

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ
НА РЕШЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ
МЕТОДОМ СО СХЕМОЙ КРАНКА —
НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ
А. С. Бондарев, В. В. Смагин

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве гладко разрешимое линейное вариационное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближенным проекционно-разностным методом с использованием по пространству произвольного конечномерного подпространства, а по времени схемы Кранка — Николсон. Доказана разрешимость и единственность приближенного решения, а также эффективные оценки погрешностей приближенных решений. Установлены сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости, точные как по времени, так и по пространственным переменным.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.404

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, периодическое условие, проекционно-разностный метод, схема Кранка — Николсон.

1. Основные предположения и постановка задачи

Пусть даны сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' двойственное к V , а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(t, u, v)$, измеримую по $t \in [0, T]$. Пусть для $u, v \in V$ и п. в. $t \in [0, T]$

$$|a(t, u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(t, u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t, u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \rightarrow V'$ такой, что $(A(t)u, v) = a(t, u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z, v) — скалярное произведение в H [1, гл. 2].

Рассмотрим в V' на $[0, T]$ параболическую задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00197).

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле.

В [2, гл. 3, теорема 6.1] показано, что для $f \in L_2(0, T; V')$ задача (2) имеет единственное решение, далее называемое слабым, такое, что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$.

В [3] задача (2) решалась приближенно полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера, которая является разностной схемой первого порядка аппроксимации.

Для получения сходимости приближенных решений к точному решению исходной задачи со вторым порядком по времени будем использовать по времени схему Кранка — Николсон. Заметим, что схема Кранка — Николсон дает второй порядок убывания по времени погрешностей приближенных решений только при условии достаточной гладкости точного решения. Поэтому будем требовать от исходных данных задачи (2) большую гладкость, чем в [2].

В [4] с помощью аппроксимации задачи (2) методом Галёркина установлена гладкая разрешимость задачи (2). В этой связи считаем далее, что вложение $V \subset H$ компактно, функция $t \rightarrow a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и для формы $a_1(t, u, v) = \partial a(t, u, v) / \partial t$ при п. в. $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$|a_1(t, u, v)| \leq \mu_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad (u, v \in V). \quad (3)$$

Если также $a(0, u, v) = a(T, u, v)$, производная f' принадлежит $L_2(0, T; V')$, а $f(0) = f(T)$, то слабое решение задачи (2) обладает дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u'' \in L_2(0, T; V')$.

Перейдем к построению приближенной задачи. Пусть V_h , где h — положительный параметр, есть произвольное конечномерное подпространство пространства V . Определим пространство V'_h , задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \leq \|u_h\|_{V'}$. Пусть P_h — ортопроектор в пространстве H на V_h . Как замечено в [5], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P}_h : V' \rightarrow V'_h$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P}_h u\|_{V'_h} \leq \|u\|_{V'}$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in V$ важное соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$.

Для построения приближенных решений возьмем равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим разностную задачу

$$(u_k^h - u_{k-1}^h) \tau^{-1} + A_k^h (u_k^h + u_{k-1}^h) 2^{-1} = f_k^h \quad (k = \overline{1, N}), \quad u_0^h = u_N^h, \quad (4)$$

где $\tau = t_k - t_{k-1}$, $A_k^h = \overline{P}_h (A(t_k) + A(t_{k-1})) 2^{-1}$, $f_k^h = \overline{P}_h (f(t_k) + f(t_{k-1})) 2^{-1}$. Решение задачи (4) будем называть *приближенным решением задачи (2)*.

Для задачи (2) с периодическим (нелокальным) условием на решение проекционно-разностный метод со схемой Кранка — Николсон рассматривается, по-видимому, впервые. Отметим близкую по тематике и по схеме изложения работу [6], где исследуется проекционно-разностный метод со схемой Кранка — Николсон для вариационного параболического уравнения с оператором A , не зависящим от времени, и нелокальным интегральным условием на решение. Кроме указанных отличий настоящей работы от [6], обратим внимание на то, что по сравнению с [6], где использовалась некоторая специальная последовательность проекционных подпространств, удалось получить результаты о сходимости метода для произвольной предельно плотной в V последовательности проекционных подпространств V_h .

Лемма 1. Задача (4) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая конечномерность задачи (4), достаточно доказать, что однородная задача имеет только нулевое решение. Итак, рассмотрим задачу

$$(v_k^h - v_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_k^h(v_k^h + v_{k-1}^h)2^{-1} = 0 \quad (k = \overline{1, N}), \quad v_0^h = v_N^h. \quad (5)$$

Из (5) для всех $k = \overline{1, N}$ получим тождества

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i \cdot 2 \operatorname{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h) + (A_k^h(v_k^h + v_{k-1}^h)2^{-1}, v_k^h + v_{k-1}^h)\tau = 0,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Из последнего равенства и условия (1) для всех $k = \overline{1, N}$ следует оценка

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + 2^{-1}\alpha\|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2\tau \leq 0.$$

Суммируем последние неравенства по всем $k = \overline{1, N}$. Учитывая, что $v_0^h = v_N^h$, имеем $\sum_{k=1}^N \|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2\tau = 0$. Следовательно, $v_k^h + v_{k-1}^h = 0$ для всех $k = \overline{1, N}$. Подставив последнее равенство в (5), получим $v_k^h - v_{k-1}^h = 0$. Тогда из периодического условия следует, что $v_k^h = 0$ для всех $k = \overline{0, N}$.

Итак, задача (4) имеет единственное решение $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$. $\square$

Далее в соответствующих нормах будут установлены оценки погрешностей приближенных решений, что позволит доказать сходимость приближенных решений к точному.

2. Базовая оценка погрешностей

Лемма 2. Для решения $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ задачи (4) справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \left(\left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 + \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \right) \tau \leq M \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (4) на $(u_k^h + u_{k-1}^h)\tau$ скалярно в H и перейдем к вещественной части:

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(A_k^h(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h + u_{k-1}^h)\tau = \operatorname{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)\tau.$$

Воспользовавшись (1), получим

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \operatorname{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)\tau.$$

Оценим правую часть последнего неравенства:

$$\operatorname{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)\tau \leq |(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)|\tau \leq \frac{1}{\alpha} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau + \alpha \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau,$$

откуда для $k = \overline{1, N}$

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \frac{1}{\alpha} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau.$$

Суммируя последние неравенства по $k = \overline{1, N}$, получим

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_{V'_h}^2 \tau.$$

Оценка выражения $\sum_{k=1}^N \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V'_h}^2 \tau$ следует непосредственно из уравнения (4). $\square$

Лемма 3. Для решения $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ задачи (4) справедлива оценка

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \leq M \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_{V'_h}^2 \tau. \quad (7)$$

Доказательство. В [3] для произвольных $v_k^h \in V_h$, где $k = \overline{0, N}$ и $N\tau = T$, получена оценка

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|v_k^h\|_H^2 \leq C(T) \sum_{k=1}^N (\|v_{k-1}^h\|_V^2 + \|v_k^h\|_V^2) \tau + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'_h}^2 \tau. \quad (8)$$

По решению $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ задачи (4) определим элемент $u_{-1}^h = u_{N-1}^h$. Положив $v_k^h = (u_k^h + u_{k-1}^h)2^{-1}$, где $k = \overline{1, N}$, соответственно получим $v_0^h = (u_0^h + u_{-1}^h)2^{-1} = (u_N^h + u_{N-1}^h)2^{-1}$. К элементам v_k^h применим оценку (8):

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 &\leq C \sum_{k=1}^N \left(\left\| \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2} \right\|_V^2 + \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \right) \tau \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left\| \left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} - \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2} \right) \tau^{-1} \right\|_{V'_h}^2 \tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что в силу задания $u_{-1}^h = u_{N-1}^h$. Тогда

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2} \right\|_V^2 \tau = \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\| \left(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} - \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2} \right) \tau^{-1} \right\|_{V'_h}^2 \tau \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'_h}^2 \tau + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_{k-1}^h - u_{k-2}^h}{\tau} \right\|_{V'_h}^2 \tau. \end{aligned}$$

Здесь $(u_0^h - u_{-1}^h)\tau^{-1} = (u_N^h - u_{N-1}^h)\tau^{-1}$, поэтому

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_{k-1}^h - u_{k-2}^h}{\tau} \right\|_{V'_h}^2 \tau = \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'_h}^2 \tau.$$

В результате из (9) получается оценка

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \leq 2C \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'_h}^2 \tau.$$

Оценка (7) следует из (6). $\square$

Теорема. Пусть выполнены условия гладкой разрешимости задачи (2) и $u(t)$ — решение задачи (2), а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ — решение задачи (4). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ & + \sum_{k=1}^N \left\| Q_h \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \tau \\ & \leq M \left\{ \int_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 dt + \int_0^T \|(I - Q_h)u'(t)\|_{V'}^2 dt + \tau^4 \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2t - t_{k-1} - t_k) u'(t) dt \right\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt \right\|_{V'}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $z_k^h = Q_h u(t_k) - u_k^h$. Из (2) получим

$$P_h u'(t_k) + \overline{P_h} A(t_k) u(t_k) = \overline{P_h} f(t_k) \quad (k = \overline{1, N}).$$

Возьмем полусумму $(k-1)$ - и k -го равенств, разделим полученное выражение на τ и вычтем из него равенство (4):

$$\begin{aligned} