

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ С АССОЦИАТИВНО–КОММУТАТИВНЫМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ОГРАНИЧЕННОГО ИНДЕКСА

О. В. Шашков

Аннотация. Доказано, что объединение конечнобазисуемых многообразий алгебр с ассоциативно-коммутативным пересечением ограниченного индекса обладает конечным базисом тождеств.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.319

Ключевые слова: многообразие алгебр, объединение многообразий, конечная базисуемость системы тождеств.

Объединение конечнобазисуемых многообразий алгебр, вообще говоря, не обладает конечным базисом тождеств [1], поэтому представляет интерес задача нахождения условий, гарантирующих конечную базисуемость объединения многообразий алгебр. Там же в [1] Г. В. Дорофеев доказал, что объединение шпехтовых многообразий шпехтово, а значит, является конечнобазисуемым многообразием алгебр. Автор в [2] доказал, что объединение конечнобазисуемых многообразий с нильпотентным пересечением обладает конечным базисом тождеств.

Эта статья — продолжение статьи [2], и основным ее результатом является

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазисуемые многообразия алгебр. Допустим, что $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ — ассоциативно-коммутативное индекса $n \geq 3$ многообразие алгебр. Тогда $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ — конечнобазисуемое многообразие алгебр.

Мы называем многообразие алгебр $\mathfrak{A}$ ассоциативно-коммутативным индекса n , если для любых двух нормированных полилинейных одночленов u и v степени $n \geq 3$ идеал тождеств многообразия алгебр $\mathfrak{A}$ содержит двучлен $u - v$. Неформально это означает, что слова длины n ассоциативно-коммутативны.

Проблема Шпехта получила решение в работе А. Р. Кемера [3]. Вслед за этим появились аналоги теоремы Кемера для конечнопорожденных йордановых, лиевых и альтернативных алгебр [4–6]. В [7] доказана шпехтовость некоторых неассоциативных многообразий, порожденных простыми конечномерными алгебрами, в частности, алгеброй $C_7^{(-)}$ — простой семимерной нелиевой алгеброй Мальцева.

Здесь уместно отметить и не менее известные контрпримеры в характеристике $p > 0$ [8–10], которые были получены сначала при $p = 2$, а затем и для любого простого $p > 2$.

В 70-е гг. были выписаны тождества объединения некоторых конкретных многообразий алгебр [1, 11–13].

В разд. 4 работы из основной теоремы выводится следствие.

Теорема 2. Пусть ℓ — решетка многообразий алгебр, порожденная тремя произвольными конечнобазлируемыми многообразиями алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{A}$ — многообразие правоальтернативных алгебр, $\mathfrak{B}$ — многообразие коммутативных алгебр, $\mathfrak{C}$ — многообразие антикоммутативных алгебр. Тогда решетка ℓ содержит только конечнобазлируемые многообразия алгебр.

Отметим среди открытых вопросов следующие.

1. Будет ли конечнобазлируемым многообразием алгебр объединение двух конечнобазлируемых многообразий со шпехтовым пересечением, в частности, с ассоциативным пересечением; с пересечением, порожденным алгеброй $\mathbf{M}_2(F)$?

2. Будет ли конечнобазлируемым объединение произвольного конечнобазлируемого многообразия со шпехтовым многообразием, в частности, с многообразием ассоциативных алгебр?

3. Будет ли конечнобазлируемым объединение конечнобазлируемых многообразий алгебр с ассоциативным пересечением, удовлетворяющим стандартному тождеству $\text{st}_3 = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$?

1. Основные определения и предварительные результаты

Термин *алгебра* означает линейную алгебру над полем Φ нулевой характеристики. Необходимые понятия и обозначения, связанные с многообразиями алгебр (тождества, многообразия алгебр, T -идеала $T(\mathfrak{A})$, свободной алгебры $\mathfrak{A}[X]$ многообразия $\mathfrak{A}$), можно найти в [14], $\Phi[X]$ — свободная неассоциативная алгебра над полем Φ от счетного множества порождающих X . Везде далее рассматриваются только полилинейные многочлены.

Объединением многообразий алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется наименьшее относительно включения многообразие алгебр, содержащее как многообразие $\mathfrak{A}$, так и многообразие $\mathfrak{B}$. Обозначается объединение многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ через $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Понятно, что тождествами многообразия $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ являются те и только те многочлены, которые будут тождествами многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одновременно, т. е. $T(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A}) \cap T(\mathfrak{B})$.

Для того чтобы упорядочить изучение следования одних тождеств из других, введем в рассмотрение набор функций, достаточных для построения любого T -идеала.

Полилинейный многочлен $f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ от начального набора порождающих $x_1, x_2, \dots, x_N$ называем *правильным*.

Пусть $f = f(x_1, \dots, x_N)$ — правильный одночлен. Тогда определим три функции λ, ρ и $\eta(i)$:

- 1) $f^\lambda := x_1 f(x_2, \dots, x_{N+1})$;
- 2) $f^\rho := f x_{N+1}$;
- 3) $f^{\eta(i)} := f(x_1, x_2, \dots, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{N+1})$ для любого $1 \leq i \leq N$.

Кроме того, стандартным образом определяем действие перестановки на одночлен как перестановку соответствующих порождающих:

$$f^\sigma := f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \dots, x_{N\sigma}),$$

где $\sigma \in \text{Sym}(N)$.

Множеством *правильных одночленов от F* мы называем множество, порожденное из системы тождеств F последовательным действием функций λ, ρ и $\eta(\cdot)$. Множеством *одночленов от F* мы называем множество, полученное из

множества правильных одночленов от F переименованием переменных. Обозначаем это множество через $\text{Mon}(F)$.

Везде далее предполагаем, что «тождество» означает правильный многочлен.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — многообразия алгебр, $F \subseteq T(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$. Для каждого тождества $f \in F$ выберем по одному тождеству $f^\tau \in T(\mathfrak{A})$, принимающему то же значение на элементах свободной алгебры $\mathfrak{B}[X]$. Функция τ называется *подъемом тождества* многообразия $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ до тождества многообразия $\mathfrak{A}$. Существование подъема очевидно, поскольку $T(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A}) + T(\mathfrak{B})$.

Систему тождеств $F \subseteq T(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ назовем *регулярной* ранга m , если F линейно порождает любое с точностью до замены индексов тождество из T -идеала $T(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ степени $\geq m$ и содержит $\text{Mon}(F_m)$, где F_m — все многочлены системы F степени m .

Если F — регулярная система тождеств из T -идеала $T(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, то множество всех тождеств $\sum_i \alpha_i (f_i^\tau)^{\xi_i} \in T(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ для $f_i \in F$, построенных для нулевых комбинаций $\sum_i \alpha_i f_i^{\xi_i} = 0$, назовем системой *нуль-тождеств* относительно F . Здесь под ξ_i понимается некоторое произведение функций λ, ρ и $\eta(i)$, заканчивающееся перестановкой σ .

В [2, теорема 3.1] доказано достаточное условие конечной базисуемости объединения многообразий алгебр.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазисуемые многообразия алгебр, F — регулярная система тождеств многообразия $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ с подъемом F^τ такая, что система нуль-тождеств T_0 относительно F конечнобазисуема. Тогда $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ обладает конечным базисом тождеств.

2. Ассоциативно-коммутативные многообразия конечного индекса

Понятно, что многообразиие Nilp^n нильпотентных индекса n алгебр является ассоциативно-коммутативным многообразием индекса n .

Тождество $u - v$ для двух нормированных одночленов u и v называется *двучленным*.

Предложение 1. Многообразие ассоциативных алгебр, удовлетворяющее некоторому полилинейному двучленному тождеству, не оставляющему первый и последний образующие на месте, ассоциативно-коммутативно ограниченного индекса.

Доказательство. В. Н. Латышев [15] показал, что если в ассоциативной алгебре выполнено двучленное тождество, переставляющее первый образующий, то в ней будет выполнено тождество $y_1 y_2 x_1 x_2 \dots x_n - y_2 y_1 x_1 x_2 \dots x_n$. Понятно, что имеется и симметричное тождество $x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 - x_1 x_2 \dots x_n y_2 y_1$. Отсюда следует, что любое полилинейное двучленное тождество степени $2n + 1$ выполнено в такой алгебре. $\square$

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие правоальтернативных алгебр, $\mathfrak{B}$ — многообразие строго эластичных алгебр. Тогда многообразие $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ассоциативно-коммутативно индекса 4.

Доказательство. Для коммутатора, йорданова произведения и ассоциатора используем стандартные обозначения: $[a, b] = ab - ba$, $a \circ b = ab + ba$ и $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$.

Вначале напомним, что многообразие строго эластичных алгебр определяется тождеством $(ab)c - c(ba) = 0$. Заметим, кстати, что всякая коммутативная и всякая антикоммутативная алгебра строго эластична. Более того, объединение многообразий всех коммутативных и всех антикоммутативных алгебр является в точности многообразием всех строго эластичных алгебр [1].

1. Кроме того, ясно, что правоальтернативная строго эластичная алгебра альтернативна. Строгая эластичность означает справедливость свойств

$$[a, b] \circ c = 0, \quad [a \circ b, c] = 0.$$

Из этих тождеств, кстати, следует, что

$$[[a, b], c] = 2[a, b]c = 2[ab, c].$$

2. Докажем, что итерированный коммутатор $[x, y, z, t] := [[[x, y], z], t]$ кососимметричен по первым трем аргументам.

В самом деле, $2[x^2y, z] = [[x^2, y], z] = 0$, и отсюда $[(xy)x, z] = -[x(xy), z] = -[x^2y, z] = 0$.

3. Из тождества (см. [14])

$$2(a, b, c) = (a, c, b)^+ + [[a, b], c],$$

где $(x, y, z)^+ := (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$ — йорданов ассоциатор, при $a = [x, y]$, $b = c = z$ следует, что $[x, y, z, z] = 0$. Таким образом, коммутатор $[x, y, z, t]$ кососимметричен по всем аргументам.

4. Из тождества Сейгла [16]

$$[[[x, y], z], t] + [[[y, z], t], x] + [[[z, t], x], y] + [[[t, x], y], z] = [[x, z], [y, t]]$$

и кососимметричности итерированных коммутаторов следует, что $[[x, y], [z, t]] = 0$. Отсюда по п. 1 $[[x, y], zt] = [x, y](zt) = 0$.

5. Имеем

$$([x, y], z, t) = ([x, y]z)t = \frac{1}{4}[x, y, z, t],$$

$$[(x, y, z), t] = [(xy)z - x(yz), t] = \frac{1}{4}([x, y, z, t] + [y, z, x, t]).$$

6. В силу тождества (см. [14])

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b + 3(a, b, c)$$

закключаем, что

$$\begin{aligned} 3[x, y, z, t] &= 12([x, y], z, t) = 4[[x, y]z, t] - 4[x, y][z, t] - 4[[x, y], t]z \\ &= 2[x, y, z, t] - 2[x, y, t, z] = 4[x, y, z, t]. \end{aligned}$$

Таким образом, $[x, y, z, t] = 0$, а значит, и $([x, y], z, t) = [(x, y, z), t] = 0$.

7. Снова из тождества п. 6, пользуясь тождествами п. 1, получаем соотношения

$$(a \circ b, c, d) = 0, \quad (a, b, c) \circ d = 0.$$

Отсюда заключаем, что $(xy, z, t) = (x, y, z)t = 0$, таким образом, все слова длины 4 ассоциативны.

8. Наконец, $\frac{1}{4}[x, y, z, t] = [x, y]zt = [xyz, t] = 0$. Поскольку перестановки (12) и (1234) порождают симметрическую группу $\mathbf{S}_4$, это означает, что все слова длины 4 ассоциативно-коммутативны. $\square$

Лемма 1. Ассоциативно-коммутативное конечного индекса многообразие алгебр, удовлетворяющее полилинейному тождеству с ненулевой суммой коэффициентов, нильпотентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативно-коммутативное конечного индекса n многообразие алгебр, f — полилинейное тождество степени n из системы тождеств многообразия $\mathfrak{A}$ с ненулевой суммой коэффициентов. Перепишем его в виде $f = \sum_i \alpha_i u_i$, где $\alpha_i \in \Phi$, u_i — нормированные одночлены из $\Phi[X]$.

Из определения ассоциативно-коммутативных многообразий конечного индекса следует, что идеал тождеств $T(\mathfrak{A})$ содержит двучлены $x_1 x_2 \dots x_n - u_i$, где $x_1 x_2 \dots x_n$ — правонормированный в смысле расстановки скобок одночлен.

Домножив каждое из этих тождеств на α_i и сложив их, получим, что $(\sum_i \alpha_i) x_1 x_2 \dots x_n - f \in T(\mathfrak{A})$, но и f лежит в $T(\mathfrak{A})$, поэтому $x_1 x_2 \dots x_n \in T(\mathfrak{A})$.

