Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 515:17+517:545

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА С МАТРИЧНЫМИ ХАРАКТЕРАМИ НА КОНЕЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

О. А. Чуешева

Аннотация. Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для скалярных характеров на компактной римановой поверхности нашла приложения в теории функций, аналитической теории чисел и математической физике.

Построены матричные мультипликативные функции и m-дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности для заданного матричного характера со значениями в $GL(n, \mathbb{C})$ начиная с мероморфной функции на единичном диске с конечным множеством полюсов. Показано, что эти мультипликативные функции и m-дифференциалы Прима локально голоморфно зависят от матричного характера.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.318

Ключевые слова: дифференциалы Прима для матричного характера, конечная риманова поверхность, тэта-ряд Пуанкаре.

Введение

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и уравнениях математической физики [1–4].

В [4] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для общих (одномерных) характеров. В [5–7] изучались векторные мультипликативные функции для матричных характеров на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ и на торе ($g = 1$). Теория функций на компактных римановых поверхностях существенно отличается от теории функций на конечных римановых поверхностях даже для класса однозначных мероморфных функций и абелевых дифференциалов [8–11]. Ряд основных пространств функций и дифференциалов на конечной римановой поверхности F типа (g, l), $g \geq 1$, $l > 0$, будут бесконечномерны.

В [6, 7] доказано существование матричных мультипликативных функций и дифференциалов Прима для любого матричного характера на компактной римановой поверхности рода $g > 1$. В настоящей работе будет дано доказательство этого результата для конечной римановой поверхности F типа (g, l), $g \geq 1$,

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

$l \geq 1$. Кроме того, будет доказано существование таких функций и дифференциалов без условия регулярности функции, определяющей матричный тэта-ряд Пуанкаре, на границе круга. При этом доказывается, что такие функции и дифференциалы локально голоморфно зависят от матричных характеров.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\widetilde{F}$ — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(\widetilde{F})$. Зафиксируем различные точки $P_1, \dots, P_l \in \widetilde{F}$. Пусть $F = \widetilde{F} \backslash \{P_1, \dots, P_l\}$ — поверхность типа (g, l), $l \geq 1$, $g \geq 2$, и Γ — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и униформизирующая поверхность F, т. е. $F = U/\Gamma$, которая имеет алгебраическое представление $\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_l \ : \ \prod\limits_{j=1}^{g} [A_j, B_j] C_1 \dots C_l = I \right\rangle$, где $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ для $A, B \in \Gamma$, а I — тождественное отображение. Здесь A_j, B_j, $j = 1, \dots, g$, — гиперболические, а $C_1, \dots, C_l$ — параболические элементы [2, 8].

Универсальное накрытие $\widehat{F}$ для конечной римановой поверхности F типа (g, l), $g \geq 1$, $l \geq 1$, снабженное комплексно-аналитической структурой, поднятой с F так, чтобы естественная проекция $\hat{\pi} : \widehat{F} \to F$ была голоморфна, будет конформно эквивалентно кругу $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. На U вводим метрику Пуанкаре $ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$, где $\lambda(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ называется *плотностью метрики Пуанкаре.* Для нее верно соотношение $\lambda(Az)|A'(z)| = \lambda(z), z \in U$, где A — дробно-линейное отображение. Если $\Delta \ni z = x + iy \longrightarrow \zeta = u + iv = A(z) \in A(\Delta)$, то $\lambda^2(z)\, dxdy = \lambda^2(\zeta)\, dudv$, т. е. не евклидовы площади инвариантны при дробно-линейных отображениях круга U на себя [8].

Пусть $q \in \mathbb{Z}$. *Мероморфным q-дифференциалом* ω на конечной римановой поверхности F называется закон, сопоставляющий каждой локальной координате z на F мероморфную функцию $f(z)$ такую, что выражение $f(z)\, dz^q$ будет инвариантно относительно замен локального параметра z на F. Для $q = 1$ такие дифференциалы называются *абелевыми* [2, 8].

Определение 1.1. *Характером* ρ на фундаментальной группе $\pi_1(F)$ для конечной римановой поверхности F называется гомоморфизм из $\pi_1(F)$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть F имеет тип (g, l). Положим $\{N_1, \dots, N_{2g+l}\} = \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_l\}$ (как равенство упорядоченных наборов). Тогда ρ единственно определяется по своим значениям $\rho(N_1), \dots, \rho(N_{2g+l-1})$ на образующих. Поэтому абелева группа $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathbb{C}^*)$ всех характеров изоморфна группе $[\mathbb{C}^*]^{2g+l-1}$, где изоморфизм задается отображением $\rho \to (\rho(N_1), \dots, \rho(N_{2g+l-1}))$, которое также задает топологию и глобальную комплексно аналитическую структуру на группе характеров. В последней группе строки умножаются покоординатно, а произведение двух характеров ρ_1, ρ_2 в $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathbb{C}^*)$ определено по правилу $(\rho_1 \cdot \rho_2)(a) = \rho_1(a) \cdot \rho_2(a)$, $a \in \pi_1(F)$.

Определение 1.2. *Мультипликативной функцией* на конечной римановой поверхности F для характера ρ назовем мероморфную функцию f на U такую, что

$$f(Tz)\rho(T) = f(z), \quad z \in U, \ T \in \Gamma,$$

где Γ — фуксова группа первого рода на U, которая униформизирует поверхность F в круге U.

Каждый дифференциал $\varphi(z)\,dz^q$ на F можно записать в виде $\varphi = \varphi_1(z)\,dz^q$, где $\varphi_1(z)$ — измеримая в круге U функция, удовлетворяющая соотношению

$$\varphi_1(Az)(A'(z))^q(z) = \varphi_1(z), \quad A \in \Gamma,$$

т. е. это автоморфная форма веса $(-2q)$ на U, относительно группы Γ. При этом голоморфным (мероморфным) дифференциалам на F соответствуют голоморфные (мероморфные) формы на U [8].

Рассмотрим голоморфную в U функцию $\Phi(z)$ такую, что

$$\iint\limits_U |\Phi(z)|\,dxdy < \infty, \quad z = x + iy, \tag{1}$$

и составим тэта-ряд Пуанкаре

$$(\Theta_q\Phi)(z) = \sum_{A\in\Gamma} \Phi(Az)(A'(z))^q(z), \quad q \geq 2.$$

Лемма 1.1 [8]. *Для любой голоморфной функции $\Phi(z)$ на U с условием, что $\iint\limits_U |\Phi(z)|\,dxdy < \infty$, тэта-ряд Пуанкаре $(\Theta_q\Phi)(z)\,dz^q$ будет голоморфным q-дифференциалом на $F = U/\Gamma$ типа (g,l) при любом $q \geq 2$, $g \geq 1$, $l \geq 1$.*

Замечание 1.1. Если $\Phi(z)$ имеет в U конечное число полюсов, то после удаления их из круга U вместе с достаточно малыми окрестностями функция $\Phi(z)$ абсолютно интегрируема по оставшейся области. Тогда, как в доказательстве леммы 1.1, получим, что $(\Theta_q\Phi)(z)$ будет мероморфной автоморфной формой веса $(-2q)$ на U относительно группы Γ. Кроме того, для фиксированного $q > 2$ вместо условия (1) достаточно выполнения более слабого условия [8]

$$\iint\limits_U (1 - |z|^2)^{q-2}|\Phi(z)|\,dxdy < \infty.$$

§ 2. Матричные характеры на фуксовой группе

Определение 2.1. *Матричный характер* $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ — гомоморфизм из Γ в $GL(n, \mathbb{C})$, где $GL(n, \mathbb{C})$ — группа всех невырожденных квадратных матриц порядка n с комплексными коэффициентами.

Для матрицы $M = (\alpha_{i,j})$, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i,j = 1,\dots,n$, с комплексными коэффициентами величина $\|M\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|^2\right)^{1/2}$ будет нормой матрицы M. Она имеет следующие свойства:

1) $|\alpha_{ij}| \leq \|M\|$,
2) $\|M_1 + M_2\| \leq \|M_1\| + \|M_2\|$,
3) $\|M_1 \cdot M_2\| \leq \|M_1\| \cdot \|M_2\|$,
4) $\|aM\| = |a| \cdot \|M\|$, $a \in \mathbb{C}$.

Определение 2.2. *Матричным m-дифференциалом Прима* на U относительно фуксовой группы Γ для ρ называется матричнозначный дифференциал $\omega(z)\,dz^m$ такой, что

$$\omega(Tz)\rho(T)(dTz)^m = \omega(z)\,dz^m, \quad z \in U,\ T \in \Gamma,\ \rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C}).$$

В частности, при $m = 0$ это мультипликативная матричнозначная функция относительно Γ для ρ.

Напомним, что дробно-линейное (мёбиусово) отображение единичного круга на себя имеет вид $T(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, где $|z_0| < 1$, α — вещественное число. Такие отображения являются изометриями в круге относительно метрики Пуанкаре $ds = \frac{|dz|}{1-|z_0|^2}$. Обозначим через $d(a, b)$ неевклидово расстояние между точками a и b из круга U [2].

Положим $\{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_l\} = \{T_1, \dots, T_{2g+l}\}$. Это равенство понимаем как равенство упорядоченных наборов. Элементами группы Γ являются слова в образующих следующего вида:

$$W(T_1, T_2, \dots, T_{2g+l}) = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot T_{i_r}^{\pm 1}.$$

Наименьшее натуральное число r назовем *длиной* этого слова после всех возможных сокращений в этой группе, учитывая определяющее соотношение.

Лемма 2.1 [6]. *Для фуксовой группы Γ первого рода с образующими $T_1, T_2, \dots, T_{2g+l}$, которая униформизирует в круге U конечную риманову поверхность $F = U/\Gamma$ типа (g, l), $g \geq 1$, $l \geq 1$, для любого*

$$W = W(T_1, T_2, \dots, T_{2g+l}) = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$$

из Γ верно неравенство

$$r \leq \lambda d(z, W(z)) + \mu$$

для любого z из U, где λ и μ — положительные числа, не зависящие от W и z.

Обозначим $\overline{U}(z_1, \varepsilon) = \{z \in U : d(z_1, z) \leq \varepsilon\}$ и $\overline{U}(\rho_0, \delta) = \{\rho : |\rho - \rho_0| \leq \delta\}$, где $|\rho - \rho_0| = \max\limits_{1 \leq j \leq 2g+l} \|\rho(T_j^{\pm 1}) - \rho_0(T_j^{\pm 1})\|$.

Предложение 2.1. *Пусть $\rho_0 : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ — произвольный матричный характер для фуксовой группы Γ. Тогда для любой точки z_1 на U и числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$, $\lambda_1 < 0$, не зависящие от z_1 и ε, и число $c_1 > 0$, зависящее от z_1, ε и ρ_0, такие, что для любых характеров ρ, $|\rho - \rho_0| \leq \delta$, $z \in \overline{U}(z_1, \varepsilon)$ и $T \in \Gamma$ верно неравенство*

$$\|\rho(T)\| \leq c_1 \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{\lambda_1}.$$

Доказательство. Пусть $T_1, \dots, T_{2g+l}$ — множество образующих для фуксовой группы Γ первого рода. Положим $\max\limits_{i=1,\dots,2g+l}(\|\rho_0(T_i)^{\pm 1}\|) = e^{\tilde{\lambda}_2(\rho_0)} \geq 1$, т. е. $\tilde{\lambda}_2(\rho_0) \geq 0$.

Для любого $T_j^{\pm 1}$, $j = 1, \dots, 2g + l$, имеем неравенство

$$\|\rho(T_j^{\pm 1})\| \leq \|\rho_0(T_j^{\pm 1})\| + \|\rho(T_j^{\pm 1}) - \rho_0(T_j^{\pm 1})\| \leq e^{\tilde{\lambda}_2(\rho_0)} + \delta \leq 2e^{\tilde{\lambda}_2(\rho_0)} = e^{\lambda_2(\rho_0)}$$

при $0 < \delta < 1 \leq e^{\tilde{\lambda}_2(\rho_0)}$. По лемме 2.1 для любых $T \in \Gamma$, $T = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$, $z \in U$ верно неравенство $r \leq \lambda d(z, T(z)) + \mu$. Поэтому $\rho(T) = \rho(T_{i_1}^{\pm 1}) \cdot \ldots \cdot \rho(T_{i_r}^{\pm 1})$ и

$$\|\rho(T)\| \leq \|\rho(T_{i_1}^{\pm 1})\| \cdot \ldots \cdot \|\rho(T_{i_r}^{\pm 1})\| \leq (e^{\lambda_2(\rho_0)})^r \leq e^{\lambda_2(\rho_0)(\lambda d(z, T(z)) + \mu)}.$$

Для любого $z \in \overline{U}(z_1, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$d(z, T(z)) \leq d(z, z_1) + d(z_1, 0) + d(0, T(z)) \leq \varepsilon + d(0, z_1) + d(0, T(z)).$$

Следовательно, для некоторого $c_2(z_1, \rho_0, \varepsilon) > 0$ выполнено неравенство

$$\|\rho(T)\| \leq e^{\lambda_2(\rho_0)[\lambda(\varepsilon + d(0,z_1)) + \mu]} e^{\lambda_2(\rho_0)\lambda d(0,T(z))} = c_2 e^{\lambda_2(\rho_0)\lambda d(0,T(z))}.$$

С другой стороны, имеем равенства [2, 8]

$$\left|\frac{dT}{dz}(z)\right| = \frac{1 - |T(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad d(0,z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad |z| = \frac{e^{2d(0,z)} - 1}{e^{2d(0,z)} + 1}.$$

Так как $d(0,z)$ ограничено сверху и снизу для $z \in \overline{U}(z_1, \varepsilon)$, имеем

$$\left|\frac{dT}{dz}(z)\right| = \frac{e^{2d(0,z)} + 2 + e^{-2d(0,z)}}{e^{2d(0,T(z))} + 2 + e^{-2d(0,T(z))}} \leq c_3(z_1, \varepsilon)\frac{1}{K^2 + 2 + K^{-2}}$$
$$= c_3 \frac{1}{K^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{K^2} + \frac{1}{K^4}} \leq \frac{c_3}{K^2},$$

где $K = e^{d(0,T(z))} > 0$, с учетом $\frac{2}{K^2} + \frac{1}{K^4} \geq 0$. Отсюда

$$\left|\frac{dT}{dz}(z)\right| \leq c_3 e^{-2d(0,T(z))}, \quad c_3 = c_3(z_1, \varepsilon) > 2.$$

Затем получаем неравенство

$$e^{2d(0,T(z))} \leq c_3 \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{-1}.$$

Таким образом,

$$\|\rho(T)\| \leq c_2 e^{\lambda_2(\rho_0)\lambda d(0,T(z))} \leq c_2 c_3^{\frac{\lambda_2(\rho_0)\lambda}{2}} \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{-\frac{\lambda_2(\rho_0)\lambda}{2}} = c_1 \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{\lambda_1}.$$

Здесь $\lambda_1 = -\frac{\lambda_2(\rho_0)\lambda}{2} < 0$ и $c_1 = c_2 c_3^{\frac{\lambda_2(\rho_0)\lambda}{2}} > 0$. Отметим, что λ и $\lambda_2(\rho_0)$ не зависят от z_1 и ε, а значит, λ_1 тоже не зависит от z_1 и ε. Предложение доказано.

Лемма 2.2 [6, 8]. *Пусть μ_1 — вещественное число такое, что $\mu_1 \geq 2$. Тогда для любой точки $z_1 \in U$ существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что ряды $\sum\limits_{T\in\Gamma} \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{\mu_1}$ сходятся равномерно на круге $\overline{U}(z_1, \varepsilon)$.*

Обозначим через $M(z) = (\alpha_{ij}(z))$ функцию на U с матричными значениями порядка n.

Теорема 2.1. *Пусть $M(z)$ — матричнозначная функция на замкнутом круге $\overline{U}$, аналитическая всюду, кроме конечного числа полюсов внутри круга, и $F = U/\Gamma$ — риманова поверхность типа (g, l), $g \geq 1$, $l \geq 1$. Тогда для любого натурального числа $k \geq 2 - \lambda_1$ и любого характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, формула*

$$\varphi = \sum_{T\in\Gamma} M(T(z))T'(z)^k \rho(T), \quad z \in U,$$

определяет матричный мероморфный k-дифференциал φdz^k на U относительно группы Γ для ρ; построенный мероморфный k-дифференциал опускается до мероморфного k-дифференциала на $F = U/\Gamma$, голоморфно зависящего от ρ.

Доказательство. Для функции $M(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы, и заданного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ определим матричный аналог тэта-ряда Пуанкаре в виде

$$\varphi(z) = \sum_{T\in\Gamma} M(T(z))\left(\frac{dT}{dz}(z)\right)^k \rho(T),$$

где k — натуральное число с условием $k+\lambda_1 \geq 2$ и λ_1 определено в предложении 2.1.

Так как $\alpha_{ij}(z)$ аналитичны на $|z|=1$, модули $|\alpha_{ij}(z)|$, а значит, $\|M(z)\|$ равномерно ограничены на множестве точек z, удовлетворяющих неравенству $d(0,z) \geq d_1$, где d_1 — достаточно большое положительное число. При этом область, заданная условием $d(0,z) < d_1$, содержит все конечное множество полюсов функции $M(z)$ в U.

Пусть z_1 — произвольная точка в U и ε — достаточно малое положительное число, как в лемме 2.2. Существует лишь конечное число элементов орбиты $T(z_1)$, $T \in \Gamma$, которые содержатся в ограниченной области $\{z : d(0,z) \leq d_1+\varepsilon\}$. Следовательно, существует только конечное множество образов $T(\overline{U}(z_1,\varepsilon))$ для $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ по группе Γ, которое содержит точки z, удовлетворяющие условию $d(0,z) \leq d_1$. Исключая это конечное множество элементов $T \in \Gamma$, для некоторого $c_4 > 0$ получим оценку

$$\|M(T(z))\| \leq c_4, \quad z \in \overline{U}(z_1,\varepsilon),\ T \in \Gamma. \tag{2}$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' M(T(z)) \left(\frac{dT}{dz}(z)\right)^k \rho(T),$$

который получен из исходного ряда исключением отмеченного выше конечного множества элементов $T \in \Gamma$, сходится абсолютно и равномерно по z на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ и по $\rho, |\rho-\rho_0| \leq \delta$. Учитывая свойства нормы матрицы, достаточно доказать, что на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ сокращенный ряд

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' \|\rho(T)\| \|M(T(z))\| \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^k$$

сходится равномерно. Из предложения 2.1 и из (2) на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ и для любого $\rho, |\rho-\rho_0| \leq \delta$, получаем оценку

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' \|M(T(z))\| \|\rho(T)\| \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^k \leq \sum_{T\in\Gamma}{}' c_4 c_1 \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{k+\lambda_1} \\ \leq c_4 c_1 \sum_{T\in\Gamma}{}' \left|\frac{dT}{dz}(z)\right|^{k+\lambda_1}.$$

По лемме 2.2 с учетом условия $k+\lambda_1 \geq 2$ последний ряд сходится равномерно по z на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$. Следовательно, сокращенный ряд сходится абсолютно и равномерно по z на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ и по $\rho, |\rho-\rho_0| \leq \delta$, причем каждый член этого ряда является аналитической функцией по z на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ и по ρ, $|\rho-\rho_0| \leq \delta$.

По теореме Вейерштрасса сумма $\varphi^*(z)$ сокращенного ряда аналитична по z на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ и по ρ, $|\rho-\rho_0| \leq \delta$. Сумма $\varphi(z)$ отличается от $\varphi^*(z)$ на конечное число матричных слагаемых, которые являются аналитическими функциями по z на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$, кроме конечного числа полюсов на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$. Таким образом, получаем, что $\varphi(z)$ есть матрица с мероморфными членами, каждый из которых имеет лишь конечное число полюсов на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$. Так как z_1 взято произвольно на круге U, получаем, что $\varphi(z)$ — мероморфная матричная функция на круге U, которая локально голоморфно зависит от ρ.

Пусть S — любой элемент из Γ. Учитывая $\rho(T) = \rho(TS)\rho(S)^{-1}$, получаем следующее соотношение для нашего ряда $\varphi(z)$:

$$\varphi(S(z)) = \sum_{T\in\Gamma} M(TS(z))\left(\frac{dTS}{dS}(z)\right)^k \rho(T)$$

$$= \sum_{TS\in\Gamma} M(TS(z))\left(\frac{dTS}{dz}(z)\right)^k \left(\frac{dS}{dz}(z)\right)^{-k} \rho(TS)\rho(S^{-1}).$$

Когда T пробегает группу Γ, то TS пробегает группу Γ в некотором другом порядке. Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке в силу теоремы Римана.

Умножение матриц некоммутативно. Поэтому в последнем ряде матричные величины, не зависящие от T и входящие в каждый член ряда, можно вынести из-под суммы ряда только вправо. Сделав в оставшемся ряде замену TS на T_1, получим, что

$$\left[\sum_{T_1\in\Gamma} M(T_1(z))\rho(T_1)\left(\frac{dT_1}{dz}(z)\right)^k\right]\left(\frac{dS}{dz}(z)\right)^{-k}\rho(S^{-1}) = \varphi(z)\left(\frac{dS}{dz}(z)\right)^{-k}\rho(S^{-1}).$$

Таким образом, для любого $S \in \Gamma$ доказали, что

$$\varphi(S(z)) = \varphi(z)\left(\frac{dS}{dz}(z)\right)^{-k}\rho(S^{-1}).$$

Последнее означает, что $\varphi(z)\,dz^k$ — мероморфный матричнозначный k-дифференциал на U относительно группы Γ для матричного характера ρ. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Для $M(z) = \frac{1}{z}E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n, каждый член матрицы $\varphi(z) - M(z)$ есть аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$. Тогда детерминант $|\varphi(z)|$ для $\varphi(z)$ имеет полюс порядка n в точке $z = 0$. Аналогично при $\widetilde{M}(z) = \frac{1}{z}$ ряд $\Theta(z)$ имеет полюс порядка 1 в точке $z = 0$. Поэтому ни $|\varphi(z)|$, ни $|\Theta(z)|$ не могут быть тождественно равны нулю.

Теорема 2.2. *Пусть $M(z)$ — матричнозначная функция в круге U, аналитическая всюду, кроме конечного числа полюсов, и такая, что $\iint_U \|M(z)\|\,dxdy < \infty$. Пусть $F = U/\Gamma$ — риманова поверхность типа (g, l), $g \geq 1$, $l \geq 1$. Тогда для любого натурального числа $k \geq 2 - \lambda_1$ и любого характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, формула*

$$\varphi = \sum_{T\in\Gamma} M(T(z))T'(z)^k\rho(T), \quad z \in U,$$

определяет матричный мероморфный k-дифференциал φdz^k на U относительно группы Γ для ρ; построенный мероморфный k-дифференциал опускается до мероморфного k-дифференциала на $F = U/\Gamma$, голоморфно зависящего от ρ.

Доказательство. Для функции $M(z)$ и заданного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ определим матричный аналог тэта-ряда Пуанкаре в виде

$$\varphi(z) = \sum_{T\in\Gamma} M(T(z))\left(\frac{dT}{dz}(z)\right)^k \rho(T), \tag{3}$$

где k — натуральное число с условием $k+\lambda_1 \geq 2$ и число λ_1 определено в предложении 2.1.

Сначала предположим, что матричная функция $M(z)$ не имеет полюсов в U. Нам нужно доказать, что для некоторого $\delta_0>0$, $0<\delta_0<1$, ряд (3) сходится абсолютно и равномерно по z в любом круге $|z|\leq 1-\delta_0$ и по ρ, $|\rho-\rho_0|\leq \delta$, а также верно равенство $\varphi(T(z))\rho(T)=\varphi(z)T'(z)^{-k}$, $z\in U$, $T\in\Gamma$. Этим будет доказано, что $\varphi(z)dz^k$ — голоморфный матричный k-дифференциал на F для ρ, т. е. матричная автоморфная форма веса $(-2k)$ на U, относительно группы Γ для ρ.

Занумеруем в последовательность элементы фуксовой группы $\Gamma=\{T_1,T_2,\dots,T_p,\dots\}$. Обозначим через Δ связный фундаментальный канонический многоугольник группы Γ в U [2, 8], и пусть $\Delta_{\delta_0}=\Delta\cap\{z:|z|\leq 1-\delta_0\}$, где $0<\delta_0<1$.

В силу свойств гиперболической метрики $\lambda(z)|dz|$ и по предложению 2.1 для $\rho,|\rho-\rho_0|\leq\delta$, и на $\bigcup\limits_{j=1}^{s}\overline{U}(z_j,\varepsilon_j)\supset\Delta_{\delta_0}$ для любого натурального числа N имеем неравенства

$$\iint\limits_{\Delta_{\delta_0}}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\left\|\sum_{p=1}^{N}M(T_pz)T_p'(z)^k\rho(T_p)\right\|dxdy$$

$$\leq\sum_{p=1}^{N}\iint\limits_{\Delta_{\delta_0}}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\|\rho(T_p)\|\|M(T_pz)\|\cdot|T_p'(z)|^k\,dxdy$$

$$\leq c_1(s;\rho_0)\sum_{p=1}^{N}\iint\limits_{\Delta_{\delta_0}}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\|M(T_pz)\||T_p'(z)|^k\cdot|T_p'(z)|^{\lambda_1}\,dxdy$$

$$\leq c_1(s;\rho_0)\sum_{p=1}^{\infty}\iint\limits_{T_p(\Delta_{\delta_0})}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\|M(z)\|\,dxdy$$

$$\leq c_1(s;\rho_0)\iint\limits_{U}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\|M(z)\|\,dxdy\leq c_1(s;\rho_0)\iint\limits_{U}\|M(z)\|\,dxdy<\infty.$$

При $N\to\infty$ по теореме Б. Леви и следствию к теореме Б. Леви [12, с. 285, 286] получаем неравенство

$$\|\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\cdot\varphi(z)\|_{L_1(\Delta_{\delta_0})}$$

$$\leq\iint\limits_{\Delta_{\delta_0}}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\sum_{p=1}^{\infty}\|\rho(T_p)\|\|M(T_p(z))\||T_p'(z)|^k\,dxdy$$

$$\leq c_1(s;\rho_0)\sum_{p=1}^{\infty}\iint\limits_{\Delta_{\delta_0}}\lambda^{2-(k+\lambda_1)}(z)\|M(T_p(z))\||T_p'(z)|^{k+\lambda_1}\,dxdy$$

$$\leq c_1(s;\rho_0)\iint\limits_{U}\|M(z)\|\,dxdy<\infty.$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда (3) в U и на $\overline{U}(\rho_0,\delta)$. Кроме того, для матричных функций

$$\varphi_N(z)=\sum_{p=1}^{N}M(T_p(z))(T_p'(z))^k\rho(T_p)$$

на множестве Δ_{δ_0} справедлива следующая оценка:

$$\|\varphi_N(z)\|_{L_1(\Delta_{\delta_0})} \le c_2(\rho_0;\delta_0) = c_1(s;\rho_0)\cdot \iint\limits_U \|M(z)\|\,dxdy\cdot(1-R^2)^{2-(k+\lambda_1)} < \infty,$$

где $N = 1,2,\ldots$, $R = 1-\delta_0$. Применим к $\varphi_N(z)$ формулу среднего значения для голоморфных функций

$$h(z) = \frac{1}{\pi(\delta')^2}\iint\limits_{|\zeta-z|\le\delta'} h(\zeta)\,d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

при $0 < \delta' < \delta_0$, $|z| \le 1-2\delta_0$. Пусть снова Δ_{δ_0} покрывается конечным числом кругов $\overline{U}(z_j,\delta_j)$, $j = 1,\ldots,s$. Отсюда получим оценку

$$\|\varphi_N(z)\| \le c_3(\rho_0;\delta_0) = \frac{s}{\pi}c_2(\rho_0;\delta_0)\max_{j=1,\ldots,s}\frac{1}{\delta_j^2} < \infty, \quad N = 1,2,\ldots,$$

на $|z| \le 1-2\delta_0$. По принципу компактности для голоморфных функций существует подпоследовательность $\varphi_{N_j}(z)$, равномерно сходящаяся к $\varphi(z)$ при $|z| \le 1-2\delta_0$, а значит, $\varphi(z)$ голоморфна на $|z| < 1-2\delta_0$. Применяя формулу среднего значения для остатка $r_N(z) = \varphi(z)-\varphi_N(z)$, получим, что $r_N(z)\to 0$, $N\to\infty$, равномерно по z в любом круге $|z| \le 1-2\delta_0$ и по $\rho, |\rho-\rho_0| \le \delta$. По теореме Вейерштрасса $\varphi(z)$ голоморфна по z в U и локально голоморфна по ρ, $|\rho-\rho_0| \le \delta$.

Если $M(z)$ имеет в U конечное число полюсов, то после удаления их из круга U вместе с достаточно малыми окрестностями функция $M(z)$ абсолютно интегрируема по оставшейся области. Аналогично предыдущему получим, что тогда $\varphi(z)$ является мероморфной матричной функцией на U, которая локально голоморфно зависит от ρ.

Пусть S — любой элемент из Γ. Как в доказательстве теоремы 2.1, имеем

$$\varphi(S(z)) = \varphi(z)\left(\frac{dS}{dz}(z)\right)^{-k}\rho(S^{-1}).$$

Последнее означает, что $\varphi(z)\,dz^k$ — мероморфный матричнозначный k-дифференциал на U относительно группы Γ для матричного характера ρ. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Как видно, из предыдущих оценок, для фиксированного $q = k > 2$ вместо условия $\iint\limits_U \|M(z)\|\,dxdy < \infty$, $z = x+iy$, достаточно выполнения более слабого условия

$$\iint\limits_U (1-|z|^2)^{q-2}\|M(z)\|\,dxdy < \infty.$$

Замечание 2.3. Если характер матрично нормирован, т. е. $\|\rho(T)\| = 1$ для любого $T\in\Gamma$, то в оценке ряда для $\varphi(z)$ можно избавиться от характера. Таким образом, сходимость мультипликативного матричного ряда будет следовать из сходимости матричного тэта-ряда для тривиального характера $\rho(T)\equiv 1$. Отметим, что если характер не матрично нормированный, то он не может быть равномерно ограниченным, т. е. $\|\rho(T)\| \le c_5$ для любых $T\in\Gamma$ (сравни [6, с. 212]). Действительно, достаточно это доказать для скалярных характеров. Если $|\rho(T)| < 1$, то $|\rho(T^{-1})| > 1 + \varepsilon > 1$. Отсюда

$$|\rho(T^{-1})^n| = |\rho(T^{-n})| > (1+\varepsilon)^n > K > 0$$

для любого фиксированного K при $n \geq n_0(K)$.

Замечание 2.4. Теорема 2.1, в частности, дает связь между абелевыми интегралами и матричными мультипликативными функциями и доказывает существование абелевых интегралов с любыми заданными $2g + l - 1$ периодами на F типа (g, l), $g \geq 1$, $l \geq 1$. Возьмем комплексные числа $\zeta_1, \dots, \zeta_{2g}$, $\eta_1, \dots, \eta_l$ с условием, что $\eta_1 + \dots + \eta_l = 0$. Зададим матричный характер в размерности два по правилу

$$\rho(A_i) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(B_i) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{g+i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(C_j) = \begin{pmatrix} 1 & \eta_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, l$.

По теореме 2.1 существует мультипликативная матричная функция

$$f(z) = \begin{pmatrix} z_{11}(z) & z_{12}(z) \\ z_{21}(z) & z_{22}(z) \end{pmatrix}$$

на U для заданного характера ρ. Один из элементов $z_{11}(z)$ и $z_{21}(z)$ не будет тождественно равным нулю, так как детерминант $|f(z)|$ отличен от нуля на U. Предположим, что $z_{11}(z) \neq 0$ и положим $u_1(z) = 1$ и $u_2(z) = u(z) = \frac{z_{12}(z)}{z_{11}(z)}$. Тогда для любого $T \in \Gamma$ имеем равенство $(u_1(T(z)), u_2(T(z))) = (u_1(z), u_2(z)) \cdot \rho(T)$ для любого $z \in U$, где $\rho(T)$ — верхнетреугольная матрица, у которой на диагоналях стоят единицы. Полагая $T = A_i$, $T = B_i$ и $T = C_j$, получим равенства $u(A_i(z)) = u(z) + \zeta_i$, $u(B_i(z)) = u(z) + \zeta_{g+i}$, $u(C_j(z)) = u(z) + \eta_j$, $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, l$. Поэтому u есть аддитивная функция (абелев интеграл) с периодами $\zeta_1, \dots, \zeta_{2g}$, $\eta_1, \dots, \eta_l$. Отсюда $du = \omega(z)\,dz$ — абелев (однозначный) дифференциал с заданными $2g + l - 1$ периодами на F типа (g, l), $g \geq 1$, $l \geq 1$. Отметим, что для римановой поверхности типа $(g, 0)$, $g \geq 2$, этот результат получен в [6].

Замечание 2.5. В случае тора, так как $\rho(\pi_1(\widetilde{F}))$ — коммутативная подгруппа в $GL(n, \mathbb{C})$, нахождение матричной функции (k-дифференциала) для любого матричного характера может быть сведено к задаче для специального характера, заданного верхнетреугольными матрицами с единицами на диагонали, и через явные формулы Эрмита и Аппеля [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dick R.* Krichever–Novikov-like bases on punctured Riemann surface // Deutsches Elektronen–Synchrotron (DESY) 89-059. May 1989. 11 p.
2. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text Math.; V. 71).
3. *Appell P.* Generalisation des fonctions doublement periodiques de seconde espece // J. Math. Pures Appl. 1883. V. 9. P. 5–24.
4. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2.
5. *Haupt O.* Zur theorie der Prymschen Funktionen 1 und N Ordnung // Math. Ann. 1916. V. 77, N 1. P. 24–64.

6. *Iwasawa K.* Algebraic functions. New York; Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (Trans. Math. Monogr.; V. 188).

7. *Беспоместных А. А., Чуешев В. В.* Мультипликативные функции с матричными характерами на компактной римановой поверхности // Вестн. Сиб. федерального ун-та. 2009. Т. 2, № 1. С. 31–39.

8. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука, 1975.

9. *Казанцева А. А., Чуешев В. В.* Дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 89–106.

10. *Крепицина Т. С., Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменных торах // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 74–90.

11. *Chuesheva O. A.* The spaces of meromorphic Prym differentials on finite tori // J. Sib. Fed. Univ. Math., Phys. 2014. V. 7, N 1. P. 162–172.

12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 22 апреля 2014 г., окончательный вариант — 15 декабря 2014 г.

Чуешева Ольга Александровна
Кемеровский гос. университет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043;
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041
simran@mail.ru