

УДК 510.64

О ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКЕ ЗНАНИЯ И ВРЕМЕНИ С ИНТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

В. Ф. Юн

Аннотация. В [1] введена линейная полимодальная логика знания и времени с интранзитивным отношением времени как множество формул, общезначимых в фреймах специального вида. В [2] введено исчисление AS_{LTK_r} , связанное с классом таких фреймов. В данной работе найдена формула линейной логики знания и времени с интранзитивным отношением времени, которая не выводится в исчислении AS_{LTK_r} .

DOI 10.17377/smzh.2015.56.320

Ключевые слова: полимодальная логика, фреймы Крипке, аксиоматизация, полнота.

Введение

В статье исследуется полимодальная линейная логика знания и времени с интранзитивным отношением времени. Более точно, в [1] рассмотрены LTK_r -фреймы $\langle \bigcup_{n \in J} C^n, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$ с R_T -сгустками состояний C^n , интранзитивным на сгустках, праволинейным и рефлексивным R_T , и определена полимодальная логика LTK_r как множество формул, истинных во всех LTK_r -фреймах.

В [2] продолжено исследование логики LTK_r и был рассмотрен вопрос ее аксиоматизации. Авторами найдено исчисление AS_{LTK_r} , корректное относительно класса всех LTK_r -фреймов. Кроме того, в [2] доказана полнота найденного исчисления относительно класса фреймов, связанных с LTK_r -фреймами.

В данной работе найдена формула, не выводимая в исчислении AS_{LTK_r} и общезначимая во всех LTK_r -фреймах. Таким образом, доказано отсутствие полноты AS_{LTK_r} относительно класса всех LTK_r -фреймов.

1. Исчисление AS_{LTK_r} и теорема о корректности

Рассмотрим модальный язык с модальными операторами $\Box_T, \Box_\sim, \Box_1, \dots, \Box_k$. Более точно, рассмотрим язык, состоящий из счетного множества пропозициональных переменных P , стандартных логических связок и модальных операторов $\Box_T, \Box_\sim, \Box_1, \dots, \Box_k$. Формулы определяются, как обычно [3].

Будем рассматривать фреймы $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$ и модели вида $\langle W, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k, V \rangle$, где W — непустое множество, $R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k$ — бинарные отношения на множестве W , V — означивание переменных, т. е. отображение $V : P \rightarrow \mathbb{P}(W)$. Означивание V можно расширить стандартным образом

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-860.2014.1).

[3] на множество формул рассматриваемого языка. В частности, для любого $x \in W$ имеем $x \models_V p \iff x \in V(p)$ для любой переменной $p \in P$ и

$$\begin{aligned} x \models_V \Box_T A &\iff \forall y (x R_T y \implies y \models_V A), \\ x \models_V \Box_{\sim} A &\iff \forall y (x R_{\sim} y \implies y \models_V A), \\ x \models_V \Box_i A &\iff \forall y (x R_i y \implies y \models_V A), i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Формула A истинна в модели $M = \langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k, V \rangle$, если $x \models_V A$ для любого $x \in W$. Говорим, что формула A общезначима в фрейме, если она истинна в любой модели, основанной на этом фрейме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Фрейм $\langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k \rangle$ называется $LT K_r$ -фреймом [2], если выполняются следующие свойства:

- (a) $W = \bigcup_{n \in J} C^n$, где $C^n \neq \emptyset$, $J = \{1, \dots, L\}$, $L \in \mathbb{N}$ или $J = \mathbb{N}$;
- (b) $x R_T y \iff \exists n \in J ((x \in C^n \text{ и } y \in C^n) \text{ или } (x \in C^n \text{ и } y \in C^{n+1}))$;
- (c) $x R_{\sim} y \iff \exists n \in J (x \in C^n \text{ и } y \in C^n)$;
- (d) R_i — некоторое отношение эквивалентности внутри любого C^n , т. е. такое, что из $x R_i y$ следует $x \in C^n$ и $y \in C^n$ для некоторого $n \in J$.