Осталось заметить, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет всем полилинейным тождествам $x_1 x_2 \dots x_n - u$, где u — произвольные полилинейные одночлены от $x_1 x_2 \dots x_n$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ удовлетворяет всем полилинейным одночленным тождествам, значит, $\mathfrak{A}$ — нильпотентное индекса n многообразие алгебр. $\square$

Из леммы 1 вытекает

Следствие 1 [17]. Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие ассоциативных алгебр. Допустим, что $\mathfrak{B}$ — конечнобазированное многообразие, идеал тождеств которого содержит полилинейный многочлен с ненулевой суммой коэффициентов. Тогда объединение многообразий $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ имеет конечный базис тождеств.

3. Доказательство основной теоремы

Из леммы 1 следует, что всякое ассоциативно-коммутативное конечного индекса многообразие алгебр либо нильпотентно, либо определяется полилинейными тождествами с нулевой суммой коэффициентов. Исходя из этого, для доказательства основной теоремы достаточно доказать следующее

Предложение 3. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазированные многообразия алгебр. Допустим, что $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ — ассоциативно-коммутативное ограниченного индекса многообразие алгебр, определяемое системой полилинейных тождеств с нулевой суммой коэффициентов. Тогда $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ — конечнобазированное многообразие алгебр.

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — конечнобазированные многообразия алгебр и $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ — ассоциативно-коммутативное многообразие алгебр конечного индекса $n \geq 3$, определяемое полилинейной системой тождеств с нулевой суммой коэффициентов.

Выберем число m , не меньшее индекса n и степени определяющих тождеств каждого из многообразий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Пусть V_N — множество всех полилинейных нормированных одночленов от первых N порождающих. Определим множество W_N как разность $V_N - V_N$, т. е. это множество всех полилинейных нормированных двучленов вида $u - v$, где $u, v \in V_N$.

Обозначим $W = \bigcup_{i \geq m} W_i$. Покажем, что W — регулярная в многообразии $\mathfrak{C}$ система тождеств ранга m .

В самом деле, во-первых, $\text{Mon}(W_m) \subseteq W$, во-вторых, всякое полилинейное тождество степени $N \geq m$ многообразия $\mathfrak{C}$ линейно выражается через двучлены из W . Докажем последнее утверждение.

Пусть $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ — полилинейное тождество многообразия $\mathfrak{C}$, а u_i — одночлены. Всякое такое тождество может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i &= \alpha_1(u_1 - u_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)(u_2 - u_3) \\ &+ \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1})(u_{k-1} - u_k) + \sum_{i=1}^k \alpha_i u_k. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$, последнее слагаемое $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_k$ равно нулю, а каждое из предшествующих пропорционально тождеству из W .

Введем новые обозначения, которые помогут упростить изложение материала о подъеме множества W .

В каждом полилинейном одночлене $u \in V_N$ найдется хотя бы одно произведение порождающих. Пусть это, например, $x_i x_j$. Договоримся такой одночлен записывать как $u = u_1^{\eta(ij)}$, понимая, что u_1 — одночлен, полученный из одночлена u изъятием порождающего x_j , а $\eta(ij)$ — функция, действующая на одночлен u_1 и обратная такому изъятию.

Например, в таких обозначениях можно писать, что

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) = x_1(x_3 x_4)^{\eta(12)} = x_1 x_3^{\eta(34)\eta(12)} = x_1^{\eta(13)\eta(34)\eta(12)}.$$

Сформулируем в виде леммы следующее очевидное утверждение, которое понадобится в дальнейшем.

Лемма 2. Если $\eta(ij)$ и $\eta(kl)$ — две функции такие, что $i, j \notin \{k, l\}$, то они перестановочны между собой.

Доказательство предложения 3, а значит, и основной теоремы, будет проведено на основании теоремы 3. Для этого докажем, что при соответствующем выборе подъема τ система нуль-тождеств T_0 , относительно регулярной системы W конечнобазируема.

Определим подходящий подъем следующим образом.

Пусть на W_m уже определен некоторый произвольный подъем τ . Продолжим его на двучлены большей степени системы W по следующему рекуррентному правилу.

Для каждого двучлена $w = u - v \in W$ степени $N > m$ всегда можно выбрать одночлены $u_1, v_1 \in V_{N-1}$ и функции $\eta_1 = \eta(ij)$, $\eta_2 = \eta(kl)$ так, что $u = u_1^{\eta_1}$ и $v = v_1^{\eta_2}$. Выберем еще два произвольных одночлена u_2 и v_2 так, чтобы были определены одночлены $u_2^{\eta_1 \eta_3}$ и $v_2^{\eta_2 \eta_3}$, где $\eta_3 = \eta(pq)$ и $p, q \notin \{i, j, k, l\}$. Тогда подъем w^τ двучлена w можно определить как сумму следствий из подъемов двучленов меньшей степени:

$$(u - v)^\tau := (u_1 - u_2^{\eta_3})^{\tau \eta_1} + (u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2})^{\tau \eta_3} + (v_2^{\eta_3} - v_1)^{\tau \eta_2}.$$

Понятно, что определение подъема τ таким образом зависит от выбора индексов i, j, k, l, p, q и двучленов u_2, v_2 . Чтобы подчеркнуть способ выбора, будем обозначать $w^\tau = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2)$.

