Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.98+519.46

О ПРОДОЛЖЕНИИ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА

М. А. Плиев, М. М. Попов

Аннотация. Изучается процедура продолжения ортогонально аддитивного оператора с латерального идеала и латеральной полосы на все пространство. В частности устанавливается, что в порядково полной векторной решетке продолженный с латеральной полосы ортогонально аддитивный оператор сохраняет латеральную непрерывность, узость, компактность и дизъюнктность. Полученные результаты позволяют усилить недавно доказанную теорему об узких ортогонально аддитивных операторах в векторных решетках.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.319

Ключевые слова: векторная решетка, абстрактный оператор Урысона, латеральный идеал, латеральная полоса, наименьшее продолжение, латерально непрерывный оператор, узкий оператор.

Введение

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках впервые введены в начале 90-х гг. прошлого столетия в [1, 2]. Позднее концепция ортогональной аддитивности была распространена на отображения, действующие в решеточно-нормированных пространствах (см. [3–5]). В настоящее время теория ортогонально аддитивных операторов является активной областью исследования (см. [6–9]).

1. Предварительные сведения

Приведем некоторые сведения, необходимые для дальнейшего, с целью фиксации терминологии и обозначений и введения требуемых понятий. Все необходимые сведения о векторных решетках и булевых алгебрах можно найти в [10–12].

Все векторные решетки, рассматриваемые ниже, архимедовы. Элемент y векторной решетки E называется *осколком* элемента $x \in E$, если $y \perp (x-y)$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y — осколок x. Будем писать $x = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} x_i$, если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $x_i \perp x_j$, $i \neq j$. Два осколка x_1, x_2 элемента x называются *взаимно дополнительными*, если $x = x_1 \sqcup x_2$.

Множество всех осколков элемента e обозначается через $\mathscr{F}_e$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–51–53119).

Рассмотрим векторную решетку E. Подмножество $D \subset E$ называется *латерально аддитивным*, если для любых $x, y \in D$ таких, что $x \perp y$, их сумма $x + y$ также принадлежит D.

Пусть E — векторная решетка, D — латерально аддитивное подмножество E и X — действительное векторное пространство. Отображение $T : D \to X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x + y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in D$.

Из определения ясно, что $T(0) = 0$. Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством относительно сложения операторов и умножения на скаляры.

Пусть E и F — векторные решетки и D — латерально аддитивное подмножество E. Ортогонально аддитивное отображение $T : D \to F$ называется *положительным*, если $Tx \geq 0$ в F для любых $x \in D$, и *порядково ограниченным*, если T отображает порядково ограниченные подмножества D в порядково ограниченные множества в F.

Порядково ограниченный, ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона.*

Векторное пространство всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}(E, F)$.

Пример 1. Одним из самых важных примеров является нелинейный интегральный оператор Урысона (см. [13, ч. 5]). Пусть (A, Σ, μ) и (B, Ξ, ν) — пространства с полными σ-конечными мерами и $(A \times B, \mu \times \nu)$ — их пополненное произведение. Пусть $K : A \times B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(C_0) $K(s, t, 0) = 0$ для $\mu \times \nu$-п. в. $(s, t) \in A \times B$;

(C_1) $K(\cdot, \cdot, r)$ $\mu \times \nu$-измерима для всех $r \in \mathbb{R}$;

(C_2) $K(s, t, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для $\mu \times \nu$-п. в. $(s, t) \in A \times B$.

Условия (C_1) и (C_2) называют *условиями Каратеодори.*

Обозначим через $L_0(B, \Xi, \nu)$ или $L_0(\nu)$ упорядоченное пространство классов эквивалентности ν-измеримых почти всюду конечных действительнозначных функций, заданных на B, где $f \leq g$ означает, что $f(t) \leq g(t)$ ν-п. в. на B. Тогда $L_0(\nu)$ — векторная решетка.

