - b\{a\{ed\}, c\} + \{ab\}\{ed\}c = 0, \quad (12)$$

$$(\{\{ab\}d, c\} + \{\{ca\}d, b\} + \{\{bc\}d, a\})c = 0. \quad (13)$$

Определим на A тернарную операцию $[, ,]$ правилом

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}. \quad (14)$$

Тогда $(A; [, ,])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Антикоммутативность операции $[, ,]$ следует из определения данной операции. Для любых $a, b, c, e, d \in A$ имеем

$$\begin{aligned} [[a, b, c], e, d] &= [\{a, b\}\tilde{c} + \{c, a\}\tilde{b} + \{b, c\}\tilde{a}, e, d] \\ &= \tilde{d}(\{\{a, b\}\tilde{c}, e\} + \{\{c, a\}\tilde{b}, e\} + \{\{b, c\}\tilde{a}, e\}) \\ &\quad + \tilde{e}(\{d, \{a, b\}\tilde{c}\} + \{d, \{c, a\}\tilde{b}\} + \{d, \{b, c\}\tilde{a}\}) \\ &\quad + \{e, d\}(\{\tilde{b}, \tilde{a}\}c + \{\tilde{a}, \tilde{c}\}b + \{\tilde{c}, \tilde{b}\}a). \end{aligned}$$

Рассмотрим тождество Филиппова (4). Слагаемые из (4) получаем из предыдущего равенства, используя последовательные замены:

$$\begin{pmatrix} b & c & e & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & e & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & c & e & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ e & d & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & e & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & e & a & b \end{pmatrix}.$$

В силу антикоммутативности якобиана (т. е. левой части (4)) по a, b, c и по d, e достаточно рассмотреть слагаемые, содержащие $\tilde{d}$ и $\tilde{c}$, потом — $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ и в конце — $\tilde{e}$ и $\tilde{d}$.

В первом случае имеем

$$\tilde{d}\{\{a, b\}\tilde{c}, e\} + \tilde{c}\{\{e, a\}\tilde{d}, b\} + \tilde{c}\{a, \{e, b\}\tilde{d}\} + \{\tilde{d}, \tilde{c}\}e\{a, b\},$$

что равно нулю по тождествам (12) и (13).

Во втором случае по (12) получаем

$$\{e, d\}\{\tilde{b}, \tilde{a}\}c + \tilde{b}\{c, \{d, e\}\tilde{a}\} + \tilde{a}\{\{d, e\}\tilde{b}, c\} = 0.$$

В третьем случае из (11) следует, что

$$\{b, c\}\{\tilde{e}, \tilde{d}\}a + \{c, a\}\{\tilde{e}, \tilde{d}\}b + \{a, b\}\{\tilde{e}, \tilde{d}\}c = 0.$$

Полученные равенства доказывают теорему. $\square$

Заметим, что на $(A; [, ,])$ определена «индуцированная инволюция» $\sim$ такая, что $[x, y, z] = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]$.

Следствие 1. Пусть $(A; \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра, на которой определены антикоммутативная скобка $\{, \}$ и инволюция $\sim$ относительно обеих операций. Предположим, что на A также выполнены тождества

$$\{ab\}c + \{ca\}b + \{bc\}a = 0, \quad (15)$$

$$a\{bx, y\} - b\{ax, y\} + \{a, b\}xy = 0, \quad (16)$$

$$\{\{ab\}x, c\} + \{\{ca\}x, b\} + \{\{bc\}x, a\} = 0. \quad (17)$$

Определим на A тернарную операцию $[\cdot, \cdot, \cdot]$ правилом

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}.$$

Тогда $(A; [\cdot, \cdot, \cdot])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что (11)–(13) следуют из (15)–(17). $\square$

Рассмотрим тождество

$$2\{a, b\}c = \{a, bc\} + \{ac, b\}. \quad (18)$$

Заметим, что (15) и (18) влекут (16). Действительно, имеем

$$\{bx, y\}a = -\{a, bx\}y - \{y, a\}xb,$$

$$\{y, ax\}b = -\{ax, b\}y - \{b, y\}ax.$$

Складывая данные равенства, получаем

$$\begin{aligned} \{bx, y\}a + \{y, ax\}b &= -x(\{y, a\}b + \{b, y\}a) - y(\{a, xb\} + \{ax, b\}) \\ &= \{ab\}xy - 2\{ab\}xy = -\{ab\}xy. \end{aligned}$$

