Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.982

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ — РИМАНА В ПРОЕКТИВНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. А. Полякова

Аннотация. Установлен аналог теоремы Хермандера о разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана для пространств измеримых функций, удовлетворяющих системе равномерных оценок. Результат формулируется в терминах весовой последовательности, задающей пространство. Эти же условия обеспечивают слабую приведенность соответствующего весового пространства целых функций. На основании данных результатов решена задача описания мультипликаторов весовых пространств целых функций с проективной и индуктивно-проективной топологической структурой. Получены приложения к операторам свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Румье.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.118

Ключевые слова: неоднородное уравнение Коши — Римана, проективное весовое пространство, мультипликатор, оператор свертки.

§ 1. Основной результат

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^N$. Через $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $H(\Omega)$ и $PSH(\Omega)$ будем, как обычно, обозначать пространства всех функций, соответственно локально интегрируемых с квадратом модуля, аналитических и плюрисубгармонических в Ω.

Хорошо известен классический результат Хермандера [1, теорема 4.4.2] о разрешимости $\bar\partial$-задачи в пространстве функций с весовой L^2-оценкой. В соответствии с ним, если $\varphi \in PSH(\Omega)$, а $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — произвольная функция такая, что $\int\limits_\Omega |g|^2 e^{-2\varphi}\, d\lambda \le A$, то неоднородное уравнение Коши — Римана (или $\bar\partial$-задача)

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g \tag{1}$$

имеет решение $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, причем

$$\int\limits_\Omega |f|^2 (1+|z|^2)^{-2} e^{-2\varphi}\, d\lambda \le A/2.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$, $z = x + iy$, а разрешимость уравнения (1) понимается в смысле теории распределений на Ω.

Этот результат открыл новые методы исследования многих задач. В частности, он применялся для решения проблем о порождающих в пространствах целых функций [2–4]; задач о разделении особенностей голоморфных функций [4]; интерполяционных задач [5] и задач о продолжении функций по Борелю —

Уитни [6, 7]. Основополагающую роль решение $\bar{\partial}$-задачи играет в исследовании вопросов, касающихся уравнений свертки и идеалов в различных пространствах [8–11], проблем описания сопряженных пространств [12–14] и т. д.

В последнее время все чаще решение $\bar{\partial}$-задачи приходится использовать для построения функций в индуктивных и проективных пространствах функций с равномерными или интегральными весовыми оценками. Для индуктивных пространств построение удается проводить за счет применения самого результата Хермандера, поскольку в этом случае необходимо удовлетворить лишь одной оценке из семейства. Подобным образом теорема Хермандера была применена для индуктивных пространств в перечисленных выше работах [6, 7, 9–14].

Случай проективных пространств в этом отношении является гораздо более сложным, так как нужно удовлетворить семейству равномерных или L^2-оценок (как правило, эти семейства оценок эквивалентны). В связи с этим необходимо устанавливать аналог теоремы Хермандера для подобных пространств. В данном направлении известны приводимые ниже результаты Епифанова [15] и Лангенбруха [16].

Пусть $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая по n последовательность измеримых функций $\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ (весов). При каждом $n \in \mathbb{N}$ определим банаховы пространства

$$L^{\infty}_{\varphi_n}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ измерима} : \|f\|_{\varphi_n} = \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \right\},$$
$$H_{\varphi_n}(\Omega) = \{ f \in H(\Omega) : \|f\|_{\varphi_n} < \infty \}$$

и образуем проективные пределы

$$L^{\infty}_{\Phi}(\Omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L^{\infty}_{\varphi_n}(\Omega), \quad H_{\Phi}(\Omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\varphi_n}(\Omega).$$

Результат Епифанова [15, теорема 3] установлен для области Ω в $\mathbb{C}$ и заключается в эквивалентности следующих условий:

(i) неоднородное уравнение Коши — Римана (1) имеет решение $f \in L^{\infty}_{\Phi}(\Omega)$ при любой правой части $g \in L^{\infty}_{\Phi}(\Omega)$;

(ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $H_{\Phi}(\Omega)$ плотно в $H_{\varphi_m}(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$ (т. е. проективный предел $H_{\Phi}(\Omega)$ слабо приведенный);

(iii) для всякой функции $\xi \in L^{\infty}_{\Phi}(\Omega)$ найдется функция $l \in L^{\infty}_{\Phi}(\Omega)$, $l = \sup\{|f| : f \in I\}$, где I — локально ограниченное семейство аналитических в Ω функций такая, что $|\xi| \le l$.

Данный результат получен для весов φ_n из класса $SH_0(\Omega)$, т. е. имеющих вид $\varphi_n = \sup\{\ln|f| : f \in I\}$, I — локально ограниченное семейство в $H(\Omega)$, при минимальном условии разделенности:

$$\varphi_{n+1}(z) \le \varphi_n(z) + \ln d(z), \quad z \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

Здесь $d(z) = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{1+|z|}, \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega)\right\}$. Как следствие (см. [15, замечание 1 к теореме 3]), утверждение справедливо для субгармонических весов φ_n, $n \in \mathbb{N}$, при чуть более жестком условии:

$$\sup\{\varphi_{n+1}(z+t) : |t| \le d(z)\} \le \varphi_n(z) + \ln d(z), \quad z \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Результат Лангенбруха [16, лемма 1.3] обобщает теорему Епифанова на случай, когда Ω — открытое псевдовыпуклое множество в $\mathbb{C}^N$. На веса φ_n, $n \in \mathbb{N}$, накладываются следующие условия разделенности:

$$\sup\{\varphi_{n+1}(z+t) : |t| \le r(z)\} \le \inf\{\varphi_n(z+t) : |t| \le r(z)\} + A_n, \quad z \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\varphi_{n+1}(z) + \ln \frac{1+|z|}{r(z)} \le \varphi_n(z) + A_n, \quad z \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $0 < r(z) < \min\{1, \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^N \setminus \Omega)\}$. При этом функции φ_n изначально, вообще говоря, не предполагаются плюрисубгармоническими в Ω. Заметим, что в отличие от [15] в [16] рассматривается семейство не равномерных, а L^2-оценок. Однако понятно, что при введенных ограничениях эти семейства оценок эквивалентны.

Согласно теореме Лангенбруха разрешимость уравнения (1) в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\Omega)$ при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\Omega)$ равносильна каждому из следующих условий:

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\ \exists A_n > 0$: $\forall t \in \Omega\ \exists \psi_t \in PSH(\Omega)$:

$$\psi_t(\xi) \ge 0 \text{ вблизи } t \text{ и } \psi_t(z) \le \varphi_n(z) - \varphi_k(t) + A_n, \quad z \in \Omega;$$

(v) (a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\ \exists A_n > 0$: $\forall t \in \Omega\ \exists \psi_t \in PSH(\Omega)$:

$$\psi_t(t) \ge 0 \text{ и } \psi_t(z) \le \varphi_n(z) - \varphi_k(t) + A_n, \quad z \in \Omega,$$

(b) проективный предел $H_\Phi(\Omega)$ слабо приведенный.

В случае, если весовая последовательность Φ эквивалентна последовательности плюрисубгармонических весов, для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно справедливости утверждения (v)(b). Таким образом, в одномерной ситуации результат Лангенбруха фактически совпадает с результатом Епифанова.

Понятно, что применять теоремы Епифанова и Лангенбруха достаточно затруднительно. Слабая приведенность проективного предела $H_\Phi(\Omega)$ не может рассматриваться как простое достаточное условие, позволяющее устанавливать разрешимость $\bar\partial$-задачи в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\Omega)$. Напротив, проверка слабой приведенности $H_\Phi(\Omega)$ зачастую выступает как серьезная самостоятельная задача, поскольку данное свойство играет важную роль во многих вопросах, в частности, в вопросах описания мультипликаторов весовых пространств целых функций (см., например, [17]). Таким образом, в качестве основного условия, обеспечивающего разрешимость $\bar\partial$-задачи и одновременно слабую приведенность проективного предела $H_\Phi(\Omega)$, выступает условие Епифанова (iii) или условие Лангенбруха (iv). Очевидно, что проверка этих условий далеко не тривиальна и требует громоздкого построения специальной функции l или соответственно ψ_t для каждой конкретной весовой последовательности Φ.

В связи с вышеизложенным в настоящей работе предпринята попытка выделить важный с точки зрения приложений класс проективных весовых последовательностей Φ и установить для них простые и легко проверяемые условия, при которых $\bar\partial$-задача разрешима в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ измеримых функций при любой правой части из $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$, а пространство $H_\Phi(\mathbb{C})$ целых функций слабо приведенное.

Именно, в работе рассматриваются проективные последовательности вида

$$\Phi = (u_n(|z|) + v(z))_{n=1}^\infty, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

состоящие из радиальных и нерадиальной компонент. Они включают в себя как частный случай последовательности

$$\Phi = (q_n \omega(|z|) + l|\operatorname{Im} z|)_{n=1}^\infty, \quad \infty > q_n \downarrow q \ge 0,\ l > 0,$$

играющие важную роль при изучении пространств ультрадифференцируемых функций (УДФ) Румье (см. [12, 18–20]), а также обобщающие их (см. [10]) последовательности

$$\Phi = (q_n u(|z|) + v(|\operatorname{Im} z|))_{n=1}^{\infty}.$$

Кроме того, последовательности вида (5) возникают при исследовании пространств голоморфных функций, имеющих заданный рост вблизи границы круговой области (см. [21–23]).

На последовательности (5) накладываются естественные ограничения, по сути аналогичные (3) и (4), на основании которых проводится универсальное построение функции l из условия (iii) теоремы Епифанова.

Сформулируем основной результат работы. В соответствии с [17] *регулярной функцией расстояния* будем называть невозрастающую непрерывно дифференцируемую функцию $\rho : [0,\infty) \to (0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\rho'(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \quad \ln \rho(e^x) \text{ вогнута на } \mathbb{R}.$$

В частности, регулярными функциями расстояния являются

$$\rho(t) \equiv 1, \quad \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s},\ s > 0, \quad \rho(t) = e^{-at^s},\ a > 0,\ s > 0.$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Функция $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *ρ-устойчивой*, если при некотором $C_0 > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \le C_0 \text{ для всех } z, \zeta \in \mathbb{C} \text{ таких, что } |z - \zeta| \le \rho(z).$$

Под *проективной весовой последовательностью* будем понимать произвольную невозрастающую по n последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных функций $\varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем рассматриваемый в настоящей статье подкласс класса всех проективных весовых последовательностей. Пусть $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, причем выполнены следующие условия:

($\mathscr{U}_1$) $u_n(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$;

($\mathscr{U}_2$) семейство $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0,\infty)$, т. е. существует $C_0 > 0$ такое, что

$$|u_n(t) - u_n(s)| \le C_0 \text{ для всех } t, s \in [0,\infty) \text{ таких, что } |t - s| \le \rho(t),\ n \in \mathbb{N};$$

($\mathscr{U}_3$) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется $D_n > 0$, при котором

$$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1+t^2}{\rho(t)} \le u_n(t) + D_n, \quad t \ge 0.$$

Далее, пусть функция $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ обладает свойствами

($\mathscr{V}_1$) $v \in SH(\mathbb{C})$;

($\mathscr{V}_2$) v ρ-устойчива в $\mathbb{C}$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Если Φ — проективная весовая последовательность вида (5), удовлетворяющая условиям ($\mathscr{U}_1$)–($\mathscr{U}_3$) и ($\mathscr{V}_1$), ($\mathscr{V}_2$), то*

1) *неоднородное уравнение Коши — Римана (1) имеет решение в $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$;*

2) *проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ слабо приведенный.*

Замечание. Ясно, что утверждение теоремы 1 остается справедливым для произвольной проективной весовой последовательности Ψ, которая эквивалентна последовательности Φ вида (5), обладающей свойствами $(\mathscr{U}_1)$–$(\mathscr{U}_3)$ и $(\mathscr{V}_1)$, $(\mathscr{V}_2)$. При этом под эквивалентностью проективных последовательностей $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty$ понимается то, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $C_n > 0$ такие, что

$$\psi_m(z) \le \varphi_n(z) + C_n, \quad \varphi_m(z) \le \psi_n(z) + C_n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство основного результата содержится в § 2. Там же приведены некоторые полезные следствия теоремы 1 и конкретные примеры применения.

В § 3 дано одно из приложений теоремы 1 — описание мультипликаторов весовых пространств целых функций. Именно, теорема 1 и общий результат из [17] позволяют полностью охарактеризовать все мультипликаторы проективных весовых пространств целых функций (теорема 2). На основании этого мы устанавливаем описание всех мультипликаторов весовых пространств целых функций с более сложной, индуктивно-проективной, топологической структурой (теорема 3). Далее теорема 3 применяется к уравнениям свертки в пространствах УДФ Румье.

В краткой форме данные результаты опубликованы в [24].

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания к работе.

§ 2. Доказательство основного результата

Докажем сформулированную в § 1 теорему 1. Пусть Φ — проективная весовая последовательность вида (5), удовлетворяющая условиям $(\mathscr{U}_1)$–$(\mathscr{U}_3)$ и $(\mathscr{V}_1)$, $(\mathscr{V}_2)$. Как указано выше, доказательство основано на применении теоремы Епифанова. Однако здесь имеется небольшая сложность, заключающаяся в том, что веса $\varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z)$, с одной стороны, не обязаны принадлежать классу $SH_0(\mathbb{C})$, а с другой, могут не удовлетворять условию (2). Решается данная проблема с помощью перехода к регуляризованным весам (см. [17]):

$$\overline{\varphi}_n(z) = \sup\{\ln|f(z)| : f \in H_{\varphi_n}(\mathbb{C}),\ \|f\|_{\varphi_n} \le 1\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Последовательность $\overline{\Phi} = (\overline{\varphi}_n)_{n=1}^\infty$ уже будет состоять из функций класса $SH_0(\mathbb{C})$ и будет эквивалентна исходной весовой последовательности. Поэтому если докажем справедливость утверждения (iii) для Φ, то автоматически получим его справедливость для $\overline{\Phi}$. Соответственно теорема Епифанова позволит сделать вывод о разрешимости $\bar\partial$-задачи в пространстве $L^\infty_{\overline{\Phi}}(\mathbb{C})$, а значит, и в $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ и о слабой приведенности проективного предела $H_{\overline{\Phi}}(\mathbb{C})$ или, что то же самое, пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$.

Итак, докажем утверждение (iii) для весовой последовательности Φ. Обозначим для краткости $u_n(z) := u_n(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную функцию $\xi \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $C_n > 0$ такое, что

$$|\xi(z)| \le e^{C_n} e^{\varphi_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$\ln^+|\xi(z)| - v(z) \le u_n(z) + C_n, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

где, как обычно, $\ln^+|\xi(z)| = \max\{\ln|\xi(z)|, 0\}$.

Положим $\alpha(t) := \sup\{\ln^+|\xi(z)| - v(z) : |z| \le t\}$, $t \ge 0$. Тогда

$$\alpha(t) \le u_n(t) + C_n, \quad t \ge 0,\ n \in \mathbb{N},$$

и в силу условия $(\mathscr{U}_3)$

$$\alpha(t) + k \ln \frac{1}{\rho(t)} \le u_n(t) + C_{n,k}, \quad t \ge 0,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $C_{n,k} = C_{n+k} + D_{n+k-1} + \dots + D_n$.

Пусть $\tilde{\alpha}(t) := \alpha(e^t)$, $\tilde{u}_n(t) := u_n(e^t)$, $t \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. На основании (6) заключаем, что

$$\tilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)} \le \tilde{u}_n(t) + C_{n,1}, \quad t \ge 0,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{u}_n(t) - \left(\tilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)}\right) \to \infty \quad \text{при } t \to \infty,\ n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, из $(\mathscr{U}_3)$, очевидно, вытекает, что

$$t = o(\tilde{u}_n(t)), \quad \tilde{u}_n(t) - \tilde{u}_{n+1}(t) \to \infty, \quad t \to \infty.$$

Таким образом, к последовательности $(\tilde{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ и функции $\tilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)}$ можно применить лемму 2 из [14], в соответствии с которой имеется неубывающая выпуклая на $[0, \infty)$ функция $\tilde{u}(t)$ такая, что

$$\tilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)} \le \tilde{u}(t) \le \tilde{u}_n(t) + B_n, \quad t \ge 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Функция $\tilde{u}(t)$ строится следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = C + \begin{cases} \tilde{u}_1(t_1), & t \in [0, t_1), \\ \tilde{\beta}_n(t), & t \in [t_n, r_n), \\ \tilde{u}_{n+1}(t), & t \in [r_n, t_{n+1}), \end{cases} \tag{8}$$

где $C := \max\left\{\tilde{\alpha}(t) + \ln \frac{1}{\rho(e^t)} : t \in [0, t_1]\right\}$, $\tilde{\beta}_n(t) = \tilde{u}_n(t_n) + (\tilde{u}_n)'_+(t_n)(t - t_n)$, точки $t_n \uparrow \infty$ и $r_n \uparrow \infty$ выбираются специальным образом, причем $t_n < r_n < t_{n+1} - 1$. Заметим, что на самом деле точку t_{n+1} можно брать сколь угодно большой по сравнению с r_n, а также что $\tilde{u}_{n+1}(t) \le \tilde{\beta}_n(t) \le \tilde{u}_n(t)$ при всех $t \in [t_n, r_n)$.

Положим $u(z) := \tilde{u}(\ln^+|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $u \in SH(\mathbb{C})$.

Покажем, что функция u ρ-устойчива в $\mathbb{C}$. Понятно, что достаточно проверить ρ-устойчивость на промежутке $[0, \infty)$. Фиксируем $\tau, s \in [0, \infty)$ такие, что $s < \tau < s + \rho(s)$. Найдем $n \in \mathbb{N}$, при котором $\ln s \in [t_n, t_{n+1})$. Дальнейшие рассуждения зависят от расположения точек s и τ.

(a) Если $\ln s \in [t_n, r_n)$, то $\ln \tau \le \ln(s + \rho(s)) \le \ln(e^{r_n} + 1) \le r_n + 1$. Так как $r_n + 1 < t_{n+1}$, то либо $\ln \tau \in [t_n, r_n)$, либо $\ln \tau \in [r_n, t_{n+1})$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

(a1) Пусть сначала $\ln \tau \in [t_n, r_n)$. Пользуясь равенствами (8), а также выпуклостью функции $\tilde{u}_n$, получаем, что

$$\begin{aligned} u(\tau) - u(s) &= \tilde{u}(\ln \tau) - \tilde{u}(\ln s) = \tilde{\beta}_n(\ln \tau) - \tilde{\beta}_n(\ln s) = (\tilde{u}_n)'_+(t_n)(\ln \tau - \ln s) \\ &\le (\tilde{u}_n)'_+(\ln s)(\ln \tau - \ln s) \le \tilde{u}_n(\ln \tau) - \tilde{u}_n(\ln s) = u_n(\tau) - u_n(s) \le C_0, \end{aligned}$$

где константа C_0 взята из условия $(\mathscr{U}_2)$.

(а2) Если $\ln\tau \in [r_n, t_{n+1})$, то, учитывая, что $\tilde{u}_{n+1}(\ln s) \le \tilde{\beta}_n(\ln s)$, и снова используя $(\mathscr{U}_2)$, имеем

$$u(\tau) - u(s) = \tilde{u}_{n+1}(\ln\tau) - \tilde{\beta}_n(\ln s) \le \tilde{u}_{n+1}(\ln\tau) - \tilde{u}_{n+1}(\ln s) \\ = u_{n+1}(\tau) - u_{n+1}(s) \le C_0.$$

(б) Если $\ln s \in [r_n, t_{n+1})$, то $\ln\tau$ может попасть на один из промежутков $[r_n, t_{n+1})$, $[t_{n+1}, r_{n+1})$ или $[r_{n+1}, t_{n+2})$. Первый случай тривиален. Второй и третий, по сути, аналогичны случаю (а2). При их рассмотрении используются соответственно неравенства $\tilde{\beta}_{n+1}(\ln\tau) \le \tilde{u}_{n+1}(\ln\tau)$ и $\tilde{u}_{n+2}(\ln\tau) \le \tilde{u}_{n+1}(\ln\tau)$. Во всех указанных ситуациях в конечном итоге получаем, что $u(\tau) - u(s) \le C_0$. Таким образом, функция u ρ-устойчива на $[0,\infty)$, а значит, и в $\mathbb{C}$.

На основании неравенств (7) с учетом определения функции $\tilde{\alpha}$ имеем

$$\ln^+|\xi(z)| + \ln\frac{1}{\rho(z)} \le u(z) + v(z) \le u_n(z) + v(z) + B_n, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Применив теперь к субгармонической ρ-устойчивой функции $u(z) + v(z)$ предложение 3.3 из [17], получим семейство $I = \{g_\zeta : \zeta \in \mathbb{C}\}$ целых функций таких, что

$$g_\zeta(\zeta) = \rho(\zeta)e^{u(\zeta)+v(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

$$|g_\zeta(z)| \le \frac{M}{\rho^2(z)}(1+|z|^2)^4 e^{u(z)+v(z)}, \quad z,\zeta \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Здесь M — абсолютная постоянная, не зависящая от z и ζ.

Положим $l(z) := \sup\{|g_\zeta(z)| : \zeta \in \mathbb{C}\}$, $z \in \mathbb{C}$. Из (11), правой части (9) и $(\mathscr{U}_3)$ вытекает, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|g_\zeta(z)| \le M\exp\left(u_{n+4}(z) + 4\ln\frac{1+|z|^2}{\rho(z)} + v(z) + B_{n+4}\right) \le A_n e^{u_n(z)+v(z)},$$

где $A_n = M\exp(B_{n+4} + D_{n+3} + D_{n+2} + D_{n+1} + D_n)$ не зависит от z и ζ. Следовательно,

$$l(z) \le A_n\, e^{\varphi_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

т. е. $l \in L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$.

С другой стороны, на основании (10) и левой части (9) имеем

$$l(\zeta) \ge |g_\zeta(\zeta)| = \rho(\zeta)e^{u(\zeta)+v(\zeta)} \ge |\xi(\zeta)|, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Сформулируем некоторые простые полезные следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть $u = u(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая ρ-устойчивая функция такая, что $u(e^t)$ выпукла на $[0,\infty)$ и $\ln\frac{t}{\rho(t)} = o(u(t))$ при $t \to \infty$, $\infty > q_n \downarrow q \ge 0$, $v = v(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — субгармоническая ρ-устойчивая функция. Тогда для проективной весовой последовательности*

$$\Phi = (q_n u(|z|) + v(z))_{n=1}^\infty$$

справедливы утверждения теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть функция* $u = u(t)$ *такая же, как в следствии* 1, $\infty > q_n \downarrow q \geq 0$, $v = v(t)$ *— неубывающая выпуклая на* $[0, \infty)$ *функция, удовлетворяющая условию* $v'_+(t + \rho(t))\rho(t) \leq C$ *при* $t \geq 0$. *Тогда утверждения теоремы* 1 *верны для последовательности*

$$\Phi = (q_n u(|z|) + v(|\operatorname{Im} z|))_{n=1}^{\infty}.$$

Справедливость следствия 1 очевидна. Что касается следствия 2, то неубывание и выпуклость $v(t)$ обеспечивают субгармоничность в $\mathbb{C}$ функции $v(|\operatorname{Im} z|)$. Таким образом, в небольшом пояснении нуждается лишь ρ-устойчивость этой функции. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $\zeta : |\zeta| \leq \rho(z)$. Тогда

$$|v(|\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \zeta|) - v(|\operatorname{Im} z|)| \leq v'_+(|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} \zeta|) \cdot ||\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \zeta| - |\operatorname{Im} z|| \\ \leq v'_+(|z| + \rho(z))\rho(z) \leq C.$$

Значит, $v(|\operatorname{Im} z|)$ является ρ-устойчивой функцией в $\mathbb{C}$.

Приведем некоторые важные примеры применения теоремы 1 и ее следствий.

Пример 1. Пусть

$$\Phi = (q_n \omega(|z|) + l|\operatorname{Im} z|)_{n=1}^{\infty}, \tag{12}$$

где $\infty > q_n \downarrow q \geq 0$, $l > 0$, ω — весовая функция в смысле [6, 11, 12], т. е. непрерывная неубывающая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(α) для каждого $p > 1$ существует $C > 0$ такое, что

$$\omega(x + y) \leq p(\omega(x) + \omega(y)) + C \quad \text{при всех } x, y \geq 0;$$

(α') $\omega(t) = O(t)$ при $t \to \infty$;
(γ) $\ln t = o(\omega(t))$ при $t \to \infty$;
(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$.

В частности, в качестве $\omega(t)$ могут выступать функции

$$\omega(t) = \ln^\beta(1 + t),\ \beta > 1, \quad \omega(t) = \frac{t}{\ln^\beta(e + t)},\ \beta > 0,$$

$$\omega(t) = t^{\alpha(t)}, \quad \text{где } \alpha(t) \to \alpha \in (0, 1] \text{ — некоторый уточненный порядок.}$$

Как отмечалось в § 1, последовательности (12) играют важную роль при исследовании пространств УДФ Румье (более подробно см. § 3).

Известно (см., например, [14, неравенство (5)]), что функция $\omega(t)$ ρ-устойчива на $[0, \infty)$ с $\rho(t) \equiv 1$. По следствию 1 или 2 получаем, что $\bar{\partial}$-задача разрешима в пространстве $L^\infty_\Phi(\mathbb{C})$ при любой правой части из этого пространства и что соответствующий проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ слабо приведенный. Данные результаты будут использованы далее в § 3.

Следующий пример в определенной степени обобщает пример 1.

Пример 2. Пусть $\rho(t) = e^{-t^s}$, $s > 0$, $\alpha(t) \to \alpha > s$ — некоторый уточненный порядок, $\beta \geq 1$, $\infty > q_n \downarrow q \geq 0$, $l > 0$. Рассмотрим весовые последовательности вида

$$\Phi = (q_n |z|^{\alpha(|z|)} + l|\operatorname{Im} z|^\beta)_{n=1}^{\infty}. \tag{13}$$

Воспользуемся следствием 2. В данном случае $u(t) = t^{\alpha(t)}$, $v(t) = lt^\beta$. Как известно, функция $u(t)$ монотонно возрастает при достаточно больших значениях

t. Далее, всегда можно считать (см. [11]), что $u(e^t)$ выпукла на $[0,\infty)$. Наконец, $\ln\frac{t}{\rho(t)} = \ln t + t^s = o(u(t))$ при $t \to \infty$, поскольку $\alpha > s$. Что касается функции $v(t)$, то она выпукла на $[0,\infty)$ и

$$v'(t+\rho(t))\rho(t) = l\beta(t+e^{-t^s})^{\beta-1}e^{-t^s} \to 0, \quad t \to \infty.$$

Таким образом, получаем, что утверждения теоремы 1 верны для последовательностей вида (13).

Пример 3. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D$. Будем использовать стандартные обозначения: $H_D(z) = \sup\{\operatorname{Re} z\zeta : \zeta \in D\}$, $d_D(z) = \operatorname{dist}(z, \partial D) = \inf\{|z-w| : w \in \partial D\}$, $z \in \mathbb{C}$. В последнее время достаточно активно (см., например, [21–23]) исследовались пространства

$$A^{-\infty}(D) = \{f \in H(D) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z\in D}|f(z)|(d_D(z))^n < \infty\}$$

голоморфных в области D функций, имеющих полиномиальный рост вблизи границы области. Сильное сопряженное пространство $(A^{-\infty}(D))'_\beta$ посредством преобразования Лапласа (или Фурье — Бореля) функционалов описывается (см. [22]) в виде проективного пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$ целых функций, где

$$\Phi = (H_D(z) - n\ln(1+|z|))_{n=1}^{\infty}.$$

Известно [22, доказательство леммы 3.1]), что данная весовая последовательность эквивалентна последовательности $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$, состоящей из функций $\psi_n(z) = \sup\{\operatorname{Re} z\zeta + n\ln d_D(\zeta) : \zeta \in D\}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай, когда область D представляет собой круг. Пусть для удобства этот круг единичный: $D = \{z : |z| < 1\}$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\psi_n(z) = \sup_{|\zeta|<1}(\operatorname{Re} z\zeta + n\ln(1-|\zeta|)) = \sup_{0\le x<1}(|z|x + n\ln(1-x)) = \begin{cases} 0, & |z| \le n, \\ |z| - n\ln|z| + n\ln\frac{n}{e}, & |z| > n. \end{cases}$$

Таким образом, последовательность Ψ имеет вид (5), где

$$u_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le n, \\ t - n\ln t + n\ln\frac{n}{e}, & t > n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

$v(z) \equiv 0$. Нетрудно проверить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция u_n непрерывна и возрастает на $[0,\infty)$, а функция $u_n(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$. Далее, очевидно, что семейство $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0,\infty)$ с $\rho(t) \equiv 1$, поскольку

$$u_n(t+1) - u_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le n-1, \\ t+1+n\ln\frac{n}{e(t+1)}, & n-1 < t \le n, \\ 1 + n\ln\frac{t}{t+1}, & t > n, \end{cases}$$

и в целом $u_n(t+1) - u_n(t) \le 1$ при всех $t \ge 0$.

Наконец,

$$u_n(t) - u_{n+1}(t) = \ln t + \ln\frac{n^n e}{(n+1)^{n+1}}, \quad t > n+1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Значит, условие $(\mathscr{U}_3)$ выполнено с $\rho(t) \equiv 1$ для прореженной через один элемент последовательности $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Доказанная теорема 1, таким образом, позволяет легко сделать вывод о разрешимости $\bar{\partial}$-задачи в соответствующем пространстве $L^{\infty}_{\Phi}(\mathbb{C})$ и о слабой приведенности проективного предела $H_{\Phi}(\mathbb{C}) \simeq (A^{-\infty}(D))'_{\beta}$. Аналогично теорема 1 может быть использована при изучении пространств не только полиномиального, но и заданного роста вблизи границы круговой области, когда множитель $(d_D(z))^n$ в определении пространства заменяется множителем $\varphi(d_D(z))$, где φ — некоторая функция.

Для сравнения отметим, что в [21–23], для того чтобы установить слабую приведенность пространства $H_{\Phi}(\mathbb{C}) \simeq (A^{-\infty}(D))'_{\beta}$ и разрешимость неоднородного уравнения Коши — Римана в соответствующем пространстве измеримых функций, использовался другой, достаточно специфический и громоздкий, метод, заключающийся в проверке полноты системы экспонент $\mathscr{E}_D = \{e^{\lambda z} : \lambda \in D\}$ в $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ (см. [21, лемма 2.11; 23, доказательство предложения 2.5; 22, лемма 3.1]). Однако в указанных работах данные факты были доказаны в случае произвольной области D.

§ 3. Приложения основного результата

Как отмечено в § 1, в качестве одного из приложений теоремы 1 на основании [17] полностью опишем множества мультипликаторов проективных и индуктивно-проективных пространств целых функций, задаваемых весовыми последовательностями рассматриваемого вида.

Напомним, что если F и G — некоторые локально выпуклые пространства целых функций, то целая функция μ называется *мультипликатором из F в G*, если $\mu F \subset G$. Совокупность всех мультипликаторов из F в G будем обозначать через $M(F, G)$. Далее, мультипликатор $\mu \in M(F, G)$ называется *непрерывным*, если оператор умножения $\Lambda_\mu : f \in F \mapsto \mu f$ действует непрерывно из F в G. В случае $F = G$ вместо $M(F, F)$ будем для краткости писать $M(F)$.

Если F и G — индуктивные пространства целых функций, то описание множества $M(F, G)$ хорошо известно (см. [25, предложение 3]). Для проективных пространств $F = H_{\Phi}(\mathbb{C})$ и $G = H_{\Psi}(\mathbb{C})$ ситуация более сложная. Общий результат о множестве $M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C}))$ получен в [17, теорема 5.1], но носит условный характер: именно предполагается, что проективный предел $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ слабо приведенный. Соответственно установленная выше теорема 1 позволяет сформулировать данный результат для последовательностей (5) в явном и более удобном для применения виде.

Теорема 2. *Пусть $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — проективная весовая последовательность вида (5), обладающая свойствами $(\mathscr{U}_1)$–$(\mathscr{U}_3)$ и $(\mathscr{V}_1)$, $(\mathscr{V}_2)$, а $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная проективная весовая последовательность. Тогда*

$$M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C})) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\psi_m - \varphi_n}(\mathbb{C}),$$

причем каждый мультипликатор $\mu \in M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C}))$ непрерывен.

Применим теорему 2 для описания мультипликаторов пространств целых функций с более сложной индуктивно-проективной топологической структурой.

Под *индуктивно-проективной весовой системой* будем понимать систему $\Phi = (\varphi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$, состоящую из непрерывных функций $\varphi_{n,m} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ таких, что

$\varphi_{n,m} \geq \varphi_{n+1,m}$ и $\varphi_{n,m} \leq \varphi_{n,m+1}$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$. Соответственно при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ будем получать проективную весовую последовательность $\Phi_m = (\varphi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ и проективное пространство $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ целых функций. При этом, очевидно, $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ будет непрерывно вложено в $H_{\Phi_{m+1}}(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}$. Образуем объединение этих пространств $H_{\Phi}(\mathbb{C}) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ и наделим его топологией индуктивного предела $\operatorname{ind}\limits_{m} H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$, т. е. смешанной индуктивно-проективной топологией $\operatorname{ind}\limits_{m} \operatorname{proj}\limits_{n} H_{\varphi_{n,m}}(\mathbb{C})$ банаховых пространств $H_{\varphi_{n,m}}(\mathbb{C})$.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi = (\varphi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ *и* $\Psi = (\psi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ *— индуктивно-проективные системы, причем система* Ψ *произвольна, а* Φ *состоит из функций* $\varphi_{n,m} = u_n(|z|) + v_m(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$, *где* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* ($\mathscr{U}_1$)–($\mathscr{U}_3$), *а каждая функция* v_m *— условиям* ($\mathscr{V}_1$), ($\mathscr{V}_2$). *Тогда*

$$M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C})) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\psi_{m,n} - \varphi_{n,m}}(\mathbb{C}), \tag{14}$$

причем каждый мультипликатор $\mu \in M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C}))$ *непрерывен.*

Доказательство. Поскольку топологии пространств $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ и $H_{\Psi}(\mathbb{C})$ мажорируют топологию поточечной сходимости, для любого мультипликатора $\mu \in M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C}))$ оператор умножения $\Lambda_{\mu} : f \in H_{\Phi}(\mathbb{C}) \mapsto \mu f \in H_{\Psi}(\mathbb{C})$ имеет замкнутый график. Следовательно, по теореме Гротендика о замкнутом графике оператор Λ_{μ} действует из $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ в $H_{\Psi}(\mathbb{C})$ непрерывно.

По свойствам индуктивных пределов последовательностей пространств Фреше последнее равносильно тому, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $l \in \mathbb{N}$ такое, что Λ_{μ} действует непрерывно из $H_{\Phi_k}(\mathbb{C})$ в $H_{\Psi_l}(\mathbb{C})$. Значит,

$$M(H_{\Phi}(\mathbb{C}), H_{\Psi}(\mathbb{C})) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} M(H_{\Phi_k}(\mathbb{C}), H_{\Psi_l}(\mathbb{C})).$$

Применяя для описания множества $M(H_{\Phi_k}(\mathbb{C}), H_{\Psi_l}(\mathbb{C}))$ теорему 2, получаем равенство (14). $\square$

В заключение применим теорему 3 к исследованию операторов свертки в пространствах УДФ Румье. Введем указанные пространства.

Пусть, как в примере 1 § 2, ω — весовая функция в смысле [6, 11], т. е. непрерывная неубывающая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям (α), (α'), (γ) и (δ), $\omega(z) := \omega(|z|)$ для $z \in \mathbb{C}$. Для функции $\varphi_{\omega}(x) = \omega(e^x)$ введем сопряженную по Юнгу $\varphi_{\omega}^{*}(y) = \sup\{xy - \varphi_{\omega}(x) : x \geq 0\}$, $y \geq 0$. Далее, пусть $\infty > q_n \downarrow q \geq 0$, $I = (-a, a)$ — заданный конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$, $0 < a_m \uparrow a$.

Пространством УДФ Румье на интервале I называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на I функций:

$$\mathscr{E}_{\{\omega\}}^{q}(I) = \left\{ f \in C^{\infty}(I) \mid \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : |f|_{n,m} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq a_m} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q_n \varphi_{\omega}^{*}(j/q_n)}} < \infty \right\}.$$

Число q задает так называемый тип пространства. Именно, при $q = 0$ соответствующее пространство $\mathscr{E}_{\{\omega\}}^{0}(I)$ называется *пространством УДФ Румье минимального типа* (см. [6, 12, 18, 19]), а при $q > 0$ — *нормального типа* (см. [20]).

Наделим пространство $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ естественной топологией $\operatorname{proj}\limits_{m}\operatorname{ind}\limits_{n}\mathscr{E}_{n,m}$ полунормированных пространств $\mathscr{E}_{n,m}=\{f\in C^\infty(I):|f|_{n,m}<\infty\}$, $n,m\in\mathbb{N}$. Известно (см., например, [14]), что сильное сопряженное $\left(\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)'_\beta$ к пространству $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ топологически изоморфно следующему пространству целых функций:

$$H^q_{\{\omega\},I}=\left\{f\in H(\mathbb{C})\mid \exists m\in\mathbb{N}:\forall n\in\mathbb{N}\ \|f\|_{n,m}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{q_n\omega(z)+a_m|\operatorname{Im}z|}}<\infty\right\},$$

наделенному естественной смешанной индуктивно-проективной топологией. Топологический изоморфизм устанавливает преобразование Фурье — Лапласа функционалов

$$\mathscr{F}:\psi\in\left(\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)'\mapsto\hat{\psi}(z):=\psi_x(e^{-ixz}),\quad z\in\mathbb{C}.$$

В приведенных выше обозначениях пространство $H^q_{\{\omega\},I}$ совпадает с пространством $H_\Phi(\mathbb{C})$, задаваемым индуктивно-проективной системой $\Phi=(\varphi_{n,m})_{n,m=1}^\infty$, где

$$\varphi_{n,m}(z)=q_n\omega(z)+a_m|\operatorname{Im}z|,\quad z\in\mathbb{C},\ n,m\in\mathbb{N}.$$

Перейдем к определению *операторов свертки*, действующих в $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$. Как обычно, оператор свертки в $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ будет пониматься как сопряженный к оператору умножения в $H^q_{\{\omega\},I}$. Именно, пусть μ — какой-нибудь непрерывный мультипликатор пространства $H^q_{\{\omega\},I}$. Тогда оператор умножения $\Lambda_\mu:f\mapsto\mu f$ действует непрерывно в $H^q_{\{\omega\},I}$. Далее находим линейный непрерывный функционал $\psi_\mu:=\mathscr{F}^{-1}(\mu)$ на $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$, преобразование Фурье — Лапласа которого совпадает с μ, и определяем естественным образом оператор свертки на $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$:

$$(T_\mu f)(x):=\langle\psi_\mu,f(x+y)\rangle_y,\quad f\in\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I),\ x\in I.$$

При этом T_μ будет сопряженным оператором к $\mathscr{F}^{-1}\circ\Lambda_\mu\circ\mathscr{F}$ и будет действовать линейно и непрерывно из $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ в $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$. Под *символом* оператора свертки T_μ сразу для удобства понимаем не сам функционал $\psi_\mu\in\left(\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)'$, а его преобразование Фурье — Лапласа μ — мультипликатор пространства $H^q_{\{\omega\},I}$.

Как частный случай операторы T_μ включают в себя дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\frac{d^k}{dx^k}$.

При решении различных задач для операторов свертки в $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ первый необходимый шаг — это описание множества всех символов μ, т. е. множества всех мультипликаторов сопряженного пространства $H^q_{\{\omega\},I}$. Теорема 3 позволяет установить данное описание абсолютно точно.

Заметим, что к настоящему времени операторы свертки изучались только в пространствах УДФ Румье минимального типа, когда $q=0$ (см. [18,19]). При этом в [18], где рассматривался случай пространств $\mathscr{E}^0_{\{\omega\}}(-\infty,\infty)$ функций на всей числовой прямой, проблема описания символов не стояла, поскольку соответствующее пространство $H^0_{\{\omega\},(-\infty,\infty)}$ было алгеброй. В работе [19], посвященной операторам свертки в пространствах $\mathscr{E}^0_{\{\omega\}}(I)$ минимального типа на конечном интервале, использовалось интуитивно понятное описание множества всех символов без какого бы то ни было обоснования.

Отметим также, что для случая пространств УДФ Берлинга, двойственного случаю пространств Румье, описание символов операторов свертки успешно устанавливается за счет упоминавшихся ранее результатов из [25] (см. [26]).

Итак, на основании теоремы 3 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть ω — весовая функция, $\infty > q_n \downarrow q \geq 0$, $0 < a_m \uparrow a \leq \infty$, $I = (-a, a)$. Если интервал I конечен, то независимо от типа пространства множество всех символов операторов свертки в пространстве $\mathscr{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ совпадает с множеством*

$$M = \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0 \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\}.$$

Если $I = (-\infty, \infty)$, то при всех $q \geq 0$ множество всех символов совпадает с

$$M = \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) \mid \exists m \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+m|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\}.$$

Как отмечено выше, случай $a = \infty$, $q = 0$ тривиален; он включен в формулировку лишь для целостности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
2. *Hörmander L.* Generators for some rings of analytic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 943–949.
3. *Kelleher J. J., Taylor B. A.* Finitely generated ideals in rings of analytic functions // Math. Ann. 1971. V. 193. P. 225–237.
4. *Митягин Б. С., Хенкин Г. М.* Линейные задачи комплексного анализа // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 93–152.
5. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1979. V. 33. P. 109–143.
6. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat. 1988. V. 26. P. 265–287.
7. *Meise R., Taylor B. A.* Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets // Amer. J. Math. 1989. V. 111. P. 309–337.
8. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. Math. 1962. V. 76. P. 148–170.
9. *Meise R., Vogt D.* Characterization of convolution operators on spaces of C^∞-functions admitting a continuous linear right inverse // Math. Ann. 1987. V. 279. P. 141–155.
10. *Momm S.* Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math. (Basel). 1992. V. 58. P. 47–55.
11. *Полякова Д. А.* О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 4. С. 548–566.
12. *Brawn R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Result. Math. 1990. V. 17. P. 206–237.
13. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 83–108.
14. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 485–500.
15. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 83–92.
16. *Langenbruch M.* Differentiable functions and the $\bar{\partial}$-complex // Functional analysis: Proc. Essen Conf. (K. D. Bierstedt, A. Pietsch, D. Vogt, ed.). New York: Marcel Dekker, Inc., 1993. P. 415–434.
17. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions and some of its applications // Stud. Math. 2010. V. 200. P. 279–295.
18. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J. 1987. V. 36. P. 729–756.
19. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type // Stud. Math. 1997. V. 125. P. 101–129.

20. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Result. Math. 2003. V. 44. P. 195–213.

21. *Abanin A. V., Le Hai Khoi.* Pre-dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Complex Anal. Oper. Theory. 2011. V. 5, N 4. P. 1073–1092.

22. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains // Bull. Sci. Math. 2012. V. 136. P. 96–110.

23. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat. 2012. V. 50. P. 1–22.

24. *Полякова Д. А.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок // Изв. вузов. Математика. 2015. Т. 10. С. 77–82.

25. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math. 1985. V. 15, N 2. P. 105–114.

26. *Абанина Д. А.* Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 477–494.

Статья поступила 19 февраля 2016 г.

Полякова Дарья Александровна
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
forsites1@mail.ru