

УДК 510.67:512.56

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ И ПОЛНОТА КЛАССА ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ НАД КОММУТАТИВНЫМ МОНОИДОМ И НАД ГРУППОЙ

А. А. Степанова

Аннотация. Изучаются моноиды S , над которыми класс инъективных S -полигонов аксиоматизируем, полон, модельно полон. Доказано, что для коммутативного счетного моноида или счетной группы S аксиоматизируемость класса ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порожденности моноида S . Показано, что не существует нетривиального коммутативного моноида или группы, класс инъективных полигонов над которым полон, модельно полон или категоричен.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.315

Ключевые слова: аксиоматизируемый класс алгебр, полный класс алгебр, модельно полный класс алгебр, категоричный класс алгебр, полигон, инъективный полигон.

1. Введение

Описание моноидов, над которыми некоторый класс полигонов аксиоматизируем, полон, модельно полон, категоричен и др., является одной из стандартных задач теории моделей полигонов. Для классов плоских, проективных и свободных полигонов эта задача решена в [1–3]; для класса регулярных полигонов такое описание получено в [4, 5]. В данной работе эти вопросы рассматриваются для класса инъективных полигонов. А именно, доказано, что для коммутативного счетного моноида или счетной группы S аксиоматизируемость класса ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порожденности моноида S . Показано, что не существует нетривиального коммутативного моноида или группы, класс инъективных полигонов над которым полон, модельно полон или категоричен.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{K}$ — класс алгебраических систем сигнатуры Σ . Класс $\mathcal{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z сигнатуры Σ , что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \models \Phi \quad \text{для всех } \Phi \in Z.$$

При изучении аксиоматизируемости классов будем использовать следующий критерий.

Факт 1 [6]. Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *полной*, если $\Phi \in T$ или $\neg\Phi \in T$ для любого предложения Φ сигнатуры Σ . Алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сигнатуры Σ называются *элементарно эквивалентными* (обозначаем через $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), если для любого предложения Φ сигнатуры Σ

$$\mathcal{A} \models \Phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \Phi.$$

Факт 2 [6]. Непротиворечивая теория T полна тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ для любых моделей $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ теории T .

Подсистема $\mathcal{A}$ алгебраической системы $\mathcal{B}$ сигнатуры Σ называется *элементарной* (обозначается через $\mathcal{A} \prec B$), если для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $b_1, \dots, b_n \in B$

$$\mathcal{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n).$$

Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *модельно полной*, если

$$\mathcal{A} \subseteq B \Rightarrow \mathcal{A} \prec B$$

для любых моделей $\mathcal{A}, B$ теории T сигнатуры Σ .

Через $\mathcal{K}_\infty$ обозначим класс бесконечных алгебраических систем класса $\mathcal{K}$ сигнатуры Σ . Класс $\mathcal{K}$ называется *полным* (*модельно полным*), если теория $\text{Th}(\mathcal{K}_\infty)$ бесконечных алгебраических систем этого класса полна (модельно полна). Класс $\mathcal{K}$ называется *категоричным в мощности κ* , если все алгебраические системы класса $\mathcal{K}$ мощности κ изоморфны.

Факт 3 [6]. Если класс K алгебраических систем сигнатуры Σ категоричен в некоторой бесконечной мощности, то класс K полон.

Разнозначное отображение $f : X \rightarrow B$, где X — конечное подмножество A , называется *конечным частичным изоморфизмом* $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, если для любых $a_1, \dots, a_n \in X$, n -местного символа операции $F \in \Sigma$ и n -местного предикатного символа $P \in \Sigma$ выполняются следующие условия:

$$fF(a_1, \dots, a_n) = F(fa_1, \dots, fa_n);$$

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in P \Leftrightarrow \langle fa_1, \dots, fa_n \rangle \in P.$$

Факт 4 [6]. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ . Для того чтобы алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ были элементарно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \omega$ и любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ существовали непустые множества $F_1(\Sigma_1, n), \dots, F_n(\Sigma_1, n)$ конечных частичных изоморфизмов $\mathcal{A} \upharpoonright \Sigma_1$ в $\mathcal{B} \upharpoonright \Sigma_1$ со следующим свойством:

если $f \in F_i(\Sigma_1, n)$, $1 \leq i < n$, то для любых $a \in A$, $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{i+1}(\Sigma_1, n)$, для которых $a \in \text{dom } g_1$, $b \in \text{rang } g_2$, $f \subseteq g_1$ и $f \subseteq g_2$.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ . Кортежи элементов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ из A и переменных $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ будем обозначать соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$. Вместо $\bar{a} \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$, вместо $a_i = \bar{a}(i)$. Через $l(\bar{a})$ и $l(\bar{x})$ обозначим длины кортежей $\bar{a}$ и $\bar{x}$ соответственно. Будем отличать знаки теоретико-множественного включения $\subset$ и $\subseteq$.

Если $Y \subseteq A$, то наименьшая относительно включения подсистема $\mathcal{B}$ алгебраической системы $\mathcal{A}$, содержащая множество Y , называется *подсистемой* алгебраической системы $\mathcal{A}$, порожденной множеством Y . При этом множество Y называется *порождающим множеством подсистемы $\mathcal{B}$* , а если $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, то — *порождающим множеством алгебраической системы $\mathcal{A}$* . Алгебраическую систему $\mathcal{A}$ будем называть *конечно порожденной*, если существует конечное множество, порождающее $\mathcal{A}$.

Конгруэнция на $\mathcal{A}$ — это отношение эквивалентности ρ на A такое, что для любой n -местной операции $F \in \Sigma$ и любых $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$ из $\langle a_i, a'_i \rangle \in \rho$ для всех $i, 1 \leq i \leq n$, следует $\langle F(a_1, \dots, a_n), F(a'_1, \dots, a'_n) \rangle \in \rho$. Класс конгруэнции ρ с представителем $a \in A$ будем обозначать через a/ρ . Множество всех конгруэнций алгебраической системы $\mathcal{A}$ обозначим через $\text{Con}(\mathcal{A})$. Вместо записи $\langle a, a' \rangle \in \rho$ часто будем использовать запись ara' . Если $X \subseteq A \times A$, то через $\rho(X)$ обозначим наименьшую конгруэнцию на $\mathcal{A}$, содержащую X . Если $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in A$, то вместо записи $\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle \in X$ будем использовать запись $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in X$.

Факт 5 (лемма Мальцева) [7]. Пусть $\mathcal{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ , $X \subseteq A$ и $\rho = \rho(X)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место arb в том и только том случае, когда существуют $m \geq 1$, элементы $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m, \bar{d}'_1, \dots, \bar{d}'_m, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m \in A, l(\bar{d}_i) = l(\bar{d}'_i) = l(\bar{d}), l(\bar{c}_i) = l(\bar{y})$ ($1 \leq i \leq m$) и термы $t_1(\bar{d}, \bar{y}), \dots, t_m(\bar{d}, \bar{y}), t'_1(\bar{d}, \bar{y}), \dots, t'_m(\bar{d}, \bar{y})$ сигнатуры Σ такие, что $\langle \bar{d}_i, \bar{d}'_i \rangle \in X$ или $\langle \bar{d}'_i, \bar{d}_i \rangle \in X$ для любых $i, 1 \leq i \leq m$, и

$$a = t_1(\bar{d}_1, \bar{c}_1), t_i(\bar{d}'_i, \bar{c}_i) = t_{i+1}(\bar{d}_{i+1}, \bar{c}_{i+1}) \quad (1 \leq i < m), \quad t_m(\bar{d}'_m, \bar{c}_m) = b.$$

Пусть S — полугруппа, порожденная множеством X , т. е. каждый элемент полугруппы S может быть представлен в виде слова в алфавите X . При этом могут существовать различные слова ω_1 и ω_2 , представляющие один и тот же элемент. В этом случае равенство $\omega_1 = \omega_2$ называется *соотношением в полугруппе S* . Через $\rho(S, X)$ обозначим бинарное отношение

$$\{\langle u, v \rangle \mid u = v \text{ — соотношение в полугруппе } S\}$$

на множестве S . Ясно, что отношение $\rho(S, X)$ является конгруэнцией полугруппы S . Произвольное подмножество соотношений полугруппы S , порождающее конгруэнцию $\rho(S, X)$, называется *множеством определяющих соотношений полугруппы S* . Полугруппа S называется *конечно определенной*, если существуют конечное множество X , порождающее полугруппу S , и конечное множество определяющих соотношений этой полугруппы.

Факт 6 (теорема Редей) [8]. Конечно порожденная коммутативная полугруппа является конечно определенной полугруппой.

Из теоремы Редей следует

Факт 7 [8]. Каждая конгруэнция свободной коммутативной конечно порожденной полугруппы конечно порождена.

Всюду ниже S будет обозначать моноид, 1 — единица S . Алгебраическая система $\langle A; s \rangle_{s \in S}$ сигнатуры $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется (*левым*) *S -полигоном* (или *полигоном над S* , или *полигоном*), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S, a \in A$. Полигон $\langle A; s \rangle_{s \in S}$ будем обозначать через ${}_S A$. Все рассматриваемые в работе полигоны, если не оговаривается противное, являются левыми S -полигонами. Через $S - \mathcal{A}ct$ обозначается класс всех полигонов

над S . Подсистема ${}_S B$ полигона ${}_S A$ называется *подполигоном* полигона ${}_S A$. Заметим, что полигон ${}_S A$ конечно порожден, если существуют $a_1, \dots, a_n \in A$ такие, что ${}_S A = \bigcup_{i=1}^n {}_S S a_i$. Полигон ${}_S A$ называется *циклическим*, если ${}_S A$ — однопорожденный полигон, т. е. ${}_S A = {}_S S a$ для некоторого $a \in A$. Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_S A$, если существуют $n \in \omega$, $c_i \in A$ ($0 \leq i \leq n$) и $s_j, t_j \in S$ ($1 \leq j \leq n$) такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого i , $1 \leq i \leq n$. Полигон ${}_S A$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. Наибольший по включению связный подполигон полигона ${}_S A$ называется *компонентой связности* полигона ${}_S A$.

Для полигонов факт 5 переформулируется следующим образом.

Факт 8. Пусть ${}_S A$ — левый полигон, $X \subseteq A \times A$ и $\rho = \rho(X)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a \rho b$ в том и только том случае, когда существуют $n \geq 1$, $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \in A$, $s_1, \dots, s_n \in S$ такие, что $\langle p_i, q_i \rangle \in X$ или $\langle q_i, p_i \rangle \in X$ для любых i , $1 \leq i \leq n$, и

$$a = s_1 p_1, s_1 q_1 = s_2 p_2, \dots, s_n q_n = b.$$

Инъективным полигоном называется полигон ${}_S Q$ такой, что для любого гомоморфизма $\iota : {}_S A \rightarrow {}_S B$ и любого гомоморфизма $\varphi : {}_S A \rightarrow {}_S Q$ существует гомоморфизм $\psi : {}_S B \rightarrow {}_S Q$ такой, что $\varphi = \psi \cdot \iota$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} {}_S A & \xrightarrow{\iota} & {}_S B \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ {}_S Q & & \end{array}$$

коммутативна. Класс всех инъективных полигонов обозначим через ${}_S \text{Inj}$. *Нулем полигона* ${}_S A$ называется элемент $\theta \in A$ такой, что $t\theta = \theta$ для любого $t \in S$.

Факт 9 [9]. Всякий инъективный полигон содержит нуль.

Факт 10 [9]. Пусть полигон ${}_S Q$ содержит нуль. Тогда ${}_S Q$ инъективен в том и только том случае, когда для любого циклического полигона ${}_S S a$, любого подполигона ${}_S A$ полигона ${}_S S a$, любого гомоморфизма $\varphi : {}_S A \rightarrow {}_S Q$ существует гомоморфизм $\psi : {}_S S a \rightarrow {}_S Q$ такой, что $\psi \upharpoonright A = \varphi$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} {}_S A & \subseteq & {}_S S a \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ {}_S Q & & \end{array}$$

коммутативна.

Факт 11 [9]. Пусть S — группа. Тогда полигон ${}_S A$ инъективен в том и только том случае, когда в ${}_S A$ существует нуль.

Минимальное инъективное расширение полигона ${}_S A$ называется *инъективной оболочкой* ${}_S A$.

Факт 12 [9]. Всякий полигон имеет инъективную оболочку.

3. Аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом

Теорема 1. Пусть S — счетный коммутативный моноид. Тогда класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем в том и только том случае, когда S — конечно порожденный моноид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО необходимого и достаточного условий теоремы разобьем на ряд лемм.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть S — счетный моноид, $S = \{t_n \mid n \in \omega\}$, $t_0 = 1$, подмоноид S_n моноида S порождается множеством $\{t_0, \dots, t_n\}$, $n \in \omega$. Множество $A_n = \{t_k S_n \cup S_n \mid k \in \omega\}$ является полигоном относительно действия моноида S , определенного следующим образом:

$$t_m(t_k S_n \cup S_n) = (t_m t_k) S_n \cup S_n$$

для любого $m \in \omega$. Зафиксируем $k, n \in \omega$.

Лемма 1. Пусть S — счетный не конечно порожденный моноид, $t_k S_n \cup S_n$ — нуль полигона ${}_S A_n$. Тогда $t_k \notin S_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия леммы выполнены. Предположим, что $t_k \in S_n$. Тогда $t_k S_n \cup S_n = S_n = S_n \cup S_n$. Следовательно, $t_m S_n = S_n$ для любого $m \in \omega$, т. е. моноид S порождается конечным множеством S_n ; противоречие. $\square$

Лемма 2. Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид, $t_k S_n \cup S_n$ — нуль полигона ${}_S A_n$. Тогда $t_k S_n \cup S_n = t_k S \cup S_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия леммы выполнены. Тогда

$$t_m t_k \in t_m t_k S_n \cup S_n = t_k S_n \cup S_n$$

для любого $m \in \omega$. Следовательно, $t_k S \subseteq t_k S_n \cup S_n$ и $t_k S \cup S_n = t_k S_n \cup S_n$. $\square$

Лемма 3. Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид, $m \in \omega$, $m > k > n$, $S_n \subset S_m$ и $t_k S_n \cup S_n$ — нуль полигона ${}_S A_n$. Тогда в полигоне ${}_S A_m$ нет нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует $l \in \omega$ такое, что $r(t_l S_m \cup S_m) = t_l S_m \cup S_m$ для любого $r \in S$. Поскольку $t_k \in S_m$, то $t_k S_n \subseteq t_k S_m \subseteq S_m$ и, используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} S_m &= t_k S_m \cup S_m \supseteq t_k S_n \cup S_m = t_k S_n \cup S_n \cup (S_m \setminus S_n) \\ &= t_k S \cup S_n \cup (S_m \setminus S_n) = t_k S \cup S_m \supseteq S_m. \end{aligned}$$

Следовательно, $S_m = t_k S_m \cup S_m = t_k S \cup S_m$. Тогда

$$\begin{aligned} t_k(t_l S_m \cup S_m) &= t_k(t_l S_m) \cup S_m \subseteq t_k S \cup S_m \\ &= S_m \cup S_m \subseteq t_l S_m \cup S_m = t_k(t_l S_m \cup S_m), \end{aligned}$$

т. е. $S_m = S_m \cup S_m = t_l S_m \cup S_m$, откуда следует $t_l \in S_m$, что противоречит лемме 1. $\square$

Из леммы 3 вытекает существование $k_0 \in \omega$ такого, что в полигоне ${}_S A_m$ нет нулей для любого $m \geq k_0$. Пусть

$${}_S A = \bigsqcup_{i \geq k_0} {}_S A_i.$$

Через ${}_S B$ обозначим инъективную оболочку полигона ${}_S A$, через ${}_S B_1$ — наименьший относительно включения подполигон полигона ${}_S B$ такой, что $A \subseteq B_1$ и любая компонента связности полигона ${}_S B_1$ является компонентой связности полигона ${}_S B$ и пересекается с A по непустому множеству.

Лемма 4. Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид. Тогда в полигоне ${}_S B_1$ нет нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению в полигоне ${}_S A$ нет нулей. Предположим, что θ — нуль полигона ${}_S B_1$. Пусть $b \in A$ такой, что b принадлежит той же компоненте связности полигона ${}_S B_1$, что и θ . Следовательно, существуют элементы $b_0, \dots, b_n \in B_1$, $s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1} \in S$ такие, что $b_0 = b$, $b_n = \theta$ и $s_i b_i = t_i b_{i+1}$ для любого i , $0 \leq i \leq n-1$. Заметим, что

$$s_{n-1} s_{n-2} \dots s_1 s_0 b_0 = t_0 \dots t_{k-1} s_{n-1} \dots s_k b_k$$

для любого k , $0 \leq k \leq n$. Тогда для $k = n$ получаем $s_{n-1} s_{n-2} \dots s_0 b_0 = t_0 \dots t_{n-1} b_n = \theta$. Поскольку $b \in A$, то $\theta \in A$; противоречие. $\square$

Лемма 5. Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид. Тогда ${}_S B = {}_S (B_1 \amalg \{\theta\})$, где θ — нуль полигона ${}_S B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По факту 9 в инъективном полигоне ${}_S B$ есть нуль θ . Достаточно доказать, что ${}_S (B_1 \amalg \{\theta\}) \in {}_S \text{Inj}$. Пусть ${}_S C$ — подполигон циклического полигона ${}_S Sa$, $\varphi : {}_S C \rightarrow {}_S (B_1 \amalg \{\theta\})$ — гомоморфизм полигонов, $\varphi' : {}_S C \rightarrow {}_S B$, $\varphi'(c) = \varphi(c)$ для любого $c \in C$.

Предположим, что $\varphi(C) \subseteq B_1$. Так как ${}_S B \in {}_S \text{Inj}$, существует гомоморфизм $\psi' : {}_S Sa \rightarrow {}_S B$ такой, что $\psi'|_C = \varphi'$. Покажем, что $\psi'(a) \in B_1$. Пусть $c \in C$. Тогда $c = ta$ для некоторого $t \in S$. Из равенств $t\psi'(a) = \psi'(ta) = \psi'(c) = \varphi'(c) \in B_1$ и из полигона ${}_S B_1$ следует, что $\psi'(a) \in B_1$. Таким образом, $\psi'(Sa) \subseteq B_1$ и гомоморфизм $\psi : {}_S Sa \rightarrow {}_S (B_1 \amalg \{\theta\})$ такой, что $\psi(d) = d$ для любого $d \in Sa$, обладает свойством $\psi|_C = \varphi$.

Предположим, что существуют $c, d \in C$ такие, что $\varphi(c) \in B_1$, $\varphi(d) = \theta$. Тогда $c = ta$ и $d = sa$ для некоторых $t, s \in S$. Следовательно,

$$s\psi'(a) = \psi'(sa) = \psi'(d) = \varphi'(d) = \theta, \quad r\psi'(a) = \psi'(ra) = \psi'(c) = \varphi'(c).$$

Это означает, что θ и $\varphi'(c)$ принадлежат одной компоненте связности; противоречие.

Таким образом, по факту 10 ${}_S (B_1 \amalg \{\theta\})$ — инъективный полигон. Поскольку полигон ${}_S B$ является инъективной оболочкой полигона ${}_S A$, то ${}_S B = {}_S (B_1 \amalg \{\theta\})$. $\square$

Лемма 6. Пусть S — счетный коммутативный моноид и класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем. Тогда S — конечно порожденный моноид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что S — не конечно порожденный моноид. Покажем, что ${}_S B_1 \equiv {}_S B$. Пусть T — конечное непустое подмножество S , $n \in \omega$, X — конечное подмножество B , содержащее θ , k — наибольший элемент ω такой, что $A_k \cap X \neq \emptyset$ (если $|X| = 1$, то $k = 0$), $i = \max\{j \mid t_j \in T\}$, $i_0 = \max\{k, i\} + 1$. Определим $\varphi : X \rightarrow B$ следующим образом:

$$\varphi(x) = x, \text{ если } x \neq \theta, \quad \varphi(\theta) = S_{i_0} \cup S_{i_0} \in A_{i_0}.$$

Если $t_m \in T$, то $m \leq i \leq i_0$, $t_m \in S_{i_0}$ и $t_m(S_{i_0} \cup S_{i_0}) = S_{i_0} \cup S_{i_0}$. Следовательно, φ — конечный частичный изоморфизм $\langle B; t \rangle_{t \in T}$ в $\langle B_1; t \rangle_{t \in T}$. Согласно факту 4 ${}_S B_1 \equiv {}_S B$. Так как ${}_S B \in {}_S \text{Inj}$ и класс ${}_S \text{Inj}$ аксиоматизируем, по факту 1 ${}_S B_1 \in {}_S \text{Inj}$. По лемме 4 в ${}_S B_1$ нет нулей, что противоречит факту 9. $\square$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. На множестве $\omega^n = \{\langle m_1, \dots, m_n \rangle \mid m_i \in \omega\}$ определим отношение $\preceq$ следующим образом:

$$\langle m_1, \dots, m_n \rangle \preceq \langle m'_1, \dots, m'_n \rangle \iff \forall i (m_i \leq m'_i).$$

Ясно, что отношение $\preccurlyeq$ является отношением частичного порядка на ω^n . На множестве $K \subseteq \omega^n$ определим свойство

$$\forall \bar{m}, \bar{k} \in \omega^n (\bar{m} \preccurlyeq \bar{k} \text{ и } \bar{m} \in K \implies \bar{k} \in K). \quad (*)$$

Лемма 7. Пусть множество $K \subseteq \omega^n$ обладает свойством (*). Тогда в K существует конечное число минимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n . Пусть $K \subseteq \omega^{n+1}$, k_0 — наименьшее число такое, что $\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \in K$ для некоторых $k_1, \dots, k_n \in \omega$,

$$K' = \{\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in \omega^n \mid \langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \in K\}.$$

Если $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in K'$ и $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \preccurlyeq \langle k'_1, \dots, k'_n \rangle$, то $\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \in K$ и $\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \preccurlyeq \langle k_0, k'_1, \dots, k'_n \rangle$, т. е. $\langle k_0, k'_1, \dots, k'_n \rangle \in K$ и $\langle k'_1, \dots, k'_n \rangle \in K'$. Следовательно, множество K' обладает свойством (*). По предположению индукции в K' существует конечное число p минимальных элементов. Пусть $1 \leq i \leq n$ и l_i — наибольшее число такое, что существует минимальный элемент $\langle k_1, \dots, k_{i-1}, l_i, k_i, \dots, k_n \rangle \in K'$. Заметим, что $\langle l_1, \dots, l_n \rangle \in K'$ и $\langle k_0, l_1, \dots, l_n \rangle \in K$. Пусть $\langle k, k_1, \dots, k_n \rangle$ — минимальный элемент K такой, что $k > k_0$. Если $k_i \geq l_i$ для любого i , $1 \leq i \leq n$, то $\langle k_0, l_1, \dots, l_n \rangle \preccurlyeq \langle k, k_1, \dots, k_n \rangle$, причем $k_0 < k$, что противоречит минимальности элемента $\langle k, k_1, \dots, k_n \rangle$. Следовательно, существует i такое, что $k_i < l_i$. Множество

$$K^i = \{\langle s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle \in \omega^n \mid \langle s_0, \dots, s_{i-1}, k_i, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle \in K\}$$

обладает свойством (*), поэтому по предположению индукции в K^i имеется конечное число p_{k_i} минимальных элементов. Таким образом, число минимальных элементов в K не больше $p + \sum_{i=1}^n \sum_{k < l_i} p_{k_i}$. $\square$

Лемма 8. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда любой подполигон конечно порожденного полигона конечно порожден.

Доказательство. Пусть $\{s_0, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида S , ${}_S B$ — конечно порожденный полигон, ${}_S A$ — подполигон полигона ${}_S B$. Лемму достаточно доказать для случая, когда ${}_S B$ — однопорожденный полигон, т. е. $B = Sb$, где $b \in B$. Через K обозначим множество

$$\{\langle x_0, \dots, x_n \rangle \in \omega^{n+1} \mid s_0^{x_0} \dots s_n^{x_n} b \in A\}.$$

Поскольку для любых $\langle x_0, \dots, x_n \rangle, \langle y_0, \dots, y_n \rangle \in \omega^{n+1}$

$$S s_0^{x_0} \dots s_n^{x_n} b \subseteq S s_0^{y_0} \dots s_n^{y_n} b \iff \langle y_0, \dots, y_n \rangle \preccurlyeq \langle x_0, \dots, x_n \rangle,$$

то K обладает свойством (*). По лемме 7 число минимальных элементов в K конечно. Тогда конечное множество

$$\{s_0^{k_0} \dots s_n^{k_n} b \mid \langle k_0, \dots, k_n \rangle \text{ — минимальный элемент множества } K\}$$

является множеством порождающих элементов полигона ${}_S A$. $\square$

Лемма 9. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда любая конгруэнция полигона ${}_S S$ конечно порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{s_0, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида S , $\theta \in \text{Con}({}_S S)$, $\mathcal{F}$ — свободный коммутативный моноид, порожденный множеством $\{s_0, \dots, s_n\}$. Тогда $S \cong \mathcal{F}/\rho$ для некоторой конгруэнции ρ моноида $\mathcal{F}$. отождествим моноиды S и $\mathcal{F}/\rho$. Определим бинарное отношение η на множестве $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$a\eta b \iff a/\rho\theta b/\rho.$$

Покажем, что η — конгруэнция моноида $\mathcal{F}$. Действительно, если $a, b, a', b' \in \mathcal{F}$, то

$$\begin{aligned} a\eta b \text{ и } a'\eta b' &\iff a/\rho\theta b/\rho \text{ и } a'/\rho\theta b'/\rho \iff aa'/\rho \\ &= a/\rho \cdot a'/\rho\theta a/\rho \cdot b'/\rho = b'/\rho \cdot a/\rho\theta b'/\rho \cdot b/\rho = b'b/\rho \iff aa'\eta bb'. \end{aligned}$$

По факту 7 конгруэнция η моноида $\mathcal{F}$ конечно порождена. Пусть множество $X = \{\langle a_0, b_0 \rangle, \dots, \langle a_m, b_m \rangle\}$ порождает конгруэнцию η моноида $\mathcal{F}$. Покажем, что множество

$$Y = \{\langle a_0/\rho, b_0/\rho \rangle, \dots, \langle a_m/\rho, b_m/\rho \rangle\}$$

порождает конгруэнцию θ полигона ${}_S S$. Пусть $u, v \in \mathcal{F}$ и $u/\rho\theta v/\rho$. Тогда $u\eta v$. Из коммутативности моноида $\mathcal{F}$ и факта 5 следует, что существуют $k \geq 1$, $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{F}$ такие, что $u = c_1 d_1$, $c_i d'_i = c_{i+1} d_{i+1}$ ($1 \leq i < k$), $v = c_k d_k$ и $\langle d_i, d'_i \rangle \in X$ или $\langle d'_i, d_i \rangle \in X$ ($1 \leq i \leq k$). Так как $\langle d_i/\rho, d'_i/\rho \rangle \in Y$ или $\langle d'_i/\rho, d_i/\rho \rangle \in Y$, по факту 8 множество Y порождает конгруэнцию θ полигона ${}_S S$. $\square$

Пусть $\mathcal{K}$ — класс алгебраических систем, $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\bar{b} \in A$. Типом кортежа $\bar{b}$ в алгебраической системе $\mathcal{A}$ называется множество $tp(\bar{b}) = \{\Phi(\bar{x}) \mid l(\bar{x}) = l(\bar{b}), \mathcal{A} \models \Phi(\bar{b})\}$. Множество всех конъюнкций атомарных формул типа $tp(\bar{b})$ кортежа $\bar{b}$ алгебраической системы $\mathcal{A}$ назовем a -типом кортежа $\bar{b}$ алгебраической системы $\mathcal{A}$ и обозначим через $tp^a(\bar{b})$. Если существует формула $\Phi(\bar{x}) \in tp^a(\bar{b})$ сигнатуры Σ такая, что для любой формулы $\Psi(\bar{x}) \in tp^a(\bar{b})$

$$\mathcal{K} \models \forall \bar{x} (\Phi(\bar{x}) \rightarrow \Psi(\bar{x})),$$

то a -тип $tp^a(\bar{b})$ кортежа $\bar{b}$ в алгебраической системе $\mathcal{A}$ называется *главным a -типом* кортежа $\bar{b}$ в классе $\mathcal{K}$. При этом формула $\Phi(\bar{x})$ называется *главной формулой a -типа* $tp^a(\bar{b})$.

Лемма 10. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда для любого кортежа $\bar{a} \in S$ a -тип $tp^a(\bar{a})$ является главным a -типом кортежа $\bar{a}$ в классе $S - \mathcal{A}ct$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. По теореме Редери моноид S изоморфен фактор-моноиду свободного конечно порожденного коммутативного моноида $\mathcal{F}$ по конечно порожденной конгруэнции ρ . Можно считать, что $S = \mathcal{F}/\rho$. Пусть $\{s_1, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида $\mathcal{F}$, $\langle t_1, g_1 \rangle, \dots, \langle t_m, g_m \rangle$ — множество порождающих элементов конгруэнции ρ , $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_l \rangle \in \mathcal{F}$. Если $d \in \mathcal{F}$, то d/ρ обозначим через $\tilde{d}$. Пусть $T = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \mathcal{F} \tilde{a}_i$, где $\mathcal{F} \tilde{a}_i = \{fb \mid f \in \mathcal{F}, b \in \tilde{a}_i\}$. По лемме 8

подполигон $\mathcal{F}T$ полигона $\mathcal{F}\mathcal{F}$ конечно порожден. Пусть $\{b_1, \dots, b_r\}$ — множество порождающих элементов полигона $\mathcal{F}T$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, r\}$ существует $h_i \in \{1, \dots, l\}$ и $f_i \in \mathcal{F}$ такие, что $b_i = f_i a_{h_i}$. Для $i, j \in \{1, \dots, r\}$ и $k \in \{1, \dots, m\}$ выберем слово $d_k^{ij} \in \mathcal{F}$ минимальной длины такое, что

$$d_k^{ij} t_k = t_k^{ij} b_i, \quad d_k^{ij} g_k = g_k^{ij} b_j$$

для некоторых $t_k^{ij}, g_k^{ij} \in \mathcal{F}$. Для $i, j \in \{1, \dots, l\}$ выберем слова $a^{ij} \in \mathcal{F}$ минимальной длины такие, что

$$a^{ij} a_i = a^{ji} a_j.$$

Введем обозначения: $\tilde{a} = \langle \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_l \rangle$,

$$\Psi_{ij} \Leftarrow a^{ij} x_i = a^{ji} x_j, \quad \Phi_{ijk} \Leftarrow \tilde{t}_k^{ij} \tilde{f}_i x_{h_i} = \tilde{g}_k^{ij} \tilde{f}_j x_{h_j},$$

$$\Phi \Leftarrow \bigwedge_{1 \leq i, j \leq l} \bigwedge_{1 \leq k \leq m} \Phi_{ijk} \wedge \bigwedge_{1 \leq i, j \leq l} \Psi_{ij}.$$

Предположим, что $ca_i = da_j$ для некоторых $c, d \in \mathcal{F}$, $i, j \in \{1, \dots, l\}$. Тогда $c = wa^{ij}$, $d = wa^{ji}$ для некоторого $w \in \mathcal{F}$ и

$$S - \mathcal{Act} \models \Psi_{ij} \rightarrow cx_i = dx_j.$$

Докажем, что Φ — главная формула a -типа $tp^a(\tilde{a})$. Пусть $u, v \in \mathcal{F}$, $\tilde{u}x_i = \tilde{v}x_j$ — атомарная формула a -типа $tp^a(\tilde{a})$. Покажем, что

$$S - \mathcal{Act} \models \Phi \rightarrow \tilde{u}x_i = \tilde{v}x_j. \quad (1)$$

Так как $\tilde{u}\tilde{a}_i = \tilde{v}\tilde{a}_j$, существуют $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_s \in \mathcal{F}$, $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\}$, такие, что имеют место равенства

$$ua_i = w_1 t_{i_1}, \quad va_j = w_s g_{i_s}, \quad w_k g_{i_k} = w_{k+1} t_{i_{k+1}} \quad (1 \leq k < s).$$

Пусть $k \in \{1, \dots, s\}$. Поскольку $\tilde{w}_k \tilde{t}_{i_k} = \tilde{w}_k \tilde{g}_{i_k} = \tilde{u}\tilde{a}_i$, то $w_k g_{i_k}, w_k t_{i_k} \in T$, $w_k g_{i_k} = w'_k b_{m_k}$ и $w_k t_{i_k} = w''_k b_{n_k}$ для некоторых $w'_k, w''_{k+1} \in \mathcal{F}$ и $m_k, n_k \in \{1, \dots, r\}$. Тогда $w_k = d'_k d_{i_k}^{n_k m_k}$, $w'_k = d'_k t_{i_k}^{n_k m_k}$, $w'_k = d'_k g_{i_k}^{n_k m_k}$ для некоторого $d'_k \in \mathcal{F}$. Следовательно,

$$S - \mathcal{Act} \models \Phi_{n_k m_k i_k} \rightarrow \tilde{w}_k'' \tilde{f}_{n_k} x_{h_{n_k}} = \tilde{w}_k' \tilde{f}_{m_k} x_{h_{m_k}}.$$

Так как $ua_i = w'_1 b_{n_1} = w''_1 f_{n_1} a_{h_{n_1}}$ и $va_j = w'_s b_{m_s} = w'_s f_{m_s} a_{h_{m_s}}$, то

$$S - \mathcal{Act} \models \tilde{u}x_i = \tilde{w}_1'' \tilde{f}_{n_1} x_{h_{n_1}}, \quad S - \mathcal{Act} \models \tilde{v}x_j = \tilde{w}_s' \tilde{f}_{m_s} x_{h_{m_s}}.$$

Поскольку

$$w'_k f_{m_k} a_{h_{m_k}} = w'_k b_{m_k} = w_k g_{i_k} = w_{k+1} t_{i_{k+1}} = w''_{k+1} b_{n_{k+1}} = w''_{k+1} f_{n_{k+1}} a_{h_{n_{k+1}}},$$

то

$$S - \mathcal{Act} \models w'_k f_{m_k} x_{h_{m_k}} = w''_{k+1} f_{n_{k+1}} x_{h_{n_{k+1}}}.$$

Таким образом, (1) доказано. $\square$

Лемма 11. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид, $\bar{a} \in S$ и $\theta \in \text{Con}(S)$. Тогда a -тип $tp^a(\bar{a}/\theta)$ является главным a -типом кортежа $\bar{a}/\theta$ в классе $S - \mathcal{Act}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_m \rangle \in S$ и $\theta \in \text{Con}(S)$. По лемме 10 a -тип $\bar{a}$ является главным a -типом кортежа $\bar{a}$ в классе $S - \mathcal{Act}$. Пусть $\Psi(\bar{x})$ — главная формула a -типа $\bar{a}$, $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$. Через ${}_S T$ обозначим полигон ${}_S(Sa_0 \cup \dots \cup Sa_m)$, через η — конгруэнцию на полигоне ${}_S S$ такую, что $\eta \upharpoonright T = \theta \upharpoonright T$ и $s/\eta = \{s\}$ для любого $s \in S \setminus T$. По лемме 9 конгруэнция η конечно порождена. Пусть $\langle b_0, c_0 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle$ — порождающие конгруэнции η , $b_i = t_i a_{u_i}$, $c_i = s_i a_{v_i}$, где $t_i, s_i \in S$, $u_i, v_i \in \{0, \dots, m\}$ ($0 \leq i \leq n$).

Покажем, что формула

$$\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=0}^n t_i x_{u_i} = s_i x_{v_i} \wedge \Psi(\bar{x})$$

является главной формулой a -типа $tp^a(\bar{a}/\theta)$. Пусть $s x_i = t x_j \in tp^a(\bar{a}/\theta)$. Тогда $s a_i \theta t a_j$. Так как $s a_i, t a_j \in T$, то $s a_i \eta t a_j$. По факту 8 существуют $k \in \omega$, $r_0, \dots, r_k \in S$, $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ такие, что

$$s a_i = r_0 b_{i_0}, \quad r_k c_{i_k} = t a_j, \quad r_l c_{i_l} = r_{l+1} b_{i_{l+1}} \quad (0 \leq l < k).$$

Поскольку $\Psi(\bar{x})$ — главная формула a -типа $tp^a(\bar{a})$ и

$$s x_i = r_0 t_{i_0} x_{u_{i_0}}, \quad r_k s_{v_k} x_{v_{i_k}} = t x_j, \quad r_l s_{i_l} x_{v_{i_l}} = r_{l+1} t_{i_{l+1}} x_{u_{i_{l+1}}} \in tp^a(\bar{a})$$

для любого l , $0 \leq l < k$, то

$$\begin{aligned} S - \mathcal{Act} \models \Psi(\bar{x}) \rightarrow s x_i &= r_0 t_{i_0} x_{u_{i_0}} \wedge r_k s_{i_k} x_{v_{i_k}} \\ &= t x_j \wedge \bigwedge_{0 \leq l < k} r_l s_{i_l} x_{v_{i_l}} = r_{l+1} t_{i_{l+1}} x_{u_{i_{l+1}}}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$S - \mathcal{Act} \models t_{i_l} x_{u_{i_l}} = s_{i_l} x_{u_{i_l}} \rightarrow r_l t_{i_l} x_{u_{i_l}} = r_l s_{i_l} x_{u_{i_l}}$$

для любого l , $0 \leq l \leq k$. Таким образом,

$$S - \mathcal{Act} \models \Psi(\bar{x}) \rightarrow s x_i = t x_j$$

и $tp^a(\bar{a}/\theta)$ является главным a -типом кортежа $\bar{a}/\theta$ в классе $S - \mathcal{Act}$. $\square$

Лемма 12. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{s_0, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида S , $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_m \rangle \in S$, $\theta \in \text{Con}(S)$. По лемме 11 a -типы $tp^a(1/\theta)$ элемента $1/\theta$ и $tp^a(\bar{a}/\theta)$ кортежа $\bar{a}/\theta = \langle a_0/\theta, \dots, a_m/\theta \rangle$ являются главными a -типами в классе $\mathcal{Act}$. Пусть $\Phi^\theta(x)$ — главная формула a -типа $tp^a(1/\theta)$, $\Phi_a^\theta(\bar{x})$ — главная формула a -типа $tp^a(\bar{a}/\theta)$, где $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$. Положим

$$\begin{aligned} \Sigma = & \left\{ \exists x \bigwedge_{i=0}^n (s_i \cdot x = x) \right\} \cup \left\{ \forall x_0 \dots \forall x_m \left(\Phi_a^\theta(x_0, \dots, x_m) \right. \right. \\ & \left. \left. \rightarrow \exists y \left(\Phi^\theta(y) \wedge \bigwedge_{i=0}^m x_i = a_i y \right) \right) \mid \theta \in \text{Con}(S), a_0, \dots, a_m \in S \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что Σ — множество аксиом класса ${}_S \text{Inj}$.

Пусть ${}_S Q$ — инъективный полигон. Покажем, что все формулы из Σ истинны в ${}_S Q$. По факту 9 в ${}_S Q$ есть нуль. Поэтому ${}_S Q \models \exists x \bigwedge_{i=0}^n (s_i \cdot x = x)$. Пусть $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_m \rangle \in S$, $\theta \in \text{Con}({}_S S)$, $\bar{x}^0 = \langle x_0^0, \dots, x_m^0 \rangle \in Q$. Предположим, что ${}_S Q \models \Phi_a^\theta(\bar{x}^0)$. Через ${}_S A$ обозначим подполигон полигона ${}_S S/\theta$, порожденный множеством $\{a_0/\theta, \dots, a_m/\theta\}$. Определим отображение $\varphi : {}_S A \rightarrow {}_S Q$ следующим образом:

$$\varphi(ta_i/\theta) = tx_i^0 \quad (0 \leq i \leq m)$$

для любого $t \in S$. Предположим, что $ta_i/\theta = ra_j/\theta$ для некоторых $t, r \in S$ ($0 \leq i \leq j \leq m$). Тогда $(tx_i = rx_j) \in tp^a(\bar{a}/\theta)$. Поскольку $\Phi_a^\theta(\bar{x})$ — главная формула a -типа $tp^a(\bar{a}/\theta)$, имеем

$${}_S S/\theta \models \forall \bar{x} (\Phi_a^\theta(\bar{x}) \rightarrow tx_i = rx_j).$$

Так как ${}_S Q \models \Phi_a^\theta(\bar{x}^0)$, то $tx_i^0 = tx_j^0$. Следовательно, отображение φ является гомоморфизмом полигонов. Поскольку ${}_S Q \in {}_S \text{Inj}$ и ${}_S A \subseteq {}_S S/\theta$, существует гомоморфизм $\psi : {}_S S/\theta \rightarrow {}_S Q$ такой, что $\psi|_A = \varphi$. Пусть $\psi(1/\theta) = y^0$. Так как

$${}_S S/\theta \models \Phi^\theta(1/\theta) \wedge \bigwedge_{i=0}^m a_i/\theta = a_i \cdot 1/\theta,$$

то

$${}_S Q \models \Phi^\theta(y^0) \wedge \bigwedge_{i=0}^m x_i^0 = a_i y^0.$$

Таким образом, в полигоне ${}_S Q$ истинны все формулы из Σ .

Пусть ${}_S Q$ — полигон, в котором истинны все формулы из Σ . Покажем, что ${}_S Q \in {}_S \text{Inj}$. Предположим, что ${}_S A$ — подполигон циклического полигона ${}_S C$ и отображение $\varphi : {}_S A \rightarrow {}_S Q$ является гомоморфизмом полигонов. Тогда существует $\theta \in \text{Con}({}_S S)$ такая, что ${}_S C \cong {}_S S/\theta$. Можно считать, что ${}_S A$ — подполигон полигона ${}_S S/\theta$. Так как полигон ${}_S C$ конечно порожден, по лемме 8 ${}_S A$ — конечно порожденный полигон. Пусть $\bar{a}/\theta = \{a_0/\theta, \dots, a_m/\theta\} \in S/\theta$ — множество порождающих элементов полигона ${}_S A$. Тогда ${}_S A \models \Phi_a^\theta(\bar{a}/\theta)$ и ${}_S Q \models \Phi_a^\theta(\bar{x}^0)$, где $\bar{x}^0 = \langle x_0^0, \dots, x_m^0 \rangle$, $x_i^0 = \varphi(a_i/\theta)$ ($0 \leq i \leq m$). Стало быть,

$${}_S Q \models \Phi^\theta(y^0) \wedge \bigwedge_{i=0}^m x_i^0 = a_i y^0$$

для некоторого $y^0 \in Q$. Определим отображение $\psi : S/\theta \rightarrow Q$ следующим образом:

$$\psi(r/\theta) = ry^0$$

для любого $r \in S$. Пусть $r/\theta = t/\theta$. Тогда $rx = tx \in tp(1/\theta)$. Так как ${}_S Q \models \Phi^\theta(y^0)$ и ${}_S Q \models \forall y (\Phi^\theta(y) \rightarrow rx = tx)$, то $ry^0 = ty^0$. Значит, ψ — гомоморфизм полигонов. Из равенств

$$\psi(a_i/\theta) = a_i y^0 = x_i^0 = \varphi(a_i/\theta)$$

следует, что $\psi|_A = \varphi$. Таким образом, по факту 10 ${}_S Q \in {}_S \text{Inj}$. $\square$

Из лемм 6 и 12 следует теорема 1.

4. Аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над группой

Теорема 2. Пусть S — счетная группа. Класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда S является конечно порожденной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем и группа $S = \{s_k \mid k \in \omega\}$ не конечно порожденная. Индукцией по n построим подгруппы T_n группы S . Подгруппа T_0 группы S порождается множеством $\{s_0\}$. Подгруппа T_n группы S порождается множеством $T_{n-1} \cup \{s_k\}$, где k — наименьшее натуральное число такое, что $s_k \notin T_{n-1}$. Поскольку S не является конечно порожденной группой, то $T_i \subset T_{i+1}$ для любого $i \in \omega$. Кроме того, $\bigcup_{i \in \omega} T_i = S$. Пусть $A_i = \{sT_i \mid s \in S\}$ — множество левых классов смежности группы S по подгруппе T_i . Определим действие моноида S на множестве A_i следующим образом:

$$t(sT_i) = (ts)T_i$$

для любого $t \in S$. Тогда ${}_S A_i$ — полигон. Через ${}_S A$ обозначим полигон $\coprod_{i \in \omega} {}_S A_i$, через ${}_S Q$ — полигон ${}_S(A \coprod \{\theta\})$, где θ — нуль полигона ${}_S Q$.

Поскольку S — группа, в циклическом полигоне нет собственных подполигонов. По факту 10 отсюда следует, что ${}_S Q \in {}_S \text{Inj}$.

Пусть $k \in \omega$. Так как $s_0, \dots, s_k \in T_k$ и $T_k \in A$, то $s_i T_k = T_k$ для любого i , $0 \leq i \leq k$, и

$${}_S A \models \exists x \left(\bigwedge_{i=0}^k s_i x = x \right).$$

Следовательно, по факту 4 ${}_S Q \equiv_S A$, и в силу аксиоматизируемости класса ${}_S \text{Inj}$ по факту 1 ${}_S A \in {}_S \text{Inj}$. По факту 9 в полигоне ${}_S A$ есть нуль, что не так; противоречие.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть S — счетная конечно порожденная группа, $s_0, \dots, s_n$ — множество порождающих элементов группы S . Из факта 11 следует, что $\left\{ \exists x \left(\bigwedge_{i=0}^n s_i x = x \right) \right\}$ — множество аксиом класса ${}_S \text{Inj}$. $\square$

5. Полнота и модельная полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой

Теорема 3. Пусть S — коммутативный моноид или группа. Следующие условия эквивалентны:

- (1) класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов полон;
- (2) класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов модельно полон;
- (3) класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов категоричен в некоторой бесконечной мощности;
- (4) $S = \{1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $S = \{1\}$, то класс S — $\mathcal{A}ct$ всех полигонов, в частности, класс ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов полон, модельно полон и категоричен.

(3) $\Rightarrow$ (1) следует из факта 3.

(1) $\Rightarrow$ (4) и (2) $\Rightarrow$ (4). Пусть класс ${}_S \text{Inj}$ полон (модельно полон). Заметим, что $Ss \cap St \neq \emptyset$ для любых $s, t \in S$. Действительно, если S — коммутативный моноид, то $st = ts \in Ss \cap St$; если S — группа, то $Ss = St$.

Покажем, что полигон ${}_S Q$, каждый элемент которого является нулем, инъективен. Предположим, что $\varphi : {}_S B \rightarrow {}_S Q$ — гомоморфизм полигонов, ${}_S B$ — подполигон циклического полигона ${}_S Sa$ и $b_1, b_2 \in B$. Тогда $b_1 = t_1 a$ и $b_2 = t_2 a$ для некоторых $t_1, t_2 \in S$. Поскольку $St_1 \cap St_2 \neq \emptyset$, то $s_1 t_1 = s_2 t_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. Тогда $\varphi(s_1 b_1) = \varphi(s_2 b_2)$, т. е. $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$ и $\varphi(B)$ — нуль полигона ${}_S Q$. Полагаем $\psi(Sa) = \varphi(B)$. Таким образом, по факту 10 ${}_S Q \in {}_S \text{Inj}$.

Покажем, что $S = \{1\}$. Пусть $s \in S$, $s \neq 1$, ${}_S Q$ — бесконечный полигон, каждый элемент которого является нулем, ${}_S A = {}_S S \sqcup {}_S Q$, ${}_S \bar{A}$ — инъективная оболочка полигона ${}_S A$. Тогда ${}_S Q$ — подполигон ${}_S \bar{A}$. Поскольку ${}_S Q \in {}_S \text{Inj}$, в силу полноты (модельной полноты) класса ${}_S \text{Inj}$ инъективных полигонов ${}_S Q \equiv {}_S \bar{A}$. Заметим, что ${}_S Q \models \Phi_t$ для любого $t \in S$, где $\Phi_t \Leftarrow \forall x(tx = x)$. Следовательно, ${}_S \bar{A} \models \Phi_t$ для любого $t \in S$, т. е. все элементы полигона ${}_S \bar{A}$ являются нулями, в частности, элемент $1 \in \bar{A}$. Это означает, что $S = \{1\}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоулд В., Михалев А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S -полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 63–110.
2. Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S -полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т. 30, № 5. С. 583–594.
3. Gould V. Axiomatisability problems for S -systems // J. London Math. Soc. 1987. V. 35. P. 193–201.
4. Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 107–157.
5. Степанова А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 181–193.
6. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
8. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.
9. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 2000.

Статья поступила 15 сентября 2014 г.

Степанова Алена Андреевна
Дальневосточный федеральный университет,
Школа естественных наук,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
stepltd@mail.ru