Также отметим, что при наличии (15) и (18) тождество (17) эквивалентно тождеству Фаркаса — достаточно сложить следующие равенства:

$$\{\{ab\}x, c\} = \{c\{ab\}, x\} + 2\{ab\}\{xc\},$$

$$\{\{ca\}x, b\} = \{b\{ca\}, x\} + 2\{ca\}\{xb\},$$

$$\{\{bc\}x, a\} = \{a\{bc\}, x\} + 2\{bc\}\{xa\}.$$

При этом если характеристика равна 2, то из (15) следует (17).

Таким образом, получаем

Следствие 2. Пусть $(A; \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра, на которой определены антикоммутативная скобка $\{, \}$ и инволюция $\sim$ относительно обеих операций. Предположим, что на A выполнены тождества (15) и (18), а также тождество Фаркаса. Определим на A тернарную операцию $[\cdot, \cdot, \cdot]$ правилом

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}.$$

Тогда $(A; [\cdot, \cdot, \cdot])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

Следствие 3 [3]. Пусть $(A; \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с инволюцией $\sim$ и дифференцированием D таким, что $D(\tilde{x}) = -\widetilde{D(x)}$ для любого $x \in A$. Определим на A скобку $\{, \}$ правилом $\{x, y\} = xD(y) - yD(x)$ и тернарную операцию $[\cdot, \cdot, \cdot]$:

$$[x, y, z] = \{x, y\}\tilde{z} + \{z, x\}\tilde{y} + \{y, z\}\tilde{x}.$$

Тогда $(A; [\cdot, \cdot, \cdot])$ является тернарной алгеброй Филиппова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $\{, \}$ является скобкой Ли на A и выполнены все предположения следствия 2. $\square$

§ 2. Простые тернарные алгебры Филиппова

В данном параграфе покажем, что из конструкции алгебры A_D получаются все известные к настоящему моменту простые тернарные алгебры Филиппова.

Рассмотрим следующую алгебраическую систему. Пусть $(G; +)$ — абелева группа. Рассмотрим векторное пространство $A_G = \langle e_g : g \in G \rangle$ над полем F . Зафиксируем $\mu, \xi \in G$ и два аддитивных отображения $h_i : G \mapsto F$, $i = 1, 2$. Определим на A_G две бинарные операции $\cdot$ и $\{, \}$ правилами

$$e_a \cdot e_b = e_{a+b+\xi}, \quad (19)$$

$$\{e_a, e_b\} = h(a, b)e_{a+b+\mu}, \quad (20)$$

где $h(a, b)$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} h_1(a) & h_1(b) \\ h_2(a) & h_2(b) \end{pmatrix}$.

Полученную алгебраическую систему $(A_G; +, \cdot, \{, \})$ обозначим через A .

Лемма 1. В алгебре A выполняется тождество Якоби.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \{\{e_a, e_b\}, e_c\} + \{\{e_c, e_a\}, e_b\} + \{\{e_b, e_c\}, e_a\} \\ &= (h(a, b)h(a + b + \mu, c) + h(c, a)h(c + a + \mu, b) + h(b, c)h(b + c + \mu, a))e_{a+b+c+2\mu} \\ &= (h(a, b)h(\mu, c) + h(c, a)h(\mu, b) + h(b, c)h(\mu, a))e_{a+b+c+2\mu} = 0, \end{aligned}$$

что следует из равенства $h(a, b)h(\mu, c) + h(c, a)h(\mu, b) + h(b, c)h(\mu, a) = 0$ для любых $a, b, c \in G$. $\square$

Пусть h — отображение из G в пространство строк F_2 , заданное правилом $h(a) = (h_1(a), h_2(a))$. Будем говорить, что *ранг h равен 2*, если существуют $a, b \in G$ такие, что $h(a)$ и $h(b)$ линейно независимы (обозначение: $r(h) = 2$).