Напомним, что подмножество C_{R_T} ($C_{R_{\sim}}$) множества W называется C_{R_T} -сгустком ($C_{R_{\sim}}$ -сгустком), если $\forall w \forall z \in C_{R_T} (w R_T z \& z R_T w)$ и $\forall z \in W \forall w \in C_{R_T} ((w R_T z \& z R_T w) \implies z \in C_{R_T})$ ($\forall w \forall z \in C_{R_{\sim}} (w R_{\sim} z \& z R_{\sim} w)$ и $\forall z \in W \forall w \in C_{R_{\sim}} ((w R_{\sim} z \& z R_{\sim} w) \implies z \in C_{R_{\sim}})$ соответственно).

Таким образом, каждое множество C^n является R_T -сгустком (и $R_{\sim}$ -сгустком), т. е. для $x \in C^n$ имеем $C^n = \{y \mid x R_T y \text{ и } y R_T x\}$.

Рассмотрим исчисление $AS_{LT K_r}$, введенное в [2].

Аксиомы $AS_{LT K_r}$. Тавтологии классической пропозициональной логики;

$$L_{\Box_T} : \Box_T (\Box_T A \longrightarrow B) \vee \Box_T (\Box_T B \longrightarrow A);$$

$$K_{\Box_{\xi}} : \Box_{\xi} (A \longrightarrow B) \longrightarrow (\Box_{\xi} A \longrightarrow \Box_{\xi} B), \xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\};$$

$$T_{\Box_{\xi}} : \Box_{\xi} A \longrightarrow A, \xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\};$$

$$4_{\Box_{\xi}} : \Box_{\xi} A \longrightarrow \Box_{\xi} \Box_{\xi} A, \xi \in \{\sim, 1, \dots, k\};$$

$$5_{\Box_{\xi}} : \neg \Box_{\xi} A \longrightarrow \Box_{\xi} \neg \Box_{\xi} A, \xi \in \{\sim, 1, \dots, k\};$$

$$M.1 : \Box_T A \longrightarrow \Box_{\sim} A;$$

$$M.2 : \Box_{\sim} A \longrightarrow \Box_i A, 1 \leq i \leq k;$$

$$AL : (\Box_{\sim} A \& \Box_{\sim} B \& \Diamond_T (\neg A \& \Box_{\sim} B)) \longrightarrow \Box_T B.$$

$$\text{Правила вывода. МР : } \frac{A, A \longrightarrow B}{B}, \quad \text{Нес : } \frac{A}{\Box_T A}.$$

Здесь и далее $\Diamond_{\xi}$ — сокращение для $\neg \Box_{\xi} \neg$ ($\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$).

Введем класс фреймов, содержащий класс $LT K_r$ -фреймов, и докажем, что исчисление $AS_{LT K_r}$ корректно относительно этого класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Фрейм $\langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k \rangle$ будем называть $\widetilde{LT K_r}$ -фреймом, если он удовлетворяет условиям:

PL $_{\Box_T}$: если $x R_T y$ и $x R_T z$, то $y R_T z$ или $z R_T y$;

PT $_{\Box_{\xi}}$: отношения $R_T, R_{\sim}, R_i$ ($1 \leq i \leq k$) рефлексивны;

R4 $_{\Box_{\xi}}$: отношения $R_{\sim}, R_i$ ($1 \leq i \leq k$) транзитивны;

R5 $_{\Box_{\xi}}$: отношения $R_{\sim}, R_i$ ($1 \leq i \leq k$) симметричны;

PM.1 : если $x R_{\sim} y$, то $x R_T y$;

PM.2 : если $x R_i y$, то $x R_{\sim} y$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;

PAL : если $x R_T y R_T z$ и x, y, z принадлежат различным $R_{\sim}$ -сгусткам, то неверно, что $x R_T z$.

Модель, основанную на $\widetilde{LT K_r}$ -фрейме, будем называть $\widetilde{LT K_r}$ -моделью.

Теорема 1. Для любой формулы A верно: если A выводима в AS_{LTK_r} , то A общезначима в любом $\widetilde{LTK_r}$ -фрейме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что аксиомы исчисления AS_{LTK_r} общезначимы в любом $\widetilde{LTK_r}$ -фрейме.

Докажем общезначимость аксиомы $L_{\Box_T}$. Предположим, что формула

$$\Box_T(\Box_TA \longrightarrow B) \vee \Box_T(\Box_TB \longrightarrow A)$$

не общезначима. Тогда она опровергается в некоторой $\widetilde{LTK_r}$ -модели $\langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k, V \rangle$, т. е. $x \not\models_V \Box_T(\Box_TA \longrightarrow B) \vee \Box_T(\Box_TB \longrightarrow A)$ для некоторого $x \in W$. Тогда $x \models_V \Diamond_T(\Box_TA \& \neg B) \& \Diamond_T(\Box_TB \& \neg A)$. Следовательно, существует $y \in W$ такой, что xR_Ty и $y \models_V \Box_TA \& \neg B$, и существует $z \in W$ такой, что xR_Tz и $z \models_V \Box_TB \& \neg A$.

Так как xR_Ty и xR_Tz , по свойству $PL_{\Box_T}$ имеем yR_Tz или zR_Ty . Если yR_Tz , то $z \models_V A$, поскольку $y \models_V \Box_TA$. Это противоречит тому, что $z \models_V \neg A$. Случай, когда zR_Ty , доказывается аналогично.

Общезначимость формул $T_{\Box_\xi}$, $4_{\Box_\xi}$, $5_{\Box_\xi}$, $M.1$, $M.2$ легко следует из соответствующих свойств $\widetilde{LTK_r}$ -фреймов.

Докажем общезначимость во всех $\widetilde{LTK_r}$ -фреймах формулы AL . Пусть $\langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k \rangle$ — произвольный $\widetilde{LTK_r}$ -фрейм, $V : P \rightarrow \mathbb{P}(W)$ — означивание, $x \in W$ и $x \models_V \Box_{\sim}A \& \Box_{\sim}B \& \Diamond_T(\neg A \& \Box_{\sim}B)$. Докажем, что $x \models_V \Box_TB$.

Предположим, что это неверно, т. е. $x \not\models_V \Box_TB$. Тогда существует $u \in W$ такой, что xR_Tu и $u \not\models_V B$.

Так как $x \models_V \Box_{\sim}A \& \Box_{\sim}B \& \Diamond_T(\neg A \& \Box_{\sim}B)$, верно

$$(1) \forall y \in W (xR_{\sim}y \implies y \models_V A \& B),$$

$$(2) \exists z (xR_Tz \text{ и } z \models_V \neg A \text{ и } \forall v (zR_{\sim}v \implies v \models_V B)).$$

Поскольку $z \models_V \neg A$, из (1) получаем, что верно $\neg(xR_{\sim}z)$. В силу того, что $u \not\models_V B$, из (1) получаем, что $\neg(xR_{\sim}u)$. Кроме того, из п. (2) следует, что выполняется $\neg(zR_{\sim}u)$. Таким образом, x, z, u принадлежат различным $R_{\sim}$ -сгусткам.

Так как xR_Tz и xR_Tu , по свойству $PL_{\Box_T}$ имеем zR_Tu или uR_Tz . Если zR_Tu , то для x, z, u , принадлежащих различным $R_{\sim}$ -сгусткам, верно xR_TzR_Tu и xR_Tu . Это противоречит свойству PAL .

Если uR_Tz , то для x, z, u , принадлежащих различным $R_{\sim}$ -сгусткам, верно xR_TuR_Tz и xR_Tz . Получили противоречие со свойством PAL .

Таким образом, предположение $x \not\models_V \Box_TB$ неверно, и общезначимость формулы AL доказана. $\square$

2. Контрпример

В этом разделе докажем отсутствие полноты исчисления AS_{LTK_r} относительно класса LTK_r -фреймов.

Теорема 2. Существует формула A_0 такая, что A_0 общезначима во всех LTK_r -фреймах, и она не выводится в AS_{LTK_r} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим формулу $\Diamond_T \Diamond_{\sim} p \longrightarrow \Diamond_T p$. Докажем сначала, что она общезначима во всех LTK_r -фреймах.

Предложение 1. Формула $\Diamond_T \Diamond_{\sim} p \longrightarrow \Diamond_T p$ общезначима в любом LTK_r -фрейме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k \rangle$ — произвольный LTK_r -фрейм, V — означивание, $x \in W$ и $x \models_V \Diamond_T \Diamond_{\sim} p$. Докажем, что $x \models_V \Diamond_T p$.

Из $x \models_V \Diamond_T \Diamond_{\sim} p$ следует, что существуют $y, z \in W$ такие, что $xR_T y$, $yR_{\sim} z$ и $z \models_V p$.

Так как $xR_T y$, то $\exists n \in J((x \in C^n \text{ и } y \in C^n) \text{ или } (x \in C^n \text{ и } y \in C^{n+1}))$. Если $x \in C^n$ и $y \in C^n$ для некоторого $n \in J$, то $z \in C^n$, так как $yR_{\sim} z$. Следовательно, $xR_T z$. Если $x \in C^n$ и $y \in C^{n+1}$ для некоторого $n \in J$, то $z \in C^{n+1}$, поскольку $yR_{\sim} z$. Стало быть, и в этом случае верно $xR_T z$. Таким образом, найдется $z \in W$ такой, что $xR_T z$ и $z \models_V p$. Следовательно, $x \models_V \Diamond_T p$, и предложение доказано. $\square$

Для краткости обозначим формулу $\Diamond_T \Diamond_{\sim} p \longrightarrow \Diamond_T p$ через A_0 . Покажем, что формула A_0 не выводима в исчислении AS_{LTK_r} . Для этого сначала докажем, что A_0 не общезначима во всех $\widetilde{LTK_r}$ -фреймах.

Предложение 2. Формула A_0 опровергается в некоторой $\widetilde{LTK_r}$ -модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фрейм $\mathbb{F} = \langle W, R_T, R_{\sim}, R_1, \dots, R_k \rangle$, где

- (a) $W = C^0 \cup C^1$, где $C^0 = \{x\}$, $C^1 = \{y, z\}$ и $C^0 \cap C^1 = \emptyset$;
- (b) $uR_T w \iff [(u = x \text{ и } w = y) \text{ или } \exists n \in \{0, 1\}(u \in C^n \text{ и } w \in C^n)]$;
- (c) $uR_{\sim} w \iff \exists n \in \{0, 1\}(u \in C^n \text{ и } w \in C^n)$;
- (d) $R_i = R_{\sim}$, $1 \leq i \leq k$.

Нетрудно заметить, что данный фрейм является $\widetilde{LTK_r}$ -фреймом. Пусть означивание $V : P \rightarrow \mathbb{P}(W)$ переменных в нем таково, что $V(p) = \{z\}$. Тогда

$$x \not\models_V p, \quad y \not\models_V p, \quad z \models_V p.$$

Тем самым $y \models_V \Diamond_{\sim} p$, следовательно, $x \models_V \Diamond_T \Diamond_{\sim} p$. Кроме того, верно $x_V \models \Box_T \neg p$. Таким образом, $x \models_V \Diamond_T \Diamond_{\sim} p \& \Box_T \neg p$, т. е. формула A_0 опровергается в $\widetilde{LTK_r}$ -модели $\langle \mathbb{F}, V \rangle$. $\square$

Из теоремы 1 и предложения 2 получаем

Предложение 3. Формула A_0 не выводима в исчислении AS_{LTK_r} .

Из предложения 3 и общезначимости формулы A_0 в всех LTK_r -фреймах сразу следует, что исчисление AS_{LTK_r} не является полным относительно класса LTK_r -фреймов. $\square$

Автор выражает огромную признательность и благодарность Л. Л. Максимовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lukyanchuk A. Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge // J. Sib. Federal Univ. 2013. V. 6, N 2. P. 220–226.
2. Лукьянчук А. Н., Римацкий В. В. Аксиоматизация линейной логики знания и времени LTK_r с интранзитивным отношением времени // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1304–1314.

-
3. Chagrov A., Zakharyashev M. Modal logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. (Oxford Logic Guides; Book 35).

Статья поступила 9 декабря 2014 г.

Юн Вета Федоровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
veta_v@mail.ru