Итак, зафиксируем для каждого двучлена $w \in W$ степени $N > m$ по одному подъему $\tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2)$. Этим и будет определен подъем W^τ системы W .

Будем говорить, что два тождества f и g степени N *сравнимы по модулю нуль-тождеств меньших степеней*, и писать $f \equiv_{N-1} g$, если их разность следует из нуль-тождеств степени $N-1$.

Покажем, что по модулю нуль-тождеств меньших степеней определение подъема $w^\tau = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2)$ не зависит от выбора p, q и u_2, v_2 . Считаем, что степень двучлена w равна N .

Лемма 3. $\tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2) \equiv_{N-1} \tau(w; i, j, k, l; p', q'; u_3, v_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$t_1 = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2), \quad t_2 = \tau(w; i, j, k, l; p', q'; u_3, v_3)$$

и $\eta_4 = \eta(p'q')$, тогда

$$\begin{aligned} t_1 &= (u_1 - u_2^{\eta_3})^{\tau\eta_1} + (u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2})^{\tau\eta_3} + (v_2^{\eta_3} - v_1)^{\tau\eta_2}, \\ t_2 &= (u_1 - u_3^{\eta_4})^{\tau\eta_1} + (u_3^{\eta_1} - v_3^{\eta_2})^{\tau\eta_4} + (v_3^{\eta_4} - v_1)^{\tau\eta_2}. \end{aligned}$$

Понятно, что $t_1 - t_2$ является нуль-тождеством. Покажем, что при достаточно большом N оно следует из нуль-тождеств меньших степеней. Во-первых, ясно, что

$$t_1 - t_2 \equiv_{N-1} (u_3^{\eta_4} - u_2^{\eta_3})^{\tau\eta_1} + (v_2^{\eta_3} - v_3^{\eta_4})^{\tau\eta_2} + (u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2})^{\tau\eta_3} - (u_3^{\eta_1} - v_3^{\eta_2})^{\tau\eta_4}.$$

Выберем такие одночлены u_4, v_4, u_5, v_5 , чтобы одночлены $u_4^{\eta_1\eta_3\eta_4}, v_4^{\eta_2\eta_3\eta_4}, u_5^{\eta_1\eta_2\eta_3}, v_5^{\eta_1\eta_2\eta_4}$ были правильными. Тогда

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &\equiv_{N-1} (u_3 - u_4^{\eta_3})^{\tau\eta_1\eta_4} + (u_4^{\eta_4} - u_2)^{\tau\eta_1\eta_3} \\ &\quad + (v_2 - v_4^{\eta_4})^{\tau\eta_2\eta_3} + (v_4^{\eta_3} - v_3)^{\tau\eta_2\eta_4} + (u_2 - u_5^{\eta_2})^{\tau\eta_1\eta_3} + (u_5^{\eta_1} - v_2)^{\tau\eta_2\eta_3} \\ &\quad - (u_3 - v_5^{\eta_2})^{\tau\eta_1\eta_4} - (v_5^{\eta_1} - v_3)^{\tau\eta_2\eta_4} \equiv_{N-1} (v_5^{\eta_2} - u_4^{\eta_3})^{\tau\eta_1\eta_4} + (u_4^{\eta_4} - u_5^{\eta_2})^{\tau\eta_1\eta_3} \\ &\quad + (u_5^{\eta_1} - v_4^{\eta_4})^{\tau\eta_2\eta_3} + (v_4^{\eta_3} - v_5^{\eta_1})^{\tau\eta_2\eta_4} \\ &\equiv_{N-1} (v_5^{\eta_4} - u_5^{\eta_3})^{\tau\eta_1\eta_2} + (u_5^{\eta_3} - v_5^{\eta_4})^{\tau\eta_1\eta_2} \equiv_{N-1} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, при котором в двучлене $w = u - v$ одночлен u содержит несколько произведений порождающих, т. е. $u = u_1^{\eta_1} = u_3^{\eta_4} = u_4^{\eta_1\eta_4}$, при этом $\eta_4 = \eta(i'j')$ и $i', j' \notin \{i, j\}$. В следующей лемме покажем, что в этом случае по модулю нуль-тождеств меньших степеней выбор подъема не зависит от выбора i, j .

Лемма 4. Если $u = u_1^{\eta_1} = u_3^{\eta_4} = u_4^{\eta_1\eta_4}$, то

$$\tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2) \equiv_{N-1} \tau(w; i', j', k, l; p', q'; u'_2, v'_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$t_1 = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2), \quad t_2 = \tau(w; i', j', k, l; p', q'; u'_2, v'_2).$$

По лемме 3 для некоторых u_5, v_5 и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ имеем

$$\begin{aligned} t_1 &\equiv_{N-1} (u_4^{\eta_4} - u_5^{\eta_3\eta_4})^{\tau\eta_1} + (u_5^{\eta_1\eta_4} - v_5^{\eta_2})^{\tau\eta_3} + (v_5^{\eta_3} - v_1)^{\tau\eta_2}, \\ t_2 &\equiv_{N-1} (u_4^{\eta_1} - u_5^{\eta_3\eta_1})^{\tau\eta_4} + (u_5^{\eta_1\eta_4} - v_5^{\eta_2})^{\tau\eta_3} + (v_5^{\eta_3} - v_1)^{\tau\eta_2}, \end{aligned}$$

тогда

$$t_1 - t_2 \equiv_{N-1} (u_4 - u_5^{\eta_3})^{\tau\eta_1\eta_4} - (u_4 - u_5^{\eta_3})^{\tau\eta_1\eta_4} = 0. \quad \square$$

Очевидно, что эту лемму можно применять не только к первому слагаемому поднимаемого двучлена, но и ко второму.

Лемма 5. По модулю нуль-тождеств меньших степеней подъема

$$w^\tau = \tau(w; i, j, k, l; p, q; u_2, v_2)$$

не зависит от выбора всех параметров подъема $i, j, k, l; p, q; u_2, v_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из лемм 3, 4. $\square$

В следующих трех леммах будет доказано, что всякая функция η , представляющая собой произведение функций $\lambda, \rho, \eta(i)$, заканчивающееся, быть может, перестановкой σ , коммутирует по модулю нуль-тождеств степени $N-1$ с подъемом τ .

Лемма 6. $w^{\rho\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\rho}, w^{\lambda\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что в этой лемме степень двучлена w^ρ равна N .

По лемме 5

$$w^{\rho\tau} \equiv_{N-1} (u_1^\rho - u_2^{\eta_3\rho})^{\tau\eta_1} + (u_2^{\eta_1\rho} - v_2^{\eta_2\rho})^{\tau\eta_3} + (v_2^{\eta_3\rho} - v_1^\rho)^{\tau\eta_2},$$

тогда

$$w^{\rho\tau} \equiv_{N-1} (u_1 - u_2^{\eta_3})^{\tau\eta_1\rho} + (u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2})^{\tau\eta_3\rho} + (v_2^{\eta_3} - v_1)^{\tau\eta_2\rho} \equiv_{N-1} w^{\tau\rho}. \quad \square$$

Лемма 7. Для любой перестановки σ выполнено $w^{\sigma\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\sigma}$.

Несложно заметить, что эта лемма следует из простой переформулировки леммы 5.

Лемма 8. $w^{\eta(p)\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta(p)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\eta(p) = \eta(ij)\sigma = \eta_4\sigma$, где σ — некоторая подходящая перестановка. Учитывая предыдущую лемму, достаточно доказать, что $w^{\eta_4\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta_4}$.

По лемме 5

$$w^{\eta_4\tau} \equiv_{N-1} (u_1^{\eta_4} - u_2^{\eta_3\eta_4})^{\tau\eta_1} + (u_2^{\eta_1\eta_4} - v_2^{\eta_2\eta_4})^{\tau\eta_3} + (v_2^{\eta_3\eta_4} - v_1^{\eta_4})^{\tau\eta_2},$$

тогда

$$w^{\eta_4\tau} \equiv_{N-1} (u_1 - u_2^{\eta_3})^{\tau\eta_1\eta_4} + (u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2})^{\tau\eta_3\eta_4} + (v_2^{\eta_3} - v_1)^{\tau\eta_2\eta_4} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta_4}. \quad \square$$

Их лемм 6–8 следует

Лемма 9. Пусть η — произведение функций $\lambda, \rho, \eta(\cdot)$, заканчивающееся перестановкой σ . Тогда $w^{\eta\tau} \equiv_{N-1} w^{\tau\eta}$.

Лемма 10. $(w)^\tau \equiv_{N-1} -(-w)^\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$w^\tau = (u_1 - u_2^{\eta_3})^{\tau\eta_1} + (u_2^{\eta_1} - v_2^{\eta_2})^{\tau\eta_3} + (v_2^{\eta_3} - v_1)^{\tau\eta_2}.$$

Тогда по лемме 5

$$(-w)^\tau \equiv_{N-1} (v_1 - v_2^{\eta_3})^{\tau\eta_2} + (v_2^{\eta_2} - u_2^{\eta_1})^{\tau\eta_3} + (u_2^{\eta_3} - u_1)^{\tau\eta_1},$$

а значит, $w^\tau + (-w)^\tau \equiv_{N-1} 0$. $\square$

Лемма 11. Для любых трех одночленов $u_1^{\eta_1}, u_2^{\eta_2}, u_3^{\eta_3}$

$$(u_1^{\eta_1} - u_2^{\eta_2})^\tau + (u_2^{\eta_2} - u_3^{\eta_3})^\tau \equiv_{N-1} (u_1^{\eta_1} - u_3^{\eta_3})^\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 для подходящих одночленов $v_1^{\eta_1\eta_4}, v_2^{\eta_2\eta_4}, v_3^{\eta_3\eta_4}$ имеем

$$t_1 = (u_1^{\eta_1} - u_2^{\eta_2})^\tau \equiv_{N-1} (u_1 - v_1^{\eta_4})^{\tau\eta_1} + (v_1^{\eta_4} - v_2^{\eta_4})^{\tau\eta_1} + (v_2^{\eta_4} - u_2)^{\tau\eta_2},$$

$$t_2 = (u_2^{\eta_2} - u_3^{\eta_3})^\tau \equiv_{N-1} (u_2 - v_2^{\eta_4})^{\tau\eta_2} + (v_2^{\eta_4} - v_3^{\eta_3})^{\tau\eta_4} + (v_3^{\eta_3} - u_3)^{\tau\eta_3},$$

$$t_3 = (u_1^{\eta_1} - u_3^{\eta_3})^\tau \equiv_{N-1} (u_1 - v_1^{\eta_4})^{\tau\eta_1} + (v_1^{\eta_4} - v_3^{\eta_3})^{\tau\eta_4} + (v_3^{\eta_3} - u_3)^{\tau\eta_3},$$

в таком случае очевидно, что $t_1 + t_2 - t_3 \equiv_{N-1} 0$. $\square$

Из этой леммы сразу следует

Лемма 12. Для любых одночленов u_1, u_2, u_3 и скаляров $\alpha, \beta \in \Phi$

$$\alpha(u_1 - u_2)^\tau + \beta(u_1 - u_3)^\tau \equiv_{N-1} \alpha(u_3 - u_2)^\tau + (\alpha + \beta)(u_1 - u_3)^\tau.$$

Для завершения доказательства предложения 3 докажем

Предложение 4. Система нуль-тождеств относительно построенного подъема τ системы двучленов W обладает конечным базисом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_{i1} - u_{i2})^{\tau\eta_i}$ — некоторое нуль-тождество.

По лемме 9 такое нуль-тождество сравним по модулю нуль-тождеств степени $N - 1$ с тождеством $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_{i1}^{\eta_i} - u_{i2}^{\eta_i})^\tau$.

Итак, осталось доказать, что все нуль-тождества вида $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_{i1} - u_{i2})^\tau$ следуют из нуль-тождеств меньших степеней.

Некоторый двучлен u_1 может встретиться в последнем тождестве несколько раз в различных поднимаемых двучленах, но индукция по леммам 12 и 10 позволяет свести по модулю нуль-тождеств меньших степеней количество таких встреч к одной, не увеличивая при этом общее число различных встречаемых одночленов.

Докажем, что если некоторый одночлен u_1 встретился в указанном тождестве $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_{i1} - u_{i2})^\tau$ лишь один раз, то коэффициент α при подъеме двучлена,

содержащего одночлен u_1 , равен нулю. В самом деле, так как $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_{i1} - u_{i2})^\tau$ —

нуль-тождество, то $\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_{i1} - u_{i2}) = 0$. Поскольку все неассоциативные одночлены образуют базис в алгебре $\Phi[X]$, в частности, линейно независимы, коэффициент при базисном элементе в нулевой линейной комбинации равен нулю.

Итак, удалось доказать, что по модулю нуль-тождеств меньших степеней каждое нуль-тождество достаточно большой степени сравнимо с нулем, т. е. следует из этих тождеств, а это означает, что система нуль-тождеств обладает конечным базисом. $\square$

4. Решетки, порожденные некоторыми многообразиями

Г. В. Дорофеев [12] рассмотрел решетку многообразий, порожденную тремя многообразиями алгебр: всех коммутативных, всех ассоциативных и всех антикоммутативных. Им было доказано, что такая решетка в решетке всех многообразий алгебр изоморфна модулярной решетке с тремя образующими a, b и c и определяющим соотношением $abc = bc$. Более того, Г. В. Дорофеев показал, что эта решетка состоит из 22 элементов.

Нашей целью является доказательство того, что все элементы этой решетки конечнобазируемы. Кроме того, конечная базируемость сохраняется и для довольно широкого класса таких решеток с другими образующими, как это сформулировано в теореме 2.

Приступим к доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пересечение $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ многообразия $\mathfrak{B}$ коммутативных алгебр и многообразия $\mathfrak{C}$ антикоммутативных алгебр является нильпотентным индекса 2 многообразием, модулярная решетка ℓ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$.

Это означает, что решетка ℓ является гомоморфным образом решетки ℓ' , рассмотренной Г. В. Дорофеевым. Но решетка ℓ' содержит лишь 22 различных многообразий алгебр. Им соответствуют следующие элементы решетки ℓ (может быть, не все различные): $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{C} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} + \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{B} + \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} + \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Так как всякая коммутативная и всякая антикоммутативная алгебра строго эластична, по предложению 2 заключаем, что многообразия $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$ являются ассоциативно-коммутативными многообразиями конечного индекса. Нильпотентное многообразие $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ также является ассоциативно-коммутативным многообразием конечного индекса. Тогда конечная базируемость первых 21 многообразий в приведенном списке проверяется непосредственно по теореме 1 и очевидному соображению, что пересечение конечнобазируемых многообразий является конечнобазируемым многообразием алгебр.

Конечная базируемость последнего многообразия $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ следует из того, что многообразие $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ является конечнобазируемым (поскольку пересечение $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ нильпотентно) строго эластичным многообразием. Тогда по предложению 2 имеем, что $\mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ — ассоциативно-коммутативное многообразие индекса 4, а по теореме 1 — что $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ является конечнобазируемым многообразием алгебр. $\square$

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. В. Пчелинцеву за помощь и руководство при создании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорофеев Г. В. О некоторых свойствах объединения многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 1. С. 24–39.
2. Шашков О. В. Объединение многообразий с нильпотентным пересечением // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 2. С. 228–242.
3. Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 597–641.
4. Вайс А. Я., Зельманов Е. И. Теорема Кемера для конечнопорожденных йордановых алгебр / Алт. ун-т. Барнаул, 1988. Деп. в ВИНТИ 29.02.88, № 1607–88.

5. Ильяков А. В. Конечность базиса тождеств конечнопорожденной альтернативной PI-алгебры над полем характеристики 0 // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 61–76.
6. Ильяков А. В. Шпехтовость многообразий PI-представлений конечнопорожденных алгебр Ли над полем нулевой характеристики. Новосибирск, 1991. 52 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР; № 10).
7. Ильяков А. В. Шпехтовость идеалов тождеств некоторых простых неассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 3. С. 327–351.
8. Белов А. Я. Контрпримеры к проблеме Шпехта // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 3. С. 13–24.
9. Гришин А. В. Примеры не конечной базисуемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2 // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. С. 101–118.
10. ЩигOLEV В. В. Примеры бесконечно базисуемых T -идеалов // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. С. 307–312.
11. Дорофеев Г. В. О многообразиях обобщенно стандартных и обобщенно достижимых алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 2. С. 143–176.
12. Дорофеев Г. В. Объединение многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 3. С. 267–291.
13. Дорофеев Г. В., Пчелинцев С. В. О многообразиях стандартных и достижимых алгебр // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 995–1001.
14. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
15. Латышев В. Н. О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 5. С. 1010–1037.
16. Sagle A. Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101, N 3. P. 426–458.
17. Шашков О. В. Конечная базисуемость объединения некоторых многообразий алгебр // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 1. С. 134–137.

Статья поступила 2 апреля 2014 г.

Шашков Олег Владимирович
Московский гос. областной гуманитарный институт,
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево 142611 Московской обл.
o.v.shashkov@gmail.com