Лемма 2. Пусть $r(h) = 2$. На A выполняется тождество Лейбница тогда и только тогда, когда $h(\xi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d := a + b + c + \xi + \mu$, где $a, b, c \in G$. Имеем

$$\{e_a \cdot e_b, e_c\} = \{e_{a+b+\xi}, e_c\} = h(a + b + \xi, c)e_d,$$

$$\{e_a, e_c\} \cdot e_b = h(a, c)e_{a+c+\mu} \cdot e_b = h(a, c)e_d, \quad \{e_b, e_c\} \cdot e_a = h(b, c)e_d,$$

откуда следует, что на A выполняется тождество Лейбница тогда и только тогда, когда $h(\xi, c) = 0$ для любого $c \in G$. Так как $r(h) = 2$, последнее эквивалентно равенству $h(\xi) = 0$. $\square$

Лемма 3. В алгебре A выполняется тождество Фаркаса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = e_a$, $y = e_b$, $z = e_c$, $u = e_d$, $a, b, c, d \in G$. Тогда (2) эквивалентно равенству $h(a, b)h(c, d) + h(c, a)h(b, d) + h(b, c)h(a, d) = 0$, истинность которого заметили в лемме 1. $\square$

Зафиксируем аддитивное отображение $h_3 : G \mapsto F$. Пусть $\bar{h}$ — отображение из G в пространство строк F_3 , заданное правилом $\bar{h}(a) = (h_1(a), h_2(a), h_3(a))$. Будем говорить, что *ранг $\bar{h}$ равен 3*, если существуют $a, b, c \in G$ такие, что $h(a)$, $h(b)$ и $h(c)$ линейно независимы (обозначение: $r(\bar{h}) = 3$). Зафиксируем $\theta \in G$ и определим на A линейное отображение D , задав его на базисе правилом

$$D(e_a) = h_3(a)e_{a+\theta}.$$

Лемма 4. Пусть $r(\bar{h}) = 3$. Отображение D является дифференцированием на A относительно операций (19) и (20) тогда и только тогда, когда $h_1(\theta) = h_2(\theta) = 0$, $h_3(\mu) = 0$, $h_3(\xi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$D(e_a \cdot e_b) = D(e_a) \cdot e_b + e_a \cdot D(e_b) \iff h_3(\xi)e_{a+b+\theta+\xi} = 0 \iff h_3(\xi) = 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} D(\{e_a, e_b\}) &= (h_3(a) + h_3(b) + h_3(\mu))h(a, b)e_{a+b+\mu+\theta}, \\ \{D(e_a), e_b\} &= \{h_3(a)e_{a+\theta}, e_b\} = h_3(a)h(a + \theta, b)e_{a+b+\theta+\mu}, \\ \{e_a, D(e_b)\} &= \{e_a, h_3(b)e_{b+\theta}\} = h_3(b)h(a, b + \theta)e_{a+b+\theta+\mu}, \end{aligned}$$

откуда $h_3(\mu)h(a, b) = \left| \begin{pmatrix} h_1(\theta) & h_3(a)h_1(b) - h_3(b)h_1(a) \\ h_2(\theta) & h_3(a)h_2(b) - h_3(b)h_2(a) \end{pmatrix} \right|$ тогда и только тогда, когда D является дифференцированием операции (20), а первое эквивалентно тому, что

$$\left| \begin{pmatrix} h_1(a) & h_1(b) & -h_1(\theta) \\ h_2(a) & h_2(b) & -h_2(\theta) \\ h_3(a) & h_3(b) & h_3(\mu) \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Таким образом, если $(h_1(\theta), h_2(\theta), h_3(\mu)) \neq 0$, то существуют $a, b \in G$ такие, что последний определитель не равен нулю. $\square$

Для простоты получаемой тернарной алгебры Филиппова необходимо, чтобы алгебра Пуассона была D -простой. Как следует из [4], достаточным условием являются существование в $G \setminus \{\xi\}$ трех элементов ранга 3 и инъективность отображения $\bar{h}$ (G — элементарная абелева p -группа (или группа без кручения)), откуда и следует простота A_D .

В заключение данного параграфа покажем, что предложенная конструкция позволяет получить все известные к настоящему времени простые тернарные алгебры Филиппова, список которых исчерпывается алгебрами $A(h, t)$, $E(h, t, \mathcal{J})$, A_4 (см. [4]). Напомним определение тернарной алгебры $A(h, t)$.

Пусть F — поле, $(G; +)$ — ненулевая абелева группа. Обозначим через $A_G = \langle e_a : a \in G \rangle$ линейное пространство над F . Зафиксируем $t \in G$ и определим на A_G тернарную операцию

$$[e_a, e_b, e_c] = h(a, b, c)e_{a+b+c+t},$$

где $h : G^3 \mapsto F$ — кососимметрическое полилинейное отображение, заданное правилом

$$h(a, b, c) := \begin{vmatrix} h_1(a) & h_1(b) & h_1(c) \\ h_2(a) & h_2(b) & h_2(c) \\ h_3(a) & h_3(b) & h_3(c) \end{vmatrix}$$

для некоторых аддитивных отображений $h_1, h_2, h_3 : G \mapsto F$. Полученную тернарную алгебру Филиппова (см. [4]) обозначим через $\bar{A}(h, t)$. Простые тернарные алгебры Филиппова $A(h, t)$, $E(h, t, \mathcal{J})$, A_4 получаются как подалгебры и фактор-алгебры алгебры $\bar{A}(h, t)$ (см. [4, 5]). Как видно из определения $\bar{A}(h, t)$, данная алгебра выводится из предложенной конструкции алгебры A_D , а алгебра $E(h, t, \mathcal{J})$ аналогично — из конструкции алгебры A_D , когда D — тождественное отображение.

§ 3. Простые супералгебры Филиппова характеристики 2

Из теоремы 2 следует, что по любой супералгебре Пуассона характеристики 2 можно построить тернарную супералгебру Филиппова характеристики 2. Как легко видеть, для простоты полученной тернарной супералгебры Филиппова необходима простота супералгебры Пуассона.

Рассмотрим простую супералгебру Грассмана Γ_n (с единицей 1) от нечетных порождающих $x_1, \dots, x_n$. Скобка Пуассона на Γ_n определяется следующим образом:

$$\{f, g\} := (-1)^f \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Определим на векторном суперпространстве алгебры Γ_n тернарную операцию правилом

$$[f, g, h] := \{f, g\} \cdot h - (-1)^{gh} \{f, h\} \cdot g + f \cdot \{g, h\}.$$

Обозначим полученную тернарную супералгебру над полем F через $A = A_F(\Gamma_n)$.

Теорема 4. Пусть характеристика $A = A_F(\Gamma_n)$ не равна 3 и $n \geq 2$. Тогда A является простой тернарной антикоммутативной супералгеброй. В случае характеристики 3 при $n \geq 3$ алгебра $[A, A, A]$ проста, при $n = 2$ фактор-алгебра $[A, A, A]$ по идеалу $F \cdot 1$ проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I — ненулевой идеал в A . Рассмотрим ненулевой элемент

$$a = \sum_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \in I, \quad \alpha_{i_1 \dots i_k} \in F. \quad (21)$$

Тогда $a = b + c$, где c — произвольное слагаемое максимальной длины из представления (21) элемента a (считаем, что запись элемента несократима и ненулевой моном $x_{i_1} \dots x_{i_d}$ по определению имеет длину d). Пусть $c = x_{i_1} \dots x_{i_m}$, где предполагаем $m \geq 1$, так как целью в настоящий момент является доказательство включения $1 \in I$. Имеем $[1, a, f] \in I$ для любого $f \in A$, т. е. $\{a, f\} \in I$ для любого $f \in \Gamma_n$. Полагая $f = x_{i_1}$, получаем $a_1 + x_{i_2} \dots x_{i_m} \in I$, где все слагаемые из a_1 не содержат x_{i_1} , не совпадают с $x_{i_2} \dots x_{i_m}$ (с точностью до элемента из F) и имеют длину $\leq m - 1$. Продолжая так далее последовательно с $x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, получаем $1 \in I$. Но тогда $[1, f, g] = \{f, g\} \in I$ для любых $f, g \in \Gamma_n$. В частности, $-\{x_i, x_i x_j\} = x_j \in I$ для любого $j = 1, \dots, n$. Тем самым для любого монома $h := x_{i_1} \dots x_{i_k}$ имеем $[x_{i_1}, x_{i_1}, h] = -3h \in I$, откуда $I = A$.

В характеристике 3 имеем $A^{(1)} = [A, A, A] \subsetneq A$, так как иначе должны существовать мономы f, g, h такие, что $f = x_1 f_1$, $g = x_1 g_1$, $h = x_1 h_1$ и $x_1 f_1 g_1 h_1 = x_1 \dots x_n$. Но тогда $[f, g, h] = 3(-1)^{l+1} x_1 f_1 g_1 h_1 = 0$; противоречие. Если $n \geq 3$, то, как и выше,

$$\{x_n x_2, x_n x_1 x_3 \dots x_{n-1}\} = -x_1 \dots x_{n-1} \in I,$$

$$\{x_i, x_1 \dots x_{n-1}\} = \pm x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_{n-1} \in I, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\{x_i, x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_{n-1}\} = \pm x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_{n-1} \in I, \quad 1 \leq i \neq j \leq n-1,$$

и т. д., откуда получаем, что $A^{(1)}$ является простой супералгеброй.

При $n = 2$ в случае поля характеристики 3 имеем $[A, A, A] \subsetneq A$ и $F \cdot 1$ — идеал в $[A, A, A]$, фактор по которому прост. $\square$

Из теорем 2 и 4 непосредственно получаем

Следствие 4. Пусть характеристика $A = A_F(\Gamma_n)$ равна 2 и $n \geq 2$. Тогда A является простой тернарной (супер)алгеброй Филиппова размерности 2^n .

Все известные к настоящему времени простые конечномерные n -арные алгебры Филиппова имеют размерности $n+1, p^n-1, p^n-2, p^{n-1}, p^{n-1}-1$, где p — характеристика основного поля, если поле имеет ненулевую характеристику [4]. Простых нетривиальных (т. е. с нетривиальной нечетной частью) супералгебр Филиппова на данный момент не было известно. Известно, что над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 конечномерных простых нетривиальных супералгебр Филиппова не существует [6]. Таким образом, получен пример новой простой конечномерной тернарной (супер)алгебры Филиппова характеристики 2. При $n = 1$ в $A = A_F(\Gamma_n)$ есть нетривиальный одномерный идеал $I = F \cdot 1$, но фактор-алгебра A/I уже является простой. Тем самым получаем пример новой простой одномерной тернарной супералгебры Филиппова характеристики 2 с тривиальной четной частью. (Если поле произвольно, то супералгебра будет также проста, если характеристика отлична от 3.)

Легко заметить, что тождество (2) на Γ_n при $n \geq 1$ не выполняется, если характеристика основного поля не равна 3. Действительно, достаточно положить $x = y = z = u = x_1$. Также легко видеть, что A (при $n \geq 1$) из теоремы 4 является тернарной простой супералгеброй Филиппова тогда и только тогда, когда характеристика A равна 2.

Используя описание тождеств степени 2 антикоммутативных тернарных алгебр из [7] и пример 2, легко показать, что если A — это свободная алгебра Пуассона, то любое тождество степени 2 тернарной алгебры A_D , где D — тождественное отображение, является следствием антикоммутативности.

Отметим, что основные результаты § 1, 2 докладывались автором на конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Россия, Красноярск, 21–27 июля 2013 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Commun. Algebra. 1998. V. 26, N 2. P. 401–416.
2. Кантор И. Л. Йорданова и лиева супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Тр. второй сибирской школы «Алгебра и анализ». Томск: Томск. гос. ун-т, 1990. С. 89–125.
3. Bai R., Wu Y. Constructing 3-Lie algebras // <http://arxiv.org/pdf/1306.1994.pdf>.
4. Пожидаев А. П. О простых n -лиевых алгебрах // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 334–353.
5. Pojidaev A. P. Enveloping algebras of Filippov algebras // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 2. P. 883–900.
6. Cantarini N., Kac V. G. Classification of simple linearly compact n -Lie superalgebras // Commun. Math. Phys. 2010. V. 298. P. 833–853.
7. Bremner M. Varieties of anticommutative n -ary algebras // J. Algebra. 1997. V. 191, N 1. P. 76–88.

Статья поступила 8 октября 2014 г.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru