Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 510.67

СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫЕ СЛАБО О–МИНИМАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ КОНЕЧНОГО РАНГА ВЫПУКЛОСТИ

Б. Ш. Кулпешов

Аннотация. Представлено полное описание счетно категоричных слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.405

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, ранг выпуклости.

1. Предварительные сведения

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает, что $A < \{b\}$. Через A^+ (соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ $(b < A)$.

Определение 1.1 [2]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно;

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечное число элементов b_i, $i \in \omega$, такие, что

• для любых $i, j \in \omega$ всякий раз, когда $i \neq j$, имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

• для каждого $i \in \omega$ $\quad RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$;

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то говорят что $RC(\phi(x))$ *определяется.* В противном случае (т. е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α) полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Определение 1.2 [3]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M $|A|^+$-насыщенна и $p, q \in S_1(A)$ неалгебраические. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Лемма 1.3 [3, следствие 34(iii)]. *Отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1}$ $\varnothing$-определимо и $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \quad \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$. Для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ обозначаем через $[\bar{a}]$ $\sim$-класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\varnothing$-определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ в том и только в том случае, если $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае *$\varnothing$-определимым сортом*) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ — дедекиндово пополнение структуры M, и считаем $\overline{Z}$ естественно вложенной в $\overline{M}$. Аналогично можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 1.4 [1]. Пусть M — линейно упорядоченная структура, $D \subseteq M$ бесконечно, $K \subseteq \overline{M}$ и $f : D \to K$ — функция. Будем говорить, что f *локально возрастающая* (*локально убывающая, локально константа*) на D, если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Будем также говорить, что функция f *локально монотонная* на множестве $D \subseteq M$, если f либо локально возрастающая, либо локально убывающая на D.

Предложение 1.5 [4]. *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$ и $p \in S_1(A)$ неалгебраический. Тогда любая функция в A-определимый сорт, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.*

Пусть f — A-определимая функция на $D \subseteq M$, E — A-определимое отношение эквивалентности на D. Говорят, что f *строго возрастающая* (*убывающая*) *на D/E*, если для любых $a, b \in D$ с условием $a < b \wedge \neg E(a, b)$ имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Определение 1.6 [5, 6]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $B, D \subseteq M$, $A \subseteq \overline{M}$ — B-определимый сорт и $f : D \to A$ — B-определимая функция, являющаяся локально возрастающей (убывающей) на D. Будем говорить, что функция f *имеет глубину* n на множестве D, если существуют отношения эквивалентности $E_1(x,y),\dots,E_n(x,y)$, разбивающие D на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $2 \le i \le n$ каждый E_i-класс разбивается на бесконечное число бесконечных выпуклых E_{i-1}-подклассов и выполняются следующие условия:

• f строго возрастающая (убывающая) на каждом E_1-классе;

• f локально убывающая (возрастающая) на D/E_k для любого нечетного $k \le n$ (или, что то же, f строго убывающая (возрастающая) на каждом $E_{k+1}(a,M)/E_k$ для любого $a \in D$);

• f локально возрастающая (убывающая) на D/E_k для любого четного $k \le n$;

• f строго монотонная на D/E_n.

В этом случае функцию f будем называть *локально возрастающей* (*убывающей*) *глубины* n.

Очевидно, что строго возрастающая (убывающая) функция *локально возрастающая* (*убывающая*) *глубины* 0.

Теорема 1.7 [6]. *Пусть T — слабо о-минимальная теория. Тогда любая функция в определимый сорт имеет конечную глубину.*

Мы естественным образом расширяем определение 1.6, вводя понятие *локально константной функции глубины* n, если в данном определении функция f является константой на каждом E_1-классе. Заметим, что в этом случае функция f может быть как локально возрастающей, так и локально убывающей на D/E_1. В нижеследующих трех примерах функция f является локально константой.

Пример 1.8 [1]. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q, упорядоченной, как обычно, а P_1 с $Q \times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{Dom}(f) = P_1(M)$ и $\mathrm{Range}(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m)) = n$ для всех $(n,m) \in Q \times Q$.

Можно доказать, что M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}, q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\varnothing)$. Возьмем произвольный $a \in p(M)$. Тогда существует единственный $b \in q(M)$ такой, что $f(a) = b$, т. е. $b \in \mathrm{dcl}(\{a\})$.

Рассмотрим формулу

$$E(x,y) := P_1(x) \wedge P_1(y) \wedge \exists z\,[P_2(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z].$$

Можно понять, что $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Утверждаем, что f — локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, т. е. f — константа на каждом E-классе, строго возрастающая на $P_1(M)/E$.

Пример 1.9. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, E_1^q, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с $Q \times Q \times Q$, упорядоченной лексикографически, а P_2 с $Q \times Q$, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x,y)$ и $E_2^p(x,y)$ — отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (n_1, m_1, l_1)$, $y = (n_2, m_2, l_2) \in Q \times Q \times Q$

$$E_1^p(x,y) \Leftrightarrow n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2, \quad E_2^p(x,y) \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Аналогично определяется интерпретация бинарного предиката $E_1^q(x,y)$: это отношение эквивалентности на $P_2(M)$ такое, что для всех $x = (n_1, m_1)$, $y = (n_2, m_2) \in Q \times Q$

$$E_1^q(x,y) \Leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{Dom}(f) = P_1(M)$ и $\mathrm{Range}(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m,l)) = (-n, m)$ для всех $(n,m,l) \in Q \times Q \times Q$.

Может быть доказано, что M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p := \{P_1(x)\}$, $q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\varnothing)$.

Утверждаем, что функция f является локально константой глубины 2 на $P_1(M)$, т. е. f — константа на каждом E_1^p-классе, строго возрастающая на каждом $E_2(a,M)/E_1$, где $a \in P_1(M)$, и строго убывающая на $P_1(M)/E_2$.

Если в примере 1.9 f определить следующим образом: $f((n,m,l)) = (n, -m)$ для всех $(n,m,l) \in Q \times Q \times Q$, то получим, что f — локально константа глубины 2 на $P_1(M)$, при этом f — константа на каждом E_1^p-классе, строго убывающая на каждом $E_2(a,M)/E_1$, где $a \in P_1(M)$, и строго возрастающая на $P_1(M)/E_2$.

Если в примере 1.9 f положить $f((n,m,l)) = (-n, -m)$ для всех $(n,m,l) \in Q \times Q \times Q$, то получим, что f — локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, при этом f — константа на каждом E_1^p-классе и строго убывающая на $P_1(M)/E_1$.

Пример 1.10. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, \dots, E_{n-1}^p, E_1^q, E_2^q, \dots, E_{k-1}^q, f^1 \rangle$ (где $k < n$) — линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с Q^n, упорядоченной лексикографически, а P_2 с Q^k, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x,y)$, $\dots$, $E_{n-1}^p(x,y)$ — это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Q^n$ и для любого $1 \le i \le n-1$

$$E_i^p(x,y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n-i} = y_{n-i}.$$

Аналогично определяются интерпретации бинарных предикатов $E_1^q(x,y), \dots, E_{k-1}^q(x,y)$: это отношения эквивалентности на $P_2(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Q^k$ и для любого $1 \le i \le k-1$

$$E_i^q(x,y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{k-i} = y_{k-i}.$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{Dom}(f) = P_1(M)$ и $\mathrm{Range}(f) = P_2(M)$ и определяется посредством

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = ((-1)^{k-1}x_1, (-1)^{k-2}x_2, \dots, (-1)^2 x_{k-2}, (-1)^1 x_{k-1}, x_k)$$

для всех $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q^n$.

Очевидно, что $E_1^p(a,M) \subset E_2^p(a,M) \subset \dots \subset E_{n-1}^p(a,M)$ для всех $a \in P_1(M)$ и $E_1^q(b,M) \subset E_2^q(b,M) \subset \dots \subset E_{k-1}^q(b,M)$ для всех $b \in P_2(M)$.

Утверждаем, что f — локально константа глубины k на $P_1(M)$, а именно f — константа на каждом E^p_{n-k}-классе, строго возрастающая на каждом $E^p_{n-k+1}(a,M)/E^p_{n-k}$, строго убывающая на каждом $E^p_{n-k+2}(a,M)/E^p_{n-k+1},\dots$. Наконец, если $n-k$ нечетное, то f строго убывающая на $P_1(M)/E^p_{n-1}$; если $n-k$ четное, то f строго возрастающая на $P_1(M)/E^p_{n-1}$.

Определение 1.11 [7]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A\subseteq M$ и $p\in S_1(A)$ неалгебраический.

(1) A-определимая формула $F(x,y)$ называется *p-стабильной*, если существуют $\alpha,\gamma_1,\gamma_2\in p(M)$ такие, что $F(M,\alpha)\setminus\{\alpha\}\neq\varnothing$ и $\gamma_1<F(M,\alpha)<\gamma_2$.

(2) p-Стабильная формула $F(x,y)$ называется *выпуклой вправо* (*влево*), если существует $\alpha\in p(M)$ такой, что $F(M,\alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M,\alpha)$ и $\alpha\in F(M,\alpha)$.

Пусть $F_1(x,y),F_2(x,y)$ — p-стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x,y)$ *больше чем* $F_1(x,y)$, если существует $\alpha\in p(M)$ такой, что $F_1(M,\alpha)\subset F_2(M,\alpha)$.

Определение 1.12 [8]. Будем говорить, что p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x,y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha,\beta\in p(M)$ таких, что $M\models F(\beta,\alpha)$, имеет место

$$M\models\forall x\,[x\geq\beta\to[F(x,\alpha)\leftrightarrow F(x,\beta)]]\quad(M\models\forall x\,[x\leq\beta\to[F(x,\alpha)\leftrightarrow F(x,\beta)]]).$$

Пример 1.13. Пусть $M=\langle Q,=,<,R^2\rangle$, где M — линейно упорядоченная структура, Q — упорядочение рациональных чисел, $M\models R(b,a)\Leftrightarrow a\leq b<a+\sqrt{2}$ для любых $a,b\in M$ и, следовательно, $R(M,a)=\{b\in M\mid a\leq b<a+\sqrt{2}\}$ и $R(a,M)=\{b\in M\mid a-\sqrt{2}<b\leq a\}$.

Можно доказать, что M является слабо о-минимальной структурой. Также можно понять, что $R(x,y)$ p-стабильная выпуклая вправо и не является эквивалентность-генерирующей.

Лемма 1.14 [8]. *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A\subseteq M$, $p\in S_1(A)$ неалгебраический и M $|A|^+$-насыщенна. Предположим что $F(x,y)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула, так что $F(x,y)$ — эквивалентность-генерирующая. Тогда*

1) *$G(x,y):=F(y,x)$ — p-стабильная выпуклая влево формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей.*

2) *$E(x,y):=F(x,y)\vee F(y,x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на выпуклые классы.*

Теорема 1.15 [8]. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M\models T$, $A\subseteq M$ и $p\in S_1(A)$ неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула эквивалентность-генерирующая.*

Следствие 1.16 [9, 8]. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M\models T$ и $p\in S_1(\varnothing)$ неалгебраический. Пусть $\{F_1(x,y),\dots,F_m(x,y)\}$ — полный список всех p-стабильных выпуклых вправо формул, так что $F_1(M,\alpha)\subset\cdots\subset F_m(M,\alpha)$ для любого $\alpha\in p(M)$. Тогда $\varnothing$-определимыми отношениями эквивалентности с бесконечными выпуклыми классами на $p(M)$ являются в точности E_i для $1\leq i\leq m$, данные формулой $E_i(x,y):=F_i(x,y)\vee F_i(y,x)$, так что имеют место следующие утверждения:*

• *E_m разбивает $p(M)$ на бесконечное число E_m-классов, каждый E_m-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным порядком без концевых точек;*

• *для каждого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ E_i разбивает каждый E_{i+1}-класс на бесконечное число E_i-классов, каждый E_i-класс выпуклый и открытый, так что E_i-подклассы каждого E_{i+1}-класса являются плотно упорядоченными без концевых точек.*

Вспомним, что полная теория T называется *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Теорема 1.17 [10]. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория. Тогда T бинарная в том и только в том случае, если T имеет конечный ранг выпуклости.*

2. Основная теорема

Определение 2.1 [10]. *Рангом выпуклости* 1-*типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т. е.

$$RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}.$$

В примере 1.8 имеем $p \not\perp^w q$, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$, $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для некоторых $a \in p(M)$ и $b \in q(M)$, $RC(p) = 2$, $RC(q) = 1$.

Всюду в этом разделе рассматриваем только счетно категоричные слабо о-минимальные теории конечного ранга выпуклости. Будем обозначать через n_p ранг выпуклости типа p, т. е. $RC(p)$, поскольку в силу теоремы 1.17 $RC(p) < \omega$ для любого неалгебраического $p \in S_1(\varnothing)$.

Предложение 2.2. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p, q \in S_1(\varnothing)$ неалгебраические и $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$RC(p) > RC(q)$;*

(2) *не существует $\varnothing$-определимой биекции $f : p(M) \to q(M)$;*

(3) *$\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для любого $b \in q(M)$;*

(4) *существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$.*

Доказательство предложения 2.2. (1) ⇒ (2) Допустим противное: существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся биекцией $p(M)$ на $q(M)$. Поскольку $RC(p) = n_p$, существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y)$, $\dots$, $E_{n_p-1}(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a, M) \subset \dots \subset E_{n_p-1}(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$. Рассмотрим для каждого $1 \leq i \leq n_p - 1$ следующую формулу:

$$E'_i(x, y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_i(t_1, t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y].$$

Очевидно, что $E'_1(x, y), \dots, E'_{n_p-1}(x, y)$ — отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_1(b, M) \subset \dots \subset E'_{n_p-1}(b, M)$, откуда $RC(q) \geq n_p$; противоречие условию.

(2) $\Rightarrow$ (3) Поскольку $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$, существуют $b \in q(M)$ и $\varnothing$-определимая формула $\phi(x,y)$ такие, что $M \models \exists! y \phi(a,y) \wedge \phi(a,b)$. Допустим противное: $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p(M) \neq \varnothing$. Покажем, что $a \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. Если это не так, то существует $a_1 \in p(M)$ такой, что $a_1 \neq a$ и $a_1 \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. Но тогда, поскольку $b \in \mathrm{dcl}(\{a\})$, имеем $a_1 \in \mathrm{dcl}(\{a\})$. Можно доказать, что $\mathrm{dcl}(\{a\})$ бесконечно; противоречие счетной категоричности. Таким образом, $a \in \mathrm{dcl}(\{b\})$. Тем самым существует $\varnothing$-определимая формула $\phi'(x,y)$ такая, что $M \models \exists! y \phi'(a,y) \wedge \exists! x \phi'(x,b) \wedge \phi'(a,b)$.

Определим функцию f следующим образом: $f(a) = b \Leftrightarrow \phi'(a,b)$. Нетрудно понять, что f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$; противоречие нашему предположению.

(3) $\Rightarrow$ (4) Допустим противное: $f : p(M) \to q(M)$ — $\varnothing$-определимая функция и f не является локально константой на $p(M)$. Тогда f должна быть локально монотонной на $p(M)$, т. е. либо локально возрастающей, либо локально убывающей. Но тогда f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$; противоречие с ранее доказанным.

(4) $\Rightarrow$ (1) Пусть $f : p(M) \to q(M)$ — $\varnothing$-определимая функция, являющаяся локально константой на $p(M)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge [x < y \to \forall t(x < t < y \to f(x) = f(t) = f(y))] \\ \wedge [x > y \to \forall t(x > t > y \to f(x) = f(t) = f(y))].$$

Нетрудно понять, что $E(x,y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Поскольку $RC(p) = n_p$, существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x,y), \dots, E_{n_p-1}(x,y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a,M) \subset \dots \subset E_{n_p-1}(a,M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

Очевидно, что $E(x,y) \equiv E_i(x,y)$ для некоторого $1 \le i \le n_p - 1$. Тогда утверждаем, что $RC(q) = n_p - i$. Действительно, f является константой на каждом E_i-классе. Рассмотрим поведение функции f на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, где $a \in p(M)$. Она должна быть строго монотонной на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, иначе появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $\overline{E}(x,y)$ такое, что $E_i(a,M) \subset \overline{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$; противоречие с тем, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения $E_i(x,y)$ среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f строго монотонна на каждом $E_{k+1}(a,M)/E_k$, где $i \le k \le n_p - 2$, и f строго монотонна на $p(M)/E_{n_p-1}$. Рассмотрим для каждого $i+1 \le j \le n_p - 1$ следующую формулу:

$$E'_j(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_j(t_1,t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y].$$

Очевидно, что $E'_{i+1}(x,y), \dots, E'_{n_p-1}(x,y)$ — отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_{i+1}(b,M) \subset \dots \subset E'_{n_p-1}(b,M)$, откуда $RC(q) \ge n_p - i$. Далее, если существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E^q(b,M) \subset E'_{i+1}(b,M)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$\widehat{E}(x,y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1,t_2) \wedge f(x) = t_1 \wedge f(y) = t_2].$$

Очевидно, что $E_i(a,M) \subset \widehat{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$; опять противоречие с тем, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения $E_i(x,y)$ среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что не существует $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающего $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_k(b,M) \subset E^q(b,M) \subset E'_{k+1}(b,M)$ для любого $i+1 \le k \le n_p-2$ или $E'_{n_p-1}(b,M) \subset E^q(b,M)$. Таким образом, $RC(q) = n_p - i$. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$ и $p, q \in S_1(\varnothing)$ неалгебраические, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда*

(1) Если $RC(p) = RC(q)$, то существует единственная $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f : p(M) \to q(M)$, имеющая глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$.

(2) Если $RC(p) > RC(q)$, то существует единственная $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой глубины k для некоторого $1 \le k \le n_q$.

Доказательство следствия 2.3. (1) В силу предложения 2.2 существует $\varnothing$-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$, а ввиду предложения 1.5 f должна быть локально монотонной на $p(M)$. Поскольку $RC(p) = n_p$, f имеет глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$. Покажем, что функция f единственна. Допустим противное: существует $\varnothing$-определимая функция g такая, что $g(a) \neq f(a)$ для некоторого $a \in p(M)$. Пусть для определенности $f(a) = b$ и $g(a) = b_1$ для некоторых $b, b_1 \in q(M)$. Рассмотрим формулу $\phi(b,y) := \exists x[f(x) = b \wedge g(x) = y]$. Очевидно, что $M \models \exists! \phi(b,y) \wedge \phi(b,b_1)$, т. е. $b_1 \in \mathrm{dcl}(\{b\})$, откуда получаем, что $\mathrm{dcl}(\{b\})$ бесконечно; противоречие счетной категоричности T.

(2) В силу предложения 2.2 существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$. Тогда f является константой на каждом $E^p_{n_p-n_q}$-классе, локально монотонна на $p(M)/E^p_{n_p-n_q}$ и имеет глубину k для некоторого $1 \le k \le n_q$. Допустим противное: существует $\varnothing$-определимая функция $g : p(M) \to q(M)$, отличная от f. Тогда существует некоторый $a \in p(M)$ такой, что $f(a) \neq g(a)$. Функция g не может биекцией, иначе получим, что $RC(p) = RC(q)$. Поэтому она должна быть локально константой на $p(M)$, при этом также является константой на каждом $E^p_{n_p-n_q}$-классе. Рассматривая формулу $\phi(b,y)$ из доказательства п. (1), получим, что $\mathrm{dcl}(\{b\})$ бесконечно; противоречие счетной категоричности T. $\square$

Далее понадобится понятие (p_1,p_2)-секатора, введенное в [10]. Пусть $A \subseteq M$ и $p_1, p_2 \in S_1(A)$ неалгебраические, $p_1 \not\perp^w p_2$. Говорят, что A-определимая формула $\phi(x,y)$ является (p_1,p_2)-*секатором*, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi(a,M) \subset p_2(M)$, $\phi(a,M)$ выпукло и $\phi(a,M)^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ — (p_1,p_2)-секаторы, то говорят, что $\phi_1(x,y)$ *меньше чем* $\phi_2(x,y)$, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi_1(a,M) \subset \phi_2(a,M)$. Очевидно, что если $p_1, p_2 \in S_1(A)$ неалгебраические и $p_1 \not\perp^w p_2$, то существует (p_1,p_2)-секатор и множество всех (p_1,p_2)-секаторов линейно упорядочено. Также очевидно, что для любого (p_1,p_2)-секатора $\phi(x,y)$ функция $f(x) := \sup \phi(x,M)$ не является константой на $p_1(M)$.

Предложение 2.4. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости и $p, q \in S_1(\varnothing)$ неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Тогда $RC(p) > RC(q)$ в том и только в том случае, если для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$,* *разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E-классе.*

Доказательство предложения 2.4. Поскольку $RC(p) = n_p$, существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), \dots, E_{n_p-1}(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a, M) \subset \dots \subset E_{n_p-1}(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

($\Rightarrow$) Предположим, что $RC(p) > RC(q)$. Допустим противное: существует (p, q)-секатор $R(x, y)$ такой, что для любого $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,\ y)$, разбивающего $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, функция $f(x) := \sup R(x, M)$ не является константой на каждом E-классе. Тогда f не является константой на каждом E_1-классе. Тем самым она должна быть строго монотонной (строго возрастающей или строго убывающей) на каждом E_1-классе. Действительно, f не может быть локально монотонной (не строго монотонной) на каждом E_1-классе, иначе появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_0(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_0(a, M) \subset E_1(a, M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$; противоречие с тем, что $E_1(x, y)$ минимальное среди $\varnothing$-определимых нетривиальных отношений эквивалентности на $p(M)$.

Рассмотрим поведение функции f на каждом $E_2(a, M)/E_1$, где $a \in p(M)$. Она должна быть строго монотонной на каждом $E_2(a, M)/E_1$, иначе появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $\overline{E}(x, y)$ такое, что $E_1(a, M) \subset \overline{E}(a, M) \subset E_2(a, M)$ вопреки тому, что E_2 является непосредственным последователем отношения $E_1(x, y)$ среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f строго монотонная на каждом $E_{k+1}(a, M)/E_k$, где $1 \le k \le n_p - 2$, и строго монотонная на $p(M)/E_{n_p-1}$. Рассмотрим для каждого $1 \le i \le n_p - 1$ следующую формулу:

$$E'_i(x, y) := [x \le y \to \exists t_1 \exists t_2 (E_i(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x \le y < f(t_2))] \\ \wedge [x > y \to \exists t_1 \exists t_2 (E_1(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < y < x < f(t_2))].$$

Можно понять, что $E'_1(x, y), \dots, E'_{n_p-1}(x, y)$ — отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_1(b, M) \subset \dots \subset E'_{n_p-1}(b, M)$, откуда $RC(q) \ge n_p$; противоречие с нашим предположением.

($\Leftarrow$) Пусть для любого (p, q)-секатора $R(x, y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E-классе. Покажем, что $RC(p) > RC(q)$. Возьмем произвольный (p, q)-секатор $R(x, y)$. Согласно предположению существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x, M)$ является константой на каждом E-классе. Предположим, что $E(x, y)$ максимальное с таким свойством. Очевидно, что $E(x, y) \equiv E_i(x, y)$ для некоторого $1 \le i \le n_p - 1$. Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, где $a \in p(M)$. Функция f не может быть константой на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, иначе она константа на каждом E_{i+1}-классе вопреки максимальности $E_i(x, y)$ с таким свойством. Следовательно, f должна быть строго монотонной на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, иначе если она локально монотонная (не строго монотонная) на каждом $E_{i+1}(a, M)/E_i$, то появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $\overline{E}(x, y)$ такое, что $E_i(a, M) \subset \overline{E}(a, M) \subset E_{i+1}(a, M)$; противоречие с тем, что

E_{i+1} является непосредственным последователем отношения $E_i(x,y)$ среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f строго монотонна на каждом $E_{k+1}(a,M)/E_k$, где $i \le k \le n_p-2$, и строго монотонна на $p(M)/E_{n_p-1}$. Рассмотрим для каждого $i+1 \le j \le n_p-1$ следующую формулу:

$$E'_j(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_j(t_1,t_2) \\ \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge f(t_1) < y < f(t_2)].$$

Очевидно, что $E'_{i+1}(x,y), \dots, E'_{n_p-1}(x,y)$ — отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_{i+1}(b,M) \subset \dots \subset E'_{n_p-1}(b,M)$, откуда $RC(q) \ge n_p - i$. Если существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E^q(b,M) \subset E'_{i+1}(b,M)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$\widehat{E}(x,y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1,t_2) \wedge f(x) < t_1 < f(y) \wedge f(x) < t_2 < f(y)].$$

Очевидно, что $E_i(a,M) \subset \widehat{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$; опять противоречие тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения $E_i(x,y)$ среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что не существует $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающего $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_k(b,M) \subset E^q(b,M) \subset E'_{k+1}(b,M)$ для любого $i+1 \le k \le n_p-2$ или $E'_{n_p-1}(b,M) \subset E^q(b,M)$. Таким образом, $RC(q) = n_p - i$, т. е. $RC(p) > RC(q)$. $\square$

Следствие 2.5. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости и $p, q \in S_1(\varnothing)$ неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Тогда $RC(p) = RC(q)$ в том и только в том случае, когда существует (p,q)-секатор $R(x,y)$ такой, что функция $f(x) := \sup R(x,M)$ локально монотонна (не локально константа) на $p(M)$.*

Лемма 2.6. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p, q \in S_1(\varnothing)$ неалгебраические и $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \ne \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$.*

(1) Если $RC(p) = RC(q)$, то существует в точности $2n_p$ (p,q)-секаторов.

(2) Если $RC(p) > RC(q)$, то существует в точности $2n_q$ (p,q)-секаторов.

Доказательство леммы 2.6. (1) Пусть $RC(p) = RC(q)$. В силу следствия 2.3 существует единственная $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f : p(M) \to q(M)$, имеющая глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$. Тогда рассмотрим следующие формулы:

$$\phi^0_-(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge y < f(x), \quad \phi^0_+(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge y \le f(x),$$

$$\phi^i_-(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \forall t \big[E^p_i(x,t) \to y < f(t)\big], \quad 1 \le i \le n_p - 1,$$

$$\phi^i_+(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t \big[E^p_i(x,t) \wedge y < f(t)\big], \quad 1 \le i \le n_p - 1.$$

Очевидно, что эти формулы являются (p,q)-секаторами, причем

$$\phi^{n_p-1}_-(a,M) \subset \dots \subset \phi^1_-(a,M) \subset \phi^0_-(a,M) \\ \subset \phi^0_+(a,M) \subset \phi^1_+(a,M) \subset \dots \subset \phi^{n_p-1}_+(a,M).$$

Утверждаем, что других (p,q)-секаторов нет. Допустим противное: существует (p,q)-секатор $\Phi(x,y)$, отличный от этих $2n_p$ (p,q)-секаторов. Тогда возможны следующие случаи:

$$\phi_-^{i+1}(a,M) \subset \Phi(a,M) \subset \phi_-^i(a,M) \quad \text{для некоторого } 0 \le i \le n_p - 2,$$

$$\phi_+^{i}(a,M) \subset \Phi(a,M) \subset \phi_+^{i+1}(a,M) \quad \text{для некоторого } 0 \le i \le n_p - 2,$$

$$\Phi(a,M) \subset \phi_-^{n_p-1}(a,M) \quad \text{или} \quad \phi_+^{n_p-1}(a,M) \subset \Phi(a,M).$$

Не умаляя общности, предположим что $\phi_-^{i+1}(a,M) \subset \Phi(a,M) \subset \phi_-^i(a,M)$ для некоторого $0 \le i \le n_p - 2$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Поскольку f локально монотонная глубины k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$, она должна быть строго возрастающей или строго убывающей на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$ для любого $a \in p(M)$. Для определенности предположим первое. Тогда рассмотрим формулу

$$G^\Phi(z,a) := U_p(z) \wedge z \le a \wedge \forall y[U_q(y) \wedge y < f(z) \to \Phi(a,y)].$$

Нетрудно понять, что $G^\Phi(z,x)$ — p-стабильная выпуклая влево формула, причем $G^\Phi(z,x)$ меньше чем $G_{i+1}(z,x)$ и больше чем $G_i(z,x)$, где $G_{i+1}(z,x) := E_{i+1}^p(z,x) \wedge z \le x$ и $G_i(z,x) := E_i^p(z,x) \wedge z \le x$ также p-стабильные выпуклые влево формулы. В силу теоремы 1.15 и леммы 1.14 получаем, что $RC(p) \ge n_p + 1$; противоречие нашему допущению. Таким образом, других (p,q)-секаторов нет.

Пусть $RC(p) > RC(q)$. В силу следствия 2.3 существует единственная $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой глубины k на $p(M)$ для некоторого $1 \le k \le n_q$, причем f является константой на каждом $E_{n_p-n_q}^p$-классе и локально монотонна на $p(M)/E_{n_p-n_q}^p$. Тогда $\phi_-^i(a,M) = \phi_-^0(a,M)$ и $\phi_+^0(a,M) = \phi_+^i(a,M)$ для каждого $1 \le i \le n_p - n_q$. □

Лемма 2.7. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p, q \in S_1(\varnothing)$ неалгебраические и $p \not\perp^w q$, $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) = \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$.*

(1) Если $RC(p) = RC(q)$, то существует в точности $2n_p - 1$ (p,q)-секаторов.

(2) Если $RC(p) > RC(q)$, то существует в точности $2n_q - 1$ (p,q)-секаторов.

Доказательство леммы 2.7. (1) Пусть $RC(p) = RC(q)$. В силу следствия 2.5 существует (p,q)-секатор $\phi(x,y)$ такой, что $f(x) := \sup \phi(x,M)$ локально монотонна на $p(M)$. Поскольку $RC(p) = n_p$, то f имеет глубину k для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_-^i(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \forall t\big[E_i^p(x,t) \to \phi(t,y)\big], \quad 1 \le i \le n_p - 1,$$

$$\Phi_+^i(x,y) := U_p(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t\big[E_i^p(x,t) \wedge \phi(t,y)\big], \quad 1 \le i \le n_p - 1.$$

Очевидно, что эти формулы являются (p,q)-секаторами, причем

$$\Phi_-^{n_p-1}(a,M) \subset \cdots \subset \Phi_-^1(a,M) \subset \phi(a,M) \subset \Phi_+^1(a,M) \subset \cdots \subset \Phi_+^{n_p-1}(a,M).$$

Аналогично доказательству леммы 2.6 можно показать, что других (p,q)-секаторов нет, если в формуле $G^\Phi(z,x)$ вместо конъюнктивного члена $y < f(z)$ рассматривать $\phi(z,y)$.

(2) Пусть $RC(p) > RC(q)$. Поскольку $p \not\perp^w q$, в силу предложения 2.4 для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом

E-классе. Выберем наибольшее отношение эквивалентности $E_i^p(x,y)$ на $p(M)$ такое, что $f(x) := \sup R(x,M)$ для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ является константой на каждом E_i^p-классе. Так как $E_i^p(x,y)$ наибольшее с таким свойством, существует (p,q)-секатор $\phi(x,y)$ такой, что $f(x) := \sup\phi(x,M)$ — константа на каждом E_i^p- классе и f локально монотонная на $p(M)/E_i^p$. Очевидно, что $i = n_p - n_q$. Тогда $\Phi_-^j(a,M) = \phi(a,M) = \Phi_+^j(a,M)$ для каждого $1 \le j \le n_p - n_q$. Аналогично можно показать, что других (p,q)-секаторов нет. $\square$

Назовем (p,q)-секатор $\phi(x,y)$ из доказательства леммы 2.7 *базисным*, поскольку все остальные (p,q)-секаторы определяются с помощью $\phi(x,y)$ однозначно.

Следующая теорема полностью описывает счетно категоричные слабо о-минимальные теории конечного ранга выпуклости.

Теорема 2.8. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости и $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда*

(i) *Существует конечное множество $C = \{c_0,\dots,c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\varnothing$-определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое, что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \le n$ и для каждого $j \in \{1,\dots,n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)c_{j-1} < x < c_j$, либо $I_j = \{x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j,\dots,p_{k_j}^j \in S_1(\varnothing)$, так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$.*

(ii) *Для каждого неалгебраического $p \in S_1(\varnothing)$ существует натуральное число $n_p \ge 1$ такое, что $RC(p) = n_p$, т. е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x,y)$, $E_2^p(x,y)$, $\dots$, $E_{n_p-1}^p(x,y)$ такие, что*

• *$E_{n_p-1}^p$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E_{n_p-1}^p$-классов, каждый $E_{n_p-1}^p$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек;*

• *для каждого $i \in \{1,\dots,n_p-2\}$ отношение E_i^p разбивает каждый E_{i+1}^p-класс на бесконечное число E_i^p-классов, каждый E_i^p-класс выпуклый и открытый, так что E_i^p-подклассы каждого E_{i+1}^p-класса плотно упорядочены без концевых точек.*

(iii) *Для любых неалгебраических $p,q \in S_1(\varnothing)$ таких, что $p \not\perp^w q$,*

(1) *если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \ne \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$, то существует единственная $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, так что*

— в случае $RC(p) = RC(q)$ f — локально монотонная биекция глубины k на $p(M)$ для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$,

— в случае $RC(p) > RC(q)$ f — локально константа глубины k на $p(M)$ для некоторого $1 \le k \le n_q$, т. е. f является константой на каждом $E_{n_p-n_q}^p$-классе и локально монотонная на $p(M)/E_{n_p-n_q}^p$;

(2) *если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) = \varnothing$ для всех $a \in p(M)$, то*

— в случае $RC(p) = RC(q)$ существуют в точности $2n_p - 1$ (p,q)-секаторов $S_1(x,y)$, $\dots$, $S_{2n_p-1}(x,y)$ таких, что $S_1(a,M) \subset \dots \subset S_{2n_p-1}(a,M)$ для всех $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_{n_p}(x,M)$ локально монотонная глубины k на $p(M)$ для некоторого $0 \le k \le n_p - 1$, и

$$S_i(x,y) \equiv \forall t\big[E_{n_p-i}^p(x,t) \to S_{n_p}(t,y)\big], \quad 1 \le i \le n_p - 1,$$

$$S_j(x,y) \equiv \exists t\big[E_{j-n_p}^p(x,t) \wedge S_{n_p}(t,y)\big], \quad n_p + 1 \le j \le 2n_p - 1;$$

— *в случае* $RC(p) > RC(q)$ *существуют в точности* $2n_q - 1$ (p,q)*-секаторов* $S_1(x,y), \ldots, S_{2n_q-1}(x,y)$ *таких, что* $S_1(a,M) \subset \cdots \subset S_{2n_q-1}(a,M)$ *для всех* $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_{n_q}(x,M)$ *является константой на каждом* $E^p_{n_p-n_q}$*-классе и локально монотонная на* $p(M)/\ E^p_{n_p-n_q}$, *и*

$$S_i(x,y) \equiv \forall t\big[E^p_{n_p-i}(x,t) \to S_{n_q}(t,y)\big], \quad 1 \leq i \leq n_q - 1,$$

$$S_j(x,y) \equiv \exists t\big[E^p_{n_p-2n_q+j}(x,t) \wedge S_{n_q}(t,y)\big], \quad n_q + 1 \leq j \leq 2n_q - 1,$$

так что T *допускает элиминацию кванторов до языка*

$$\begin{aligned}\{=,<\} \cup \{c_i : i \leq n\} \cup \left\{U_s(x) : s \leq r = \sum_{j=1}^{n} k_j\right\}& \\ \cup \left\{E^{p_s}_l(x,y) : RC(p_s) = n_{p_s},\ 1 \leq l \leq n_{p_s} - 1 \text{ и } s \leq r\right\}& \\ \cup \{f_{i,j} : \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) \neq \varnothing \text{ для некоторого } a \in p_i(M), RC(p_i) \geq RC(p_j)\}& \\ \cup \{S_{i,j}(x,y) : p_i \not\perp^w p_j, \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) = \varnothing& \\ \text{для всех } a \in p_i(M), RC(p_i) \geq RC(p_j),& \\ S_{i,j}(x,y) \text{ — базисный } (p_i,p_j)\text{-секатор}\},&\end{aligned}$$

где $U_s(x)$ *изолирует тип* p_s *для каждого* $s \leq r$.

Более того, любому упорядочению с выделенными элементами, как в (i)–(iii), *соответствует счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, как выше.*

Доказательство теоремы 2.8. (i) Пусть $C = \{c \in M : c$ является $\varnothing$-определимым в $M\}$. В силу счетной категоричности T множество C должно быть конечным. Пусть $C(\cup\{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов) перечислено, как $\{c_0, \ldots, c_n\}$. Далее, предположим, что $I_j = \{x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\} \neq \varnothing$. Тогда I_j должно быть плотным без концевых точек. Если I_j 1-неразличимо над $\varnothing$, то существует $p^j \in S_1(\varnothing)$ такой, что $I_j = p^j(M)$, т. е. $k_j = 1$. Если I_j не 1-неразличимо над $\varnothing$, то в силу счетной категоричности существуют $k_j \in \omega$ и $p^j_1, \ldots, p^j_{k_j} \in S_1(\varnothing)$, так что $I_j = \bigcup\limits_{s=1}^{k_j} p^j_s(M)$.

(ii) Так как T имеет конечный ранг выпуклости, для каждого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\varnothing)$ существует некоторое натуральное число $n_p \geq 1$ такое, что $RC(p) = n_p$, откуда в силу следствия 1.16 существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E^p_1(x,y), \ldots, E^p_{n_p-1}(x,y)$ с требуемыми в формулировке свойствами. Более того, поскольку в силу теоремы 1.17 T бинарная, для любого $\alpha \in p(M)$ множества $E^p_1(M,\alpha)$ и $E^p_{j+1}(M,\alpha) \setminus E^p_j(M,\alpha)$ для каждого $1 \leq j \leq n_p - 2$ неразличимы над $\varnothing$.

(iii) Вытекает из следствия 2.3 и леммы 2.7.

Рассмотрим произвольные неалгебраические $p_i, p_j, p_k \in S_1(\varnothing)$ такие, что $p_i \not\perp^w p_j$, $p_j \not\perp^w p_k$ и $RC(p_i) \geq RC(p_j) \geq RC(p_k)$. Поскольку $p_i \not\perp^w p_k$ в силу леммы 1.3, покажем в явном виде однозначность определения $\varnothing$-определимой функции, отображающей $p_i(M)$ на $p_k(M)$, или базисного (p_i,p_k)-секатора, связывающего типы p_i и p_k.

Возможны следующие случаи.

Случай 1. $RC(p_i) = RC(p_j) = RC(p_k)$.

Случай 2. $RC(p_i) = RC(p_j) > RC(p_k)$.

Случай 3. $RC(p_i) > RC(p_j) = RC(p_k)$.

Случай 4. $RC(p_i) > RC(p_j) > RC(p_k)$.

При этом каждый случай разбивается на следующие подслучаи.

(a) $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) \neq \varnothing$ и $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p_k(M) \neq \varnothing$ для некоторых $a \in p_i(M)$ и $b \in p_j(M)$.

(b) $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) \neq \varnothing$ и $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p_k(M) = \varnothing$ для некоторых $a \in p_i(M)$ и $b \in p_j(M)$.

(c) $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) = \varnothing$ и $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p_k(M) \neq \varnothing$ для некоторых $a \in p_i(M)$ и $b \in p_j(M)$.

(d) $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) = \varnothing$ и $\mathrm{dcl}(\{b\}) \cap p_k(M) = \varnothing$ для некоторых $a \in p_i(M)$ и $b \in p_j(M)$.

Случай 1. (a) Существуют $\varnothing$-определимые локально монотонные биекции $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ и $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$. Очевидно, что $f_{i,k} := f_{j,k} \circ f_{i,j}$ является локально монотонной биекцией $p_i(M)$ на $p_k(M)$.

(b) Существуют $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$, так что $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ локально монотонна глубины $s \leq n_{p_i} - 1$ на $p_j(M)$. Очевидно, что $S_{i,k}(x, z) := \exists y[y = f_{i,j}(x) \wedge S_{j,k}(y, z)]$ является искомым (p_i, p_k)-секатором.

(c) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ такой, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ — локально монотонная на $p_i(M)$ и $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$. Тогда если $f_{j,k}$ строго возрастающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge z \leq f_{j,k}(y)\big].$$

Если $f_{j,k}$ строго убывающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[\neg S_{i,j}(x, y) \wedge S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge z \leq f_{j,k}(y)\big].$$

(d) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$ такие, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ и $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ локально монотонны на $p_i(M)$ и $p_j(M)$ соответственно. Если $f_{j,k}$ строго возрастающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge S_{j,k}(y, z)\big].$$

Если $f_{j,k}$ строго убывающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[\neg S_{i,j}(x, y) \wedge S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge S_{j,k}(y, z)\big].$$

Случай 2. (a) Существуют $\varnothing$-определимые функции $f_{i,j}$ и $f_{j,k}$, так что $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ — локально монотонная биекция и $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$ — локально константа на $p_j(M)$. Тогда очевидно, что $f_{i,k} := f_{j,k} \circ f_{i,j}$ является локально константой на $p_i(M)$.

(b) Существуют $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$, так что $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ является локально константой на $p_j(M)$. Тогда $S_{i,k}(x, z) := \exists y[y = f_{i,j}(x) \wedge S_{j,k}(y, z)]$.

(c) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ такой, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ локально монотонна на $p_i(M)$ и $\varnothing$-определимая функция $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$ является локально константой на $p_j(M)$. Тогда

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge z \leq f_{j,k}(y)\big].$$

(d) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$ такие, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ локально монотонна на $p_i(M)$ и $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ — локально константа на $p_j(M)$. Тогда

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge S_{j,k}(y, z)\big].$$

Случай 3. (a) Существуют $\varnothing$-определимые функции $f_{i,j}$ и $f_{j,k}$ такие, что $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ — локально константа на $p_i(M)$ и $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$ — локально монотонная биекция. Тогда очевидно, что $f_{i,k} := f_{j,k} \circ f_{i,j}$ является локально константой на $p_i(M)$.

(b) Существуют $\varnothing$-определимая функция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$, являющаяся локально константой на $p_i(M)$, и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$ такие, что $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ локально монотонна на $p_j(M)$. Тогда $S_{i,k}(x, z) := \exists y[y = f_{i,j}(x) \wedge S_{j,k}(y, z)]$.

(c) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ такой, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ является локально константой на $p_i(M)$, и $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$. Тогда если $f_{j,k}$ строго возрастающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge z \leq f_{j,k}(y)\big].$$

Если $f_{j,k}$ строго убывающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[\neg S_{i,j}(x, y) \wedge S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge z \leq f_{j,k}(y)\big].$$

(d) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$ такие, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ — локально константа на $p_i(M)$ и $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ локально монотонная на $p_j(M)$. Тогда если $f_{j,k}$ строго возрастающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge S_{j,k}(y, z)\big].$$

Если $f_{j,k}$ строго убывающая на каждом $E_1^{p_j}$-классе, то

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[\neg S_{i,j}(x, y) \wedge S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge S_{j,k}(y, z)\big].$$

Случай 4. (a) Существуют $\varnothing$-определимые функции $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ и $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$, являющиеся локально константами на $p_i(M)$ и $p_j(M)$ соответственно. Тогда очевидно, что $f_{i,k} := f_{j,k} \circ f_{i,j}$ является локально константой на $p_i(M)$.

(b) Существуют $\varnothing$-определимая функция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$, являющаяся локально константой на $p_i(M)$, и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$, так что $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ — локально константа на $p_j(M)$. Тогда $S_{i,k}(x, z) := \exists y[y = f_{i,j}(x) \wedge S_{j,k}(y, z)]$.

(c) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ такой, что $f_{i,j}(x) := \sup S_{i,j}(x, M)$ является локально константой на $p_i(M)$, и $\varnothing$-определимая функция $f_{j,k} : p_j(M) \to p_k(M)$, являющаяся локально константой на $p_j(M)$. Тогда

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge z \leq f_{j,k}(y)\big].$$

(d) Существуют (p_i, p_j)-секатор $S_{i,j}(x, y)$ и (p_j, p_k)-секатор $S_{j,k}(x, y)$ такие, что $f_{i,j}(x) : = \sup S_{i,j}(x, M)$ и $f_{j,k}(x) := \sup S_{j,k}(x, M)$ — локально константы на $p_i(M)$ и $p_j(M)$ соответственно. Тогда

$$S_{i,k}(x, z) := \exists y \exists y_1 \big[S_{i,j}(x, y) \wedge \neg S_{i,j}(x, y_1) \wedge E_1^{p_j}(y, y_1) \wedge S_{j,k}(y, z)\big].$$

Наконец, в силу бинарности T полный тип любого m-кортежа $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ элементов из M определяется формулой Ψ, состоящей из конъюнкции формул вида $x = y$, $x < y$, $c_i < x$, $x < c_i$, $U_s(x)$, $y = f_{i,j}(x)$, $y < f_{i,j}(x)$, $f_{i,j}(x) < y$, $S_{i,j}(x, y)$ и $E^s(x, y)$ и их отрицаний, которые имеют место на координатах кортежа $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, откуда следует утверждаемая элиминация кванторов. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. P. 5435–5483.

2. *Kulpeshov B. Sh.* Weakly o-minimal structures and some of their properties // J. Symb. Log. 1998. V. 63. P. 1511–1528.

3. *Baizhanov B. S.* Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // J. Symb. Log. 2001. V. 66. P. 1382–1414.

4. *Kulpeshov B. Sh.* Countably categorical quite o-minimal theories // J. Math. Sci. 2013. V. 188, N 4. P. 387–397.

5. *Вербовский В. В.* О глубине функций слабо о-минимальных структур и пример слабо о-минимальной структуры без слабо о-минимальной теории // Proc. Informatics and control problems inst. Almaty, 1996. P. 207–216.

6. *Verbovskiy V. V.* On formula depth on weakly o-minimal structures // Алгебра и теория моделей. Новосибирск, 1997. P. 209–223.

7. *Baizhanov B. S.* One-types in weakly o-minimal theories // Proc. Informatics and control problems inst. Almaty, 1996. P. 75–88.

8. *Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh.* On behaviour of 2-formulas in weakly *o*-minimal theories // Math. logic in Asia / Proc. 9th Asian Logic Conf. (S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, eds.) Singapore: World Sci., 2006. P. 31–40.

9. *Herwig B., Macpherson H. D., Martin G., Nurtazin A., Truss J. K.* On $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal structures // Ann. Pure Appl. Logic. 2000. V. 101. P. 65–93.

10. *Kulpeshov B. Sh.* Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Ann. Pure Appl. Logic. 2007. V. 45. P. 354–367.

Статья поступила 3 сентября 2015 г.

Кулпешов Бейбут Шайыкович
Международный университет информационных технологий,
ул. Манаса, 34а / Жандосова, 8а, Алматы 050040, Казахстан;
Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
b.kulpeshov@iitu.kz