Для заданной функции $f \in L_0(\nu)$ функция $|K(s, \cdot, f(\cdot))|$ ν-измерима для μ-п. в. $s \in A$ и $h_f(s) := \int\limits_B |K(s, t, f(t))|\, d\nu(t)$ также μ-измерима. Введем обозначение $\mathrm{Dom}_B(K) := \{f \in L_0(\nu) : h_f \in L_0(\mu)\}$. Определим оператор $T : \mathrm{Dom}_B(K) \to L_0(\mu)$, полагая

$$(Tf)(s) := \int\limits_B K(s, t, f(t))\, d\nu(t) \quad \mu\text{-п. в.}$$

Пусть E и F — порядковые идеалы в $L_0(\nu)$ и $L_0(\mu)$ соответственно и K удовлетворяет условиям (C_0)–(C_2). Тогда если $E \subseteq \mathrm{Dom}_B(K)$ и $T(E) \subseteq F$, то определен ортогонально аддитивный оператор, T, действующий из E в F и называемый *интегральным оператором Урысона.*

Частным случаем интегрального оператора Урысона является оператор Гаммерштейна, заданный формулой

$$(Tf)(s) := \int\limits_B K(s, t) u(t, f(t))\, d\nu(t) \quad \mu\text{-п. в.},$$

где $K(\cdot,\cdot)$ — $\mu\times\nu$-измеримая функция на $A\times B$ и $u: B\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — функция такая, что $u(t,\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для ν-п. в. $t\in B$, $u(\cdot,r)$ ν-измерима для любого $r\in\mathbb{R}$ и $u(t,0)=0$ для ν-п. в. $t\in B$ (для соблюдения условия C_0).

Пусть E — векторная решетка и D — латерально аддитивное подмножество E. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset D$ называется *латерально сходящейся* к $x\in D$, если $x_\alpha\sqsubseteq x_\beta\sqsubseteq x$ для любых индексов $\alpha<\beta$ и $x_\alpha\xrightarrow{\mathrm{o}}x$. В этом случае будем писать $x_\alpha\xrightarrow{\mathrm{lat}}x$.

Пусть F также векторная решетка. Ортогонально аддитивное отображение $T: D\to F$ называется *латерально непрерывным* (*σ-латерально непрерывным*), если из соотношения $x_\alpha\xrightarrow{\mathrm{lat}}x$ ($x_n\xrightarrow{\mathrm{lat}}x$) следует, что $Tx_\alpha\xrightarrow{\mathrm{o}}Tx$ ($Tx_n\xrightarrow{\mathrm{o}}Tx$). Векторное пространство всех латерально непрерывных (σ-латерально непрерывных) абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}_c(E,F)$ ($\mathscr{U}_{\sigma c}(E,F)$).

Пример 2. Каждый интегральный оператор Урысона $T: E\to F$ (см. пример 1) σ-латерально непрерывен (см. [2, предложение 2.9]).

2. Продолжение абстрактных операторов Урысона

Если для линейного регулярного оператора в векторной решетке естественной областью определения является порядковый идеал, то для ортогонально аддитивного оператора такой областью является в общем случае нелинейное множество, обладающее некоторой специфической структурой. Дадим точное определение.

Подмножество D векторной решетки E называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия:

(1) если $x\in D$, то $y\in D$ для любого $y\in\mathscr{F}_x$,

(2) если $x,y\in D$, $x\perp y$, то $x+y\in D$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 3. Пусть E — векторная решетка. Каждый порядковый идеал в E является латеральным идеалом.

Пример 4. Пусть E — векторная решетка и $e\in E$. Тогда $\mathscr{F}_e$ — это латеральный идеал (см. [6, лемма 3.5]).

Пример 5. Пусть E,F — векторные решетки и $T\in\mathscr{U}_+(E,F)$. Тогда $\mathfrak{K}_T:=\{x\in E: Tx=0\}$ — латеральный идеал в E.

Теорема 1 (см. [7, теорема 1]). *Пусть E,F — векторные решетки и F порядково полна, D — латеральный идеал в E и $T: D\to F_+$ — ортогонально аддитивное порядково ограниченное отображение. Тогда существует положительный абстрактный оператор Урысона $\widetilde{T}_D: E\to F$ такой, что $Tx=\widetilde{T}_Dx$ для любого $x\in D$.*

Оператор $\widetilde{T}_D: E\to F$ (или $\widetilde{T}: E\to F$ для краткости) может быть задан формулой $\widetilde{T}x=\sup\{Ty: y\in\mathscr{F}_x\cap D\}$.

Замечание 1. В [7, теорема 1] на оператор T наложены более жесткие условия: множество $T(D)$ ограничено в F. Однако данное требование избыточно. Достаточным для справедливости заключения теоремы является порядковая ограниченность отображения T на D.

Пусть E,F — векторные решетки, где решетка F порядково полна, D — латеральный идеал в E, $T: D\to F_+$ — ортогонально аддитивное порядково ограниченное отображение. Положительный абстрактный оператор Урысона $S : E \to F$ называется *наименьшим продолжением* отображения T, если $Tx = Sx$ для любого $x \in D$ и для любого положительного абстрактного оператора Урысона $R : E \to F$ такого, что $Rx = Tx$ для любого $x \in D$, выполняется $Sx \leq Rx$ для любого $x \in E$.

Лемма 1. *Пусть $E, F, D, T, \widetilde{T}$ такие же, как в теореме 1. Оператор $\widetilde{T} : E \to F$ является оператором наименьшего продолжения для ортогонально аддитивного отображения $T : D \to F$.*

Доказательство. Пусть $R \in \mathscr{U}_+(E, F)$ — произвольное продолжение отображения T. Возьмем $x \in E$, $y \in \mathscr{F}_x \cap D$. Тогда

$$Rx = R(x - y) + Ry = R(x - y) + Ty \geq Ty; \quad Rx \geq \sup\{Ty : y \in \mathscr{F}_x \cap D\} = \widetilde{T}x.$$

В силу произвольности выбора элемента x получаем требуемое. $\square$

Теорема 2. *Пусть E, F — порядково полные векторные решетки, D — латеральный идеал в E и $T : D \to F_+$ — латерально непрерывное ортогонально аддитивное порядково ограниченное на D отображение. Тогда $0 \leq \widetilde{T} \in \mathscr{U}_c(E, F)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 $\widetilde{T} \in \mathscr{U}_+(E, F)$. Покажем, что $\widetilde{T}$ является латерально непрерывным оператором. Возьмем латерально сходящуюся сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset E$ такую, что $e_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lat}} e$. Достаточно установить неравенство $\widetilde{T}e \leq \sup\limits_\alpha \widetilde{T}(e_\alpha)$. Пусть $f \sqsubseteq e$ и $f \in D$, тогда в силу декомпозиционной леммы Рисса в векторной решетке [11, теорема 1.13] существует латерально сходящаяся сеть $f_\alpha \subset D$ такая, что $f = o\text{-}\lim\limits_\alpha f_\alpha$ и $f_\alpha \sqsubseteq e_\alpha$ для любого $\alpha \in \Lambda$. Теперь можем написать

$$Tf = o\text{-}\lim_\alpha Tf_\alpha = \sup_\alpha Tf_\alpha \leq \sup_\alpha \widetilde{T}e_\alpha.$$

Переходя в левой части последнего соотношения к супремуму по всем осколкам $f \sqsubseteq e$, $f \in D$, получаем $\widetilde{T}e \leq \sup_\alpha \widetilde{T}e_\alpha$. $\square$

Для дальнейшего анализа свойств оператора наименьшего продолжения потребуются вспомогательные факты, которые приведем без доказательства. Пусть E — векторная решетка и $x, y \in E$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) бинарное отношение $\sqsubseteq$ является отношением частичного порядка на E;

(b) $x \sqsubseteq y$ тогда и только тогда, когда $x^+ \sqsubseteq y^+$ и $x^- \sqsubseteq y^-$.

Лемма 2. *Пусть E — векторная решетка, $x \in E$. Тогда множество $\mathscr{F}_x$, частично упорядоченное отношением $\sqsubseteq$, является булевой алгеброй с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом x и булевыми операциями:*

$$z \cup y := (z^+ \vee y^+) - (z^- \vee y^-), \quad z \cap y := (z^+ \wedge y^+) - (z^- \wedge y^-), \quad \neg z = x - z.$$

Если, кроме того, векторная решетка порядково полна, то $\mathscr{F}_x$ — полная булева алгебра.

Доказательство. Согласно [11, теорема 1.49] множества $\mathscr{F}_{x^+}$ и $\mathscr{F}_{x^-}$ являются булевыми алгебрами относительно частичного порядка, индуцированного из E, с наименьшим элементом 0 и наибольшими элементами x^+ и x^- соответственно. При этом булевы операции $\vee$ и $\wedge$ совпадают с решеточными, а дополнительный элемент $\neg z$ для произвольного $z \in \mathscr{F}_{x^+}$ ($z \in \mathscr{F}_{x^-}$) имеет вид $\neg z = x^+ - z$ ($\neg z = x^- - z$). Рассмотрим декартово произведение булевых алгебр

$\mathfrak{A} := \mathscr{F}_{x^+} \times \mathscr{F}_{x^-}$. Рассмотрим отображение $\tau : \mathfrak{A} \to \mathscr{F}_x$, заданное формулой $\tau(y, z) = y - z$. Очевидно, что τ является биекцией. Таким образом, на множестве $\mathscr{F}_x$ с помощью отображения τ можно ввести структуру булевой алгебры, где частичный порядок задается бинарным отношением $\sqsubseteq$. Порядковая полнота векторной решетки гарантирует полноту булевых алгебр $\mathscr{F}_{x^+}$ и $\mathscr{F}_{x^-}$ (см. [11, теорема 1.49]), что, в свою очередь, обеспечивает полноту булевой алгебры $\mathscr{F}_x$. $\square$

Подмножество D векторной решетки E называется *латерально замкнутым* (*латерально σ-замкнутым*), если оно содержит пределы всех латерально сходящихся сетей (последовательностей) $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset D$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$). Латерально замкнутый латеральный идеал D называется *латеральной полосой* в E.

Пример 6. Пусть E — векторная решетка. Каждая полоса E является латеральной полосой.

Пример 7. Пусть E, F — векторные решетки, $0 \le T \in \mathscr{U}_c(E, F)$ и $z \in F$. Тогда множества $\{x \in E : Tx = 0\}$ и $\mathscr{F}_z$ являются латеральными полосами в E и F соответственно.

Следующая лемма позволяет упростить анализ свойств продолженного оператора.

Лемма 3. *Пусть E — порядково полная векторная решетка, D — латеральная полоса в E. Тогда для любого $x \in E$ множество $D(x) := \mathscr{F}_x \cap D$ содержит максимальный элемент относительно частичного порядка, задаваемого отношением $\sqsubseteq$.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент E. Согласно лемме 2 множество $\mathscr{F}_x$ является булевой алгеброй относительно частичного порядка, задаваемого отношением $\sqsubseteq$, и порядковая полнота векторной решетки E влечет полноту булевой алгебры $\mathscr{F}_x$. Множество $D(x)$ ограничено в $\mathscr{F}_x$, и в силу полноты существует элемент $x^D \in \mathscr{F}_x$ такой, что $x^D := \sup D(x)$. Множество $D(x)$ направлено вверх относительно отношения $\sqsubseteq$. Это означает, что $x^D = o\text{-}\lim\limits_{\alpha} y_\alpha$, где $y_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x^D$ и $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset D(x)$ для некоторого индексного множества $\alpha \in \Lambda$. В силу латеральной замкнутости полосы D получаем, что $x^D \in D(x)$. $\square$

Замечание 2. Далее в тексте за максимальным элементом множества $D(x)$ в булевой алгебре $\mathscr{F}_x$ сохраним обозначение x^D. Заметим также, что в условиях теоремы 2 справедливо равенство $\widetilde{T}_D x = T x^D$ для всех $x \in E$.

Одной из активно развивающихся областей современного функционального анализа является теория линейных узких операторов (см. [14]). Концепция узости оказалась плодотворной также и для ортогонально аддитивных операторов (см. [8]). Приведем определение узкого (строго узкого) оператора.

Пусть E — безатомная векторная решетка, D — латеральный идеал в E и X — банахово пространство. Ортогонально аддитивное отображение $T : D \to X$ называется *узким* (*строго узким*) *на элементе* $e \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют взаимно дополнительные осколки e_1, e_2 элемента e такие, что $\|T(e_1) - T(e_2)\| < \varepsilon$ ($T(e_1) = T(e_2)$); *узким* (*строго узким*), если T узок (строго узок) на каждом элементе $e \in D$.

Теорема 3. *Пусть E — безатомная порядково полная векторная решетка, F — порядково полная банахова решетка, D — латеральная полоса в E и*

$T : D \to F_+$ — *узкое* (*строго узкое*) *порядково ограниченное ортогонально аддитивное отображение. Тогда наименьшее продолжение* $\widetilde{T} : E \to F$ *также узкое* (*строго узкое*).

Доказательство. Установим узость продолженного оператора $\widetilde{T}$ в предположении узости исходного отображения T. Возьмем произвольный элемент $e \in E$ и $\varepsilon > 0$. В силу леммы 3 существует максимальный элемент e^D. Согласно узости исходного оператора $T : D \to F_+$ найдется пара взаимно дополнительных осколков f_1, f_2 элемента e^D таких, что $\|Tf_1 - Tf_2\| < \varepsilon$. Далее имеем $e = e^D \sqcup (e - e^D) = f_1 \sqcup f_2 \sqcup (e - e^D)$. В качестве искомых взаимно дополнительных осколков для e возьмем $e_1 := f_1$ и $e_2 := f_2 \sqcup (e - e^D)$. Используя замечание 2, выводим

$$\|\widetilde{T}e_1 - \widetilde{T}e_2\| = \left\|Te_1^D - Te_2^D\right\| = \|Tf_1 - Tf_2\| < \varepsilon.$$

Аналогично можно установить строгую узость оператора $\widetilde{T}$. □

Рассмотрим другие свойства, сохраняемые оператором наименьшего продолжения. Введем следующие определения.

Пусть E — векторная решетка, $D \subset E$ — латеральный идеал и X — банахово пространство. Ортогонально аддитивное отображение $T : D \to X$ называется *AM-компактным*, если для любого порядково ограниченного множества $M \subset D$ его образ $T(M)$ — предкомпактное множество в X; *C-компактным*, если для любого $e \in D$ множество $T(\mathscr{F}_e)$ предкомпактно в X.

Теорема 4. *Пусть E — порядково полная векторная решетка, F — порядково полная банахова решетка, D — латеральная полоса в E и $T : D \to F_+$ — AM-компактное* (C-*компактное*) *порядково ограниченное ортогонально аддитивное отображение. Тогда наименьшее продолжение $\widetilde{T} : E \to F$ также AM-компактно* (C-*компактно*).

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 3. Установим факт AM-компактности оператора $\widetilde{T}$. Пусть M — порядково ограниченное множество в E и фиксировано некоторое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $M^D := \{x^D : x \in M\}$. Тогда M^D — порядково ограниченное подмножество D и согласно AM-компактности отображения T существует конечное множество $M_0 = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ такое, что набор $\left\{Tx_1^D, \dots, Tx_n^D\right\}$ является ε-сетью в $T(M^D)$. Зафиксируем произвольный элемент $x \in M$. Тогда

$$\|\widetilde{T}x - \widetilde{T}x_i\| = \left\|Tx^D - Tx_i^D\right\| < \varepsilon,$$

где в качестве x_i взят подходящий элемент M_0. Таким образом, в $\widetilde{T}(M)$ существует конечная ε-сеть $\{\widetilde{T}x_1, \dots, \widetilde{T}x_n\}$. Аналогичными рассуждениями доказывается C-компактность оператора $\widetilde{T}$. □

В заключительной части статьи, опираясь на свойства оператора наименьшего продолжения, усилим один результат из [8].

Введем дополнительные определения. Пусть E, F — векторные решетки, решетка F порядково полна, $x \in E$. Обозначим через Π_x семейство всех конечных наборов $\pi \subset \mathscr{F}_x$ таких, что $x = \bigsqcup\limits_{y \in \pi} y$. С каждым абстрактным оператором Урысона $T : E \to F$ можно связать функцию $\lambda_T : E \to F^+$, заданную формулой

$$\lambda_T(x) = \bigwedge_{\pi \in \Pi_x} \bigvee_{y \in \pi} |T(y)|$$

для любого $x \in E$. Отметим, что порядковая ограниченность оператора T и порядковая полнота векторной решетки F гарантируют существование супремума в правой части вышеприведенного равенства. Будем говорить, что λ_T — это функция *Энфло — Старберда* оператора T. Абстрактный оператор Урысона $T : E \to F$ называется *λ-узким*, если $\lambda_T(x) = 0$ для любого $x \in E$. Будем говорить, что абстрактный оператор Урысона $T : E \to F$ *сохраняет дизъюнктность*, если $T(x) \perp T(y)$ для любых $x, y \in E$ таких, что $x \perp y$. Абстрактный оператор Урысона $T \in \mathscr{U}_+(E, F)$ называется *псевдоузким*, если не существует сохраняющего дизъюнктность абстрактного оператора Урысона $S \in \mathscr{U}(E, F)$ такого, что $0 < S \leq |T|$.

Известно, что абстрактный оператор Урысона $T : E \to F$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда сохраняет дизъюнктность его модуль $|T|$ (см. [14, теорема 6.3]).

Теорема 5. *Пусть E, F — векторные решетки, решетка F порядково полна, решетка E безатомна и $T \in \mathscr{U}_+(E, F)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T — λ-узкий оператор;*

(2) *T — псевдоузкий оператор.*

В [14] данная теорема (теорема 8.1) доказана в предположении, что E — решетка, допускающая порядковое проектирование на любую полосу, а T — латерально непрерывный положительный абстрактный оператор Урысона.

Для доказательства теоремы 5 нам понадобится еще одно свойство оператора наименьшего продолжения.

Лемма 4. *Пусть E — векторная решетка, F — порядково полная векторная решетка, D — латеральный идеал в E и $T : D \to F_+$ — сохраняющее дизъюнктность порядково ограниченное ортогонально аддитивное отображение. Тогда наименьшее продолжение $\widetilde{T} : E \to F$ является оператором, сохраняющим дизъюнктность.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$ и $x \perp y$. В силу дизъюнктности элементов x и y дизъюнктными являются любые u и v, $u \in \mathscr{F}_x \cap D$, $v \in \mathscr{F}_y \cap D$. Тогда $|Tu| \wedge |Tv| = 0$ и, переходя в левой части к супремуму по $u \in \mathscr{F}_x \cap D$, $v \in \mathscr{F}_y \cap D$, получаем $\widetilde{T}x \perp \widetilde{T}y$. $\square$

Пусть A, B — решетки (не обязательно векторные пространства). Отображение $\psi : A \to B$ называется *$\vee$-отображением*, если $\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y)$ для любых $x, y \in A$; *$\wedge$-отображением*, если $\psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y)$ для любых $x, y \in A$; *решеточным гомоморфизмом*, если оно является одновременно $\vee$- и $\wedge$-отображением.

Если в дополнение к этому A, B — булевы алгебры, то будем полагать, что $\psi(\mathbf{0}_A) = \mathbf{0}_B$ и $\psi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$, и в этом случае к названию отображения будем добавлять приставку «булево».

Замечание 3. Важно отметить, что здесь и ниже $\mathscr{F}_e$ рассматривается как решетка (булева алгебра) относительно «осколочного» порядка, а не исходного порядка в E.

Лемма 5. *Пусть E — векторная решетка, F — порядково полная векторная решетка, $e \in E$ и $\varphi : \mathscr{F}_e \to F_+$ — решеточный гомоморфизм. Тогда существует положительный сохраняющий дизъюнктность абстрактный оператор Урысона $\Phi : E \to F$ такой, что $\Phi(f) = \varphi(f)$ для любого $f \in \mathscr{F}_e$.*

Доказательство. Исходный решеточный гомоморфизм φ является ортогонально аддитивным и порядково ограниченным отображением, действующим из латерального идеала $\mathscr{F}_e$ в F_+. Наименьшее продолжение $\widetilde{\varphi} : E \to F$ относительно $\mathscr{F}_e$ является искомым сохраняющим дизъюнктность положительным абстрактным оператором Урысона. Полагаем $\Phi := \widetilde{\varphi}$. $\square$

Напомним, что порядковый проектор P_e на полосу, порожденную элементом $e \in E^+$, может быть вычислен по формуле [11, теорема 3.13]

$$P_e x = \bigvee_{n=1}^{\infty} (x \wedge ne) \in \mathscr{F}_x, \quad x \in E_+.$$

Следующий факт хорошо известен.

Лемма 6 (см. [8, лемма 7.4]). *Пусть E, F — векторные решетки, где решетка F порядково полна, $T : E \to F$ — абстрактный оператор Урысона, $e \in E$, такой, что $f = \lambda_T(e) > 0$. Тогда формула $\varphi(x) = \mathbf{1}_f(\lambda_T(x))$, где $\mathbf{1}_f(y) = f - P_{(f-y)^+} f$, задает булево $\vee$-отображение $\varphi : \mathscr{F}_e \to \mathscr{F}_f$ такое, что $\varphi(x) \leq |T|(x)$ для любого $x \in \mathscr{F}_e$.*

Доказательство теоремы 5. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана в [8, теорема 6.2]. Докажем обратную импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что T не λ-узкое и $e \in E$ таков, что $f = \lambda_T(e) > 0$. Согласно лемме 6 можно построить булево $\vee$-отображение $\varphi : \mathscr{F}_e \to \mathscr{F}_f$. В силу леммы 5 наименьшее продолжение $\widetilde{\varphi}$ отображения φ является положительным абстрактным оператором Урысона, сохраняющим дизъюнктность, $0 \leq \widetilde{\varphi} \leq T$, $\widetilde{\varphi}(x) = \phi(x)$ для любого $x \in \mathscr{F}_e$. В частности, $\widetilde{\varphi}(e) = \phi(e) = f > 0$ и $\widetilde{\varphi} > 0$. Это означает, что T не является псевдоузким. $\square$

Авторы выражают искреннюю признательность рецензенту за внимательное прочтение текста и ценные замечания, позволившие существенно улучшить качество статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1990. V. 35, N 4. P. 329–353.
2. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1990. V. 35, N 5. P. 431–449.
3. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикав. мат. журн. 1999. Т. 1, № 3. С. 33–43.
4. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Слабое интегральное представление мажорируемого ортогонально аддитивного оператора // Владикав. мат. журн. 1999. Т. 1, № 4. С. 22–39.
5. *Плиев М. А.* Операторы Урысона в пространствах со смешанной нормой // Владикав. мат. журн. 2007. Т. 9, № 3. С. 47–57.
6. *Ben Amor M. A., Pliev M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. Math. Analysis. 2013. V. 7, N 58. P. 2853–2860.
7. *Gumenchuk A. V., Pliev M. A., Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Mat. Stud. 2014. V. 41, N 2. P. 214–219.
8. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity. 2014. V. 18, N 4. P. 641–667.
9. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators // Int. J. Math. Analysis. 2014. V. 8, N 22. P. 1051–1059.
10. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
11. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
12. *Jech T.* Set theory. Berlin: Springer-Verl., 2003.

13. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

14. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow operators on function spaces and vector lattices. Berlin: De Gruyter, 2013. (De Gruyter Stud. Math.; V. 45).

Статья поступила 28 апреля 2015 г., окончательный вариант — 21 декабря 2015 г.

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
plimarat@yandex.ru

Попов Михаил Михайлович
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы 58012, Украина;
Institute of Mathematics, Pomeranian University in Slupsk,
Slupsk, Poland
misham.popov@gmail.com