Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РАДИАЛЬНО–СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ p–ЛАПЛАСИАНА

Ар. С. Терсенов

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле для неоднородного уравнения p-лапласиана с нелинейным источником. Получены новые достаточные условия существования слабого радиально-симметричного решения, а также априорные оценки решения и его производной. Достаточные условия разрешимости сформулированы в явном виде и показывают зависимость существования решения от размерности задачи, размеров области, показателя p, нелинейного источника и правой части, которая моделирует присутствие внешних массовых сил.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.521

Ключевые слова: уравнение p-лапласиана, априорная оценка, регуляризованное уравнение, радиально-симметричное решение.

§ 1. Введение и основные результаты

В статье рассматривается задача Дирихле для уравнения p-лапласиана с нелинейным источником при наличии внешних массовых сил:

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = c(|x|)g(u) + f(|x|) \quad \text{в } B_R \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial B_R, \tag{1.2}$$

где B_R — шар радиуса R и $p > 1$. На протяжении всей статьи будем предполагать, что $g(u) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ является непрерывной функцией, $c(x)$ и $f(x)$ принадлежат пространству $L^\infty(B_R)$, где f не обращается тождественно в нуль. Без ограничения общности будем считать, что $g(0) = 0$.

Нас интересует существование ограниченных радиально-симметричных решений задачи (1.1), (1.2). Хорошо известно, что радиально-симметричное решение задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = c(r)g(u) + f(r) \quad \text{в } r \in (0, R), \tag{1.3}$$

где $r = |x|$, и краевым условиям

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{1.4}$$

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–08275).

Вопросам качественного поведения радиально-симметричных решений задачи (1.3), (1.4) посвящено большое количество работ. Случай, когда $f \equiv 0$, исследован в [1, 2], где получено много интересных результатов, касающихся существования и несуществования как слабых радиально-симметричных решений задачи (1.3), (1.4), так и радиально-симметричных решений уравнения (1.3), убывающих на бесконечности. В [3] были изучены единственность положительных радиально-симметричных решений уравнения (1.1), убывающих на бесконечности, а также единственность положительных радиально-симметричных решений задачи Дирихле в шаре. Случай, когда $f \equiv 0$, исследован также в [4–12].

Случай, когда f не обращается тождественно в нуль, изучался в [13–15]. В отличие от этих работ полученное в настоящей статье достаточное условие существования слабого радиально-симметричного решения сформулировано в явном виде через данные задачи (1.3), (1.4). Это условие сравнительно легко проверяется и в явном виде показывает зависимость существования решения от показателя p, нелинейного источника g, размерности n, радиуса R, а также величин $\|c\|_{L^\infty}$ и $\|f\|_{L^\infty}$.

В [16] рассмотрена задача (1.3), (1.4), в которой непрерывная функция $g(u)$ удовлетворяет условию

$$g(0) = 0, \quad g(z) > 0 \text{ при } z > 0 \quad \text{и} \quad |g(z)| \le g(K) \text{ при } |z| \le K, \tag{1.5}$$

где K — произвольная положительная постоянная. Автором показано, что при условии существования положительной постоянной M такой, что выполняются неравенства

$$c_0 g(M) + f_0 < \frac{n-1}{R^p} M^{p-1} \quad \text{при } p \ge 2, \tag{1.6}$$

$$c_0 g(M) + f_0 < \frac{n-1}{R^p} (2 + \alpha - p)^{\frac{p-2}{\alpha}} M^{p-1}, \ p - 1 < \alpha < 1, \quad \text{при } 1 < p < 2, \tag{1.7}$$

имеет место существование слабого радиально-симметричного решения задачи (1.3), (1.4). Основная цель настоящей статьи заключается в получении новых условий, обобщающих условия (1.6), (1.7) и позволяющих, в частности, ослабить ограничения на величину $\|f(r)\|_{L^\infty}$, при которой можно получить разрешимость задачи (1.3), (1.4). Также отметим, что условие (1.5) на функцию g опущено.

Мы не накладываем никаких ограничений на функцию $F(|x|, u) = c(|x|)g(u) + f(|x|)$, гарантирующих знакоопределенность решения уравнения (1.3). В силу того, что u' может обращаться в нуль, классического решения задачи может не существовать, поэтому будем рассматривать слабые решения задачи (1.3), (1.4).

Определение. Будем говорить, что функция $u(r)$ является *слабым решением задачи* (1.3), (1.4), если $u'(r)$ непрерывна по Гёльдеру на $[0, R]$, удовлетворяет (1.4) и имеет место интегральное равенство

$$\int_0^R |u'(r)|^{p-2} u'(r) \phi'(r)\, dr = \int_0^R \frac{n-1}{r} |u'(r)|^{p-2} u'(r) \phi(r)\, dr + \int_0^R (c(r)g(u) + f(r))\phi(r)\, dr, \quad \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(0, R).$$

В силу указанной в определении гладкости искомого решения краевые условия (1.4) понимаются в обычном смысле.

Пусть
$$\|c(r)\|_{L^\infty} = c_0, \quad \|f(r)\|_{L^\infty} = f_0.$$
Предположим, что существует положительная постоянная M такая, что имеет место следующее неравенство:
$$c_0 \max_{|u|\le M} |g(u)| + f_0 < n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \frac{M^{p-1}}{R^p}. \tag{1.8}$$
Сформулируем главный результат статьи.

Теорема 1.1. *Пусть $c(r)$, $f(r) \in L^\infty(B_R)$, а $g(u) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ является непрерывной функцией. Предположим, что выполнено условие* (1.8). *Тогда существует слабое решение задачи* (1.3), (1.4), *которое удовлетворяет следующим оценкам:*
$$|u| \le \mathscr{M}, \quad |u'| \le (1+R)C,$$
где
$$C > \left(\frac{c_0 \max_{|u|\le \mathscr{M}} |g(u)| + f_0}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{при } p \ge 2, \tag{1.9}$$
$$C > \left(\frac{c_0 \max_{|u|\le \mathscr{M}} |g(u)| + f_0}{p-1}(1+R)^{p-2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{при } 1 < p < 2 \tag{1.10}$$
и $\mathscr{M} = \inf\{M \mid M$ *удовлетворяет* $(1.8)\}$.

Ниже приведем примеры, иллюстрирующие полученные результаты, в частности, в сравнении с установленными ранее в [16]. Более того, в примере 1.6 покажем, что в некотором смысле условие (1.8) оптимально.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение
$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |u|^{q-1}u + f(|x|) \quad \text{в } B_1 \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$
Определим допустимые значения величины $f_0 = \|f\|_{L^\infty}$, гарантирующие существование слабого радиально-симметричного решения задачи Дирихле для уравнения (1.11). Из (1.8) вытекает, что подходящие значения f_0 определяются из неравенства
$$Q(M) = M^q - n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M^{p-1} + f_0 < 0.$$
Легко видеть, что функция $Q(M)$ достигает минимума в точке
$$M_* = \left(\frac{p-1}{q}\right)^{\frac{1}{q-p+1}} n^{\frac{1}{q-p+1}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}}.$$
Следовательно,
$$\min Q(M) = Q(M_*) = f_0 - \left(1 - \frac{p-1}{q}\right)\left(\frac{p-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}} n^{\frac{q}{q-p+1}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p+1}}.$$
Таким образом, если
$$f_0 < \left(1 - \frac{p-1}{q}\right)\left(\frac{p-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}} n^{\frac{q}{q-p+1}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p+1}}, \tag{1.12}$$

то существует слабое радиально-симметричное решения задачи Дирихле для уравнения (1.11).

Заметим, что условие (1.6), полученное в [16], в случае задачи (1.11), (1.2) дает следующие допустимые значения величины $\|f\|_{L^\infty}$, которые обозначаем через

$$\tilde{f}_0 < \left(1 - \frac{p-1}{q}\right)\left(\frac{p-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}}(n-1)^{\frac{q}{q-p+1}}. \tag{1.13}$$

Очевидно, $f_0 > \tilde{f}_0$. Например, при $n = 2$, $p = q = 3$ условие (1.12) влечет существование решения задачи Дирихле для уравнения (1.11), если $f_0 < \frac{27}{2}$. С другой стороны, аналогичный результат можно получить, используя условие (1.13), лишь при значениях $\tilde{f}_0 < \frac{4}{27}$.

Замечание 1.3. Пусть $q = p$ в (1.11). Тогда из (1.12) получаем

$$f_0 < \left(\frac{1}{p}\right)n^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(p-1)^2}. \tag{1.14}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\right)n^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(p-1)^2} = \infty. \tag{1.15}$$

Из (1.14), (1.15) вытекает, что при произвольной функции $f \in L^\infty$ существует показатель p, определяемый посредством неравенства (1.14), такой, что существует слабое решение задачи Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |u|^{p-1}u + f(|x|) \quad \text{в } B_1 \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.16}$$

Замечание 1.4. Из примера 1.2 также следует, что разрешимость задачи Дирихле можно получать при произвольной $f \in L^\infty$ с помощью подбора подходящей размерности задачи. Роль размерности пространственной переменной в задачах о существовании и несуществовании радиально-симметричных решений задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа, а также сильно вырождающихся уравнений эллиптического типа изучены в работах [17, 18] соответственно. В [19] аналогичные результаты получены для анизотропных эллиптических уравнений, но только в случае, когда в уравнении присутствует достаточное количество сингулярных показателей $1 < p_i < 2$.

Замечание 1.5. Пусть существует положительная постоянная M такая, что имеет место (1.6) или (1.7). Положим

$$\mathscr{M}_0 = \inf\{M \mid M \text{ удовлетворяет (1.6) или (1.7)}\}.$$

Используя (1.8), заключаем, что из существования $\mathscr{M}_0$ вытекает существование $\mathscr{M}$ такой, что $\mathscr{M} < \mathscr{M}_0$.

Пример 1.6. В [4] авторы исследуют задачу на собственные значения для уравнения p-лапласиана. Одним из результатов их работы является оценка первого собственного числа λ_1 задачи Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{p-2}u \quad \text{в } B_R \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.17}$$

В частности, в [4] доказано, что имеет место следующая оценка:

$$\lambda_1 \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{n}{R^p}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим соответствующее (1.17) неоднородное уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{p-2}u + f(|x|) \quad \text{в } B_R \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.19}$$

Из условия (1.8) вытекает существование слабого радиально-симметричного решения задачи (1.19), (1.2) для любой $f \in L^\infty(B_R)$ при условии

$$\lambda < \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{n}{R^p}.$$

Для того чтобы доказать теорему 1.1, регуляризуем уравнение (1.3) и докажем классическую разрешимость регуляризованной задачи с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Далее используем процедуру предельного перехода для получения слабого решения задачи (1.3), (1.4). Статья организована следующим образом. В § 2 получим априорную оценку классического решения регуляризованной задачи в случае $p \geq 2$. В § 3 выведем указанную выше оценку в сингулярном случае, т. е. при $1 < p < 2$. Наконец, в § 4 докажем существование классического решения регуляризованной задачи (см. теорему 4.3), а также существование слабого радиально-симметричного решения задачи (1.3), (1.4) (см. теорему 1.1).

§ 2. Априорная оценка классического решения регуляризованной задачи

Для того чтобы получить слабое решение задачи (1.3), (1.4), рассмотрим следующую регуляризацию уравнения (1.3):

$$-((u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u')' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u' = c_\varepsilon(r)g_M(u) + f_\varepsilon(r). \tag{2.1}$$

Здесь постоянная $\alpha \in (0,1)$ выбирается так, что выполняется равенство $(u'^\alpha)^{\frac{p-2}{\alpha}} = |u'|^{p-2}$, $\varepsilon > 0$, а $c_\varepsilon(r)$ и $f_\varepsilon(r)$ являются непрерывными функциями, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$c_\varepsilon(r) \to c(r), \quad f_\varepsilon(r) \to f(r) \ \text{ по норме } L^\infty \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Без ограничения общности предполагаем, что

$$\max_{r\in[0,R]}|c_\varepsilon(r)| = c_0, \quad \max_{r\in[0,R]}|f_\varepsilon(r)| = f_0.$$

Функция $g_M(u)$ определяется следующим образом:

$$g_M(z) = \begin{cases} g(z) & \text{при } |z| \leq M, \\ g(M) & \text{при } z > M, \\ g(-M) & \text{при } z < -M. \end{cases} \tag{2.2}$$

Из (2.2) с очевидностью вытекает, что

$$-\max_{|u|\leq M}|g(u)| \leq g_M(u) \leq \max_{|u|\leq M}|g(u)|.$$

Рассмотрим задачу (2.1), (1.4). Перепишем (2.1) в недивергентном виде:

$$-a_\varepsilon(u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u' = c_\varepsilon(r)g_M(u) + f_\varepsilon(r), \tag{2.3}$$

где $a_\varepsilon(z) = (z^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}((p-1)z^\alpha + \varepsilon)$. Сразу заметим, что $a_\varepsilon(z) = a_\varepsilon(-z)$.

Определим оператор

$$Lw \equiv -a_\varepsilon(w')w''.$$

Таким образом, уравнение (2.3) принимает вид

$$Lu = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u' + c_\varepsilon(r)g_M(u) + f_\varepsilon(r). \tag{2.4}$$

Введем функцию

$$h(r) = \frac{M}{(R+\delta)^{\frac{p}{p-1}} - \delta^{\frac{p}{p-1}}}((R+\delta)^{\frac{p}{p-1}} - (r+\delta)^{\frac{p}{p-1}}), \tag{2.5}$$

где M — положительная постоянная. Положим $M_\delta = M((R+\delta)^{\frac{p}{p-1}} - \delta^{\frac{p}{p-1}})^{-1}$. Очевидно,

$$h'(r) = -\frac{p}{p-1}M_\delta(r+\delta)^{\frac{1}{p-1}}, \quad h''(r) = -\frac{p}{(p-1)^2}M_\delta(r+\delta)^{\frac{2-p}{p-1}}. \tag{2.6}$$

Легко показать, что функция $a_\varepsilon(h')$ монотонно возрастает по параметру ε. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}a_\varepsilon(h') &= \left(\frac{p-2}{\alpha} - 1\right)(h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-2}((p-1)h'^\alpha + \varepsilon) + (h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}\\ &= (h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-2}\left[\left(\frac{p-2}{\alpha} - 1\right)((p-1)h'^\alpha + \varepsilon) + h'^\alpha + \varepsilon\right]\\ &= \frac{p-2}{\alpha}(h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-2}[(p-1-\alpha)h'^\alpha + \varepsilon].\end{aligned} \tag{2.7}$$

Принимая во внимание тот факт, что $h'^\alpha > 0$, заключаем, что неравенство

$$(p-2)[(p-1-\alpha)h'^\alpha + \varepsilon] \geq 0 \tag{2.8}$$

имеет место при $p \geq 2$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, функция $a_\varepsilon(h')$ возрастает по ε при $p > 2$. Используя (2.7), (2.8), приходим к неравенству

$$Lh = -(h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}((p-1)h'^\alpha + \varepsilon)h'' \geq -(p-1)|h'|^{p-2}h''.$$

Таким образом,

$$Lh \geq (p-1)\left(\frac{p}{p-1}M_\delta(r+\delta)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-2}\frac{p}{(p-1)^2}M_\delta(r+\delta)^{\frac{2-p}{p-1}} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}M_\delta^{p-1}. \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Пусть $p \geq 2$. Предположим, что выполнено условие* (1.8). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.3), (1.4) *имеет место оценка*

$$|u(r)| \leq M.$$

Доказательство. Введем функцию $v(r) = u(r) - h(r)$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}Lu - Lh &= -a_\varepsilon(u')u'' + a_\varepsilon(h')h''\\ &= -a_\varepsilon(u')u'' + a_\varepsilon(h')h'' + a_\varepsilon(u')h'' - a_\varepsilon(u')h''\\ &= -a_\varepsilon(u')v'' + (a_\varepsilon(h') - a_\varepsilon(u'))h''.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Из (2.4) и (2.10) следует, что

$$-a_\varepsilon(u')v'' = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) + (a_\varepsilon(u') - a_\varepsilon(h'))h'' - Lh. \tag{2.11}$$

Предположим, что в некоторой точке $r = r_0 \in (0, R)$ функция $v(r)$ достигает положительного максимума. Тогда

$$\widetilde{L}v|_{r=r_0} \equiv -a_\varepsilon(u')v''|_{r=r_0} \geq 0.$$

С другой стороны, в точке r_0 имеют место следующие соотношения:

$$u(r_0) > h(r_0) > 0, \quad v'(r_0) = u'(r_0) - h'(r_0) = 0, \quad (a_\varepsilon(u') - a_\varepsilon(h'))h''|_{r=r_0} = 0.$$

Таким образом, из (2.11) получаем

$$\widetilde{L}v|_{r=r_0} = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r)$$

$$+ (a_\varepsilon(u') - a_\varepsilon(h'))h'' - Lh|_{r=r_0} = \frac{n-1}{r}(h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} h' + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) - Lh|_{r=r_0}$$

$$< -\frac{n-1}{r}|h'|^{p-1} + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) - Lh|_{r=r_0}$$

$$\leq -\frac{n-1}{r_0}\left(\frac{p}{p-1} M_\delta (r_0 + \delta)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} + c_0 \max_{|u| \leq M} |g(u)| + f_0 - \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1}$$

$$\leq c_0 \max_{|u| \leq M} |g(u)| + f_0 - n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1}. \tag{2.12}$$

Предположим, что существует положительная постоянная M такая, что

$$c_0 \max_{|u| \leq M} |g(u)| + f_0 - n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1} < 0. \tag{2.13}$$

Из неравенств (2.12) и (2.13) следует, что

$$\widetilde{L}v|_{r=r_0} < c_0 \max_{|u| \leq M} |g(u)| + f_0 - n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1} < 0. \tag{2.14}$$

Неравенство (2.14) противоречит предположению о том, что функция $v(r)$ достигает положительного максимума в $(0, R)$.

Рассмотрим функцию $v(r)$ в точках $r = 0$ и $r = R$. Заметим, что на границе исследуемого интервала имеем следующие соотношения:

$$v'(0) = u'(0) - h'(0) = -h'(0) = \frac{p}{p-1}\delta^{\frac{1}{p-1}} M_\delta > 0$$

и, значит, $v(0) < \max\limits_{r \in [0,R]} v(r)$. Учитывая тот факт, что $v(R) = u(R) - h(R) = 0$, заключаем, что $v(r) \leq 0$ и как следствие

$$u(r) \leq h(r). \tag{2.15}$$

Чтобы получить оценку снизу на u, введем в рассмотрение функцию $\tilde{v} = u(r) + h(r)$. Вычислив сумму $Lu + Lh$ вместо разности $Lu - Lh$, приходим к равенству

$$-a_\varepsilon(u')\tilde{v}'' = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) + (a_\varepsilon(h') - a_\varepsilon(u'))h'' + Lh. \tag{2.16}$$

Предположим, что в некоторой точке $r = r_1$ функция $\tilde v(r)$ достигает отрицательного минимума. Тогда

$$\widetilde{L}\tilde v|_{r=r_1} \equiv -a_\varepsilon(u')\tilde v''|_{r=r_1} \le 0.$$

С другой стороны, с учетом того, что в силу выбора α из равенства $(-h')^\alpha = h'^\alpha$ вытекает $a_\varepsilon(h') = a_\varepsilon(-h')$, в точке r_1 имеют место следующие соотношения:

$$u(r_1) < -h(r_1) < 0, \quad \tilde v'(r_1) = u'(r_1) + h'(r_1) = 0, \quad (a_\varepsilon(h') - a_\varepsilon(u'))h''|_{r=r_1} = 0.$$

Таким образом, из (2.16) получаем

$$\widetilde{L}\tilde v|_{r=r_1} = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u' + c_\varepsilon(r)g_M(u) + f_\varepsilon(r)$$
$$+(a_\varepsilon(h') - a_\varepsilon(u'))h'' + Lh|_{r=r_1} = -\frac{n-1}{r}(h'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}h' + c_\varepsilon(r)g_M(u) + f_\varepsilon(r) + Lh|_{r=r_1}$$
$$> \frac{n-1}{r}|h'|^{p-1} + c_\varepsilon(r)g_M(u) + f_\varepsilon(r) + Lh|_{r=r_1}$$
$$\ge \frac{n-1}{r_1}\left(\frac{p}{p-1}M_\delta(r_1+\delta)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} + c_\varepsilon(r_1)g_M(u(r_1)) + f_\varepsilon(r_1) + \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}M_\delta^{p-1}$$
$$\ge n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}M_\delta^{p-1} - c_0\max_{|u|\le M}|g(u)|f_0. \tag{2.17}$$

Из (2.13) и (2.17) следует, что $\widetilde{L}\tilde v|_{r=r_1} > 0$; противоречие с тем, что $\tilde v(r)$ достигает отрицательного минимума в $(0, R)$.

Рассмотрим функцию $\tilde v(r)$ в точках $r = 0$ и $r = R$. В этих точках имеем

$$\tilde v'(0) = u'(0) + h'(0) = h'(0) = -\frac{p}{p-1}\delta^{\frac{1}{p-1}}M_\delta < 0$$

и, следовательно, $v(0) > \min\limits_{r\in[0,R]} v(r)$. В силу равенства $\tilde v(R) = u(R) + h(R) = 0$ приходим к заключению, что $\tilde v(r) \ge 0$. Наконец, используя (2.15), получаем

$$|u(r)| \le h(r) \le h(0) = M. \tag{2.18}$$

Для завершения доказательства леммы 2.1 заметим, что (2.18) имеет место при условии (2.13) для любого $\delta > 0$. Более того, постоянная M_δ убывающая относительно δ, и $\lim\limits_{\delta\to 0} M_\delta = \frac{M}{R^{\frac{p}{p-1}}}$. Таким образом, неравенство (2.18) выполняется при условии (1.8). $\square$

Замечание 2.2. Оценка (2.18) справедлива при любых значениях $\delta > 0$. Из (2.5) следует выполнение оценки

$$|u(r)| \le h(r)|_{\delta=0} = M\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Замечание 2.3. В действительности из леммы 2.1 вытекает не только оценка на $\max|u|$, но и граничная оценка производной. Используя (2.18), получаем

$$\frac{h(r)-h(R)}{r-R} \le \frac{u(r)-u(R)}{r-R} \le -\frac{h(r)-h(R)}{r-R},$$

откуда немедленно следует соотношение

$$|u'(R)| \le -h'(R)|_{\delta=0} = \frac{p}{p-1}\frac{M}{R}. \tag{2.19}$$

В замечании 2.1 работы [16] получена граничная оценка производной $|u'(R)| \leq \frac{\mathscr{M}_0}{R}$, где $\mathscr{M}_0$ определена в замечании 1.5 настоящей статьи. Непосредственные вычисления показывают, что оценка (2.19) является улучшением граничной оценки производной, полученной в [16]. Действительно,

$$\mathscr{M} \leq \frac{p-1}{p}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}} \mathscr{M}_0.$$

Таким образом,

$$|u'(R)| \leq \frac{p}{p-1}\frac{\mathscr{M}}{R} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\mathscr{M}_0}{R} < \frac{\mathscr{M}_0}{R}.$$

§ 3. Априорная оценка классического решения регуляризованной задачи. Сингулярный случай

В этом параграфе получим априорную оценку решения задачи (2.1), (1.4) в сингулярном случае, т. е. при $1 < p < 2$.

Из (2.7) имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} a_\varepsilon(h') = \frac{p-2}{\alpha}(h'^{\alpha} + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-2}[(p-1-\alpha)h'^{\alpha} + \varepsilon]. \tag{3.1}$$

Следовательно, функция $a_\varepsilon(h')$ возрастающая по ε в случае, когда $1 < p < 2$, при условии, что

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = (\alpha - (p-1))\left(\frac{p}{p-1}M_\delta \delta^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\alpha} \leq (\alpha - (p-1))h'^{\alpha}, \quad \alpha > p-1. \tag{3.2}$$

Отсюда получаем, что (2.9) имеет место и в сингулярном случае, если предположить выполненным условие (3.2).

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.2) *и* (1.8). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.3), (1.4) *имеет место оценка*

$$|u(r)| \leq M.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v(r) = u(r) - h(r)$ и предположим, что в некоторой точке $r = r_0 \in (0, R)$ она достигает положительного максимума. Следуя доказательству леммы 2.1 и используя условие (3.2), получим, что

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}v|_{r=r_0} &= \frac{n-1}{r}(u'^{\alpha} + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) \\
&\qquad + (a_\varepsilon(u') - a_\varepsilon(h'))h'' - Lh|_{r=r_0} \\
&= -\frac{n-1}{r}(h'^{\alpha} + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}|h'| + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) - Lh|_{r=r_0} \\
&< -\frac{n-1}{r}(h'^{\alpha} + (\alpha - (p-1))h'^{\alpha})^{\frac{p-2}{\alpha}}|h'| + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) - Lh|_{r=r_0} \\
&= -\frac{n-1}{r}(2 + \alpha - p)^{\frac{p-2}{\alpha}}|h'|^{p-1} + c_\varepsilon(r) g_M(u) + f_\varepsilon(r) - Lh|_{r=r_0} \\
&< -\frac{n-1}{r_0}(2 + \alpha - p)^{\frac{p-2}{\alpha}}\left(\frac{p}{p-1}M_\delta (r_0 + \delta)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}
\end{aligned}$$

$$+ c_0 \max_{|u|\le M} |g(u)| + f_0 - \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1}$$

$$\le c_0 \max_{|u|\le M} |g(u)| + f_0 - ((2+\alpha-p)^{\frac{p-2}{\alpha}}(n-1)+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1}. \quad (3.3)$$

Пусть существует положительная постоянная M такая, что

$$c_0 \max_{|u|\le M} |g(u)| + f_0 - ((2+\alpha-p)^{\frac{p-2}{\alpha}}(n-1)+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1} < 0. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что

$$\widetilde{L}v|_{r=r_0} < 0. \quad (3.5)$$

Неравенство (3.5) противоречит условию о том, что функция $v(r)$ достигает положительного максимума в $(0,R)$. Далее, действуя так же, как в лемме 2.1, получаем, что $v(r)\le 0$ и имеет место оценка

$$u(r) \le h(r). \quad (3.6)$$

Для того чтобы получить оценку снизу на u, введем в рассмотрение функцию $\tilde{v} = u(r) + h(r)$ и предположим, что она достигает отрицательного минимума в $(0,R)$. Аналогично лемме 2.1, используя (3.4) и неравенство

$$-\frac{n-1}{r}({h'}^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} h' \ge \frac{n-1}{r}({h'}^{\alpha} + (\alpha-(p-1)){h'}^{\alpha})^{\frac{p-2}{\alpha}}|h'|$$

$$= \frac{n-1}{r}(2+\alpha-p)^{\frac{p-2}{\alpha}}|h'|^{p-1},$$

выводим неравенство

$$\widetilde{L}\tilde{v}|_{r=r_1} > ((2+\alpha-p)^{\frac{p-2}{\alpha}}(n-1)+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} M_\delta^{p-1} - c_0 \max_{|u|\le M}|g(u)| - f_0 > 0, \quad (3.7)$$

которое противоречит предположению о том, что $\tilde{v}(r)$ достигает отрицательного минимума в $(0,R)$. Следуя доказательству леммы 2.1, получаем, что $\tilde{v}(r)\ge 0$, и как следствие приходим к оценке

$$|u(r)| \le h(r) \le h(0) = M. \quad (3.8)$$

Оценка (3.8) выполняется при условии (3.4) для любого $\delta > 0$ и $\alpha > p-1$. Более того, постоянная M_δ убывает относительно δ, и $\lim\limits_{\delta\to 0} M_\delta = \frac{M}{R^{\frac{p}{p-1}}}$. Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to p-1}(2+\alpha-p)^{\frac{p-2}{\alpha}} = 1$, оценка (3.8) имеет место при условии (1.8). $\square$

§ 4. Теоремы существования

В настоящем параграфе приведем доказательство существования классического решения регуляризованной задачи, а также доказательство теоремы 1.1. Доказательство перечисленных результатов фактически вытекает из лемм 3.1, 4.1 и теоремы 4.1 из [16]. Поэтому в данной работе ограничимся их формулировкой и некоторыми замечаниями, восстанавливающими ход доказательства существования классического и слабого решений.

Из априорных оценок, полученных в § 2, 3, вытекает, что в уравнении (2.1) вместо функции $g_M(u)$ можно подставить $g(u)$. После этого регуляризованное уравнение (2.1) принимает вид

$$-(({u'}^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u')_r - \frac{n-1}{r}({u'}^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u' = c_\varepsilon(r)g(u) + f_\varepsilon(r). \quad (4.1)$$

Всегда предполагаем, что $\varepsilon < \varepsilon_0$, если $1 < p < 2$.

Для доказательства существования классического решения задачи (4.1), (1.4) необходимо получить априорную оценку на производную от решения регуляризованной проблемы.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие* (1.8). *Если* $1 < p < 2$, *то будем предполагать выполненным условие* $\varepsilon < \varepsilon_0 = (\alpha - (p-1))\left(\frac{p}{p-1} M_\delta \delta^{\frac{1}{p-1}}\right)^\alpha$, *где* $p - 1 < \alpha$. *Тогда для любого классического решения задачи* (4.1), (1.4) *верна оценка*

$$|u'| \leq (1+R)C,$$

где C *определяется из условия* (1.9) (*или* (1.10)).

Доказательство леммы 4.1 полностью совпадает с доказательством леммы 3.1 из [16]. □

Следующим шагом в доказательстве существования классического решения задачи (4.1), (1.4) будет доказательство ограниченности $\frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'$ при $r \to 0$. Положим $Z(r) = (u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'$.

Лемма 4.2 [16, лемма 4.1]. *Если* u *является классическим решением задачи* (4.1), (1.4), *то* $Z(r) \in \mathbf{C}^1[0, R]$ *и*

$$Z_r(0) = -\frac{c(0)g(u_\varepsilon(0)) + f(0)}{n}.$$

Сформулируем теорему существования классического решения регуляризованной задачи.

Теорема 4.3. *Пусть* $c_\varepsilon(r)$, $f_\varepsilon(r) \in \mathbf{C}[0, R]$, $g(u) \in \mathbf{C}[-\mathscr{M}, \mathscr{M}]$. *Предположим, что выполнено условие* (1.8). *Тогда существует классическое решение* $u_\varepsilon \in \mathbf{C}^2(0, R) \cap \mathbf{C}^1[0, R]$ *задачи* (4.1), (1.4), *удовлетворяющее оценкам*

$$|u_\varepsilon| \leq \mathscr{M}, \quad |u'_\varepsilon| \leq (1+R)C,$$

где C *определяется из* (1.9) (*или* (1.10)).

Доказательство теоремы 4.3 базируется на полученных априорных оценках решения и производной от решения, лемме 4.2 и принципе Шаудера о неподвижной точке. Более подробно доказательство теоремы 4.3 изложено в [16, теорема 4.1]. □

Переходим к доказательству теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим уравнение (4.1) и обозначим через u_ε классическое решение задачи (4.1), (1.4). Существование классического решения доказано при условии (1.8). Домножим (4.1) на $\phi \in \mathbf{C}_0^\infty(0, R)$ и проинтегрируем его по частям:

$$\int_0^R \left(u'^\alpha_\varepsilon + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon \phi' \, dr - \int_0^R \frac{n-1}{r}\left(u'^\alpha_\varepsilon + \varepsilon\right)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon \phi \, dr = \int_0^R (c_\varepsilon g(u_\varepsilon) + f_\varepsilon)\phi(r)\, dr. \quad (4.2)$$

Из априорных оценок, полученных в леммах 2.1, 3.1, 4.1, и леммы 4.2 заключаем, что существует подпоследовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что

$$u_{\varepsilon_n} \to u, \quad \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial r} \to \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{равномерно в } \mathbf{C}[0, R],$$

$$c_{\varepsilon_n}(r)g(u_{\varepsilon_n}) + f_{\varepsilon_n}(r) \to c(r)g(u(r)) + f(r) \quad \text{по норме пространства } L^\infty,$$

$$\left(\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial r}\right)^\alpha + \varepsilon_n \to \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^\alpha \quad \text{равномерно в } \mathbf{C}[0,R],$$

$$\left(\left(\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial r}\right)^\alpha + \varepsilon_n\right)^{\frac{p-2}{\alpha}} \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial r} \to \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{равномерно в } \mathbf{C}[0,R],$$

$$\frac{n-1}{r}\left(\left(\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial r}\right)^\alpha + \varepsilon_n\right)^{\frac{p-2}{\alpha}} \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial r} \to \frac{n-1}{r}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{равномерно в } \mathbf{C}[0,R].$$

Переходя к пределу в (4.2) при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $u = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ является искомым слабым радиально-симметричным решением задачи (1.3), (1.4). $\square$

Замечание 4.1. Заметим, что при $1 < p \le 2$ функция u'_ε непрерывна по Липшицу на $[0,R]$, где постоянная Липшица не зависит от ε. Таким образом, в этом случае решение $u(r)$ задачи (1.3), (1.4) будет иметь ту же самую гладкость. Это означает, что u, будучи слабым решением задачи (1.3), (1.4), удовлетворяет уравнению (1.3) в классическом смысле почти всюду.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Franca M.* Radial ground states and singular ground states for a spatial-dependent p-Laplace equation // J. Differ. Equ. 2010. V. 218. P. 2629–2656.
2. *Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.* Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^n$ // Adv. Math. 1996. V. 118. P. 177–243.
3. *Garcia-Huidobro M., Duvan H.* On the uniqueness of positive solutions of a quasilinear equation containing a weighted p-Laplacian, the superlinear case // Commun. Contemp. Math. 2008. V. 10, N 3. P. 405–432.
4. *Benedict J., Drabek P.* Asymptotics for the principal eigenvalue of the p-Laplacian on the ball as p approaches 1 // Nonlinear Anal. 2013. V. 93. P. 23–29.
5. *Cabre X., Capella A., Sanchon M.* Regularity of radial minimizers of reaction equations involving the p-Laplacian // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2009. V. 34, N 4. P. 475–494.
6. *Castro A., Lazer A.* Infinitely many radially-symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101, N 1. P. 57–64.
7. *El Hashimi A., de Thelin F.* Infinitely many radially-symmetric solutions for a quasilinear elliptic problem in a ball // J. Differ. Equ. 1996. V. 128. P. 78–102.
8. *Garcia-Azorero J., Peral I., Puel J. P.* Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term // Nonlinear Anal. 1994. V. 22. P. 481–498.
9. *Garcia-Huidobro M., Manasevich R., Schmitt K.* Positive radial solutions of quasilinear elliptic partial differential equations on a ball // Nonlinear Anal. 1999. V. 35. P. 175–190.
10. *Gazzola F., Serrin J., Tang M.* Existence of ground states and free boundary problem for quasilinear elliptic operators // Adv. Differ. Equ. 2000. V. 5. P. 1–30.
11. *Pucci P., Serrin J.* Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic operators // Indiana Univ. Math. J. 1998. V. 47. P. 501–528.
12. *Zhang Zh., Li Zh.* A universal bound for radial solutions of the quasilinear parabolic equation with p-Laplace operator // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 385. P. 125–134.
13. *Dai Q., Peng L.* Necessary and sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of inhomogenuous p-Laplace equation // Acta Math. Scientia. 2007. V. 27, N 1. P. 34–56.
14. *Fan X.* Positive solutions to $p(x)$-Laplacian–Dirichlet problems with sigh-changing nonlinearities // Math. Nachr. 2011. V. 284, N 11–12. P. 1435–1445.
15. *Huang Y. X.* Existence of positive solutions for a class of the p-Laplace equations // J. Aust. Math. Soc., Ser. B. 1994. V. 36, N 2. P. 249–264.
16. *Tersenov Ar. S.* On sufficient conditions for the existence of radially symmetric solutions of the p-Laplace equation // Nonlinear Anal. 2014. V. 95. P. 362–373.
17. *Tersenov Al. S.* Space dimension can prevent the blow-up of solutions for parabolic problems // Electron. J. Differ. Equ. 2007. V. 2007, N 165. P. 1–6.

18. *Liang Z.* The role of the space dimension on the blow-up for a reaction-diffusion equation // Appl. Math. 2011. V. 2, N 5. P. 575–578.

19. *Терсенов Ар. С.* Новые априорные оценки решений анизотропных эллиптических решений // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 672–686.

Статья поступила 11 ноября 2015 г.

Терсенов Арис Саввич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`aterseno@math.nsc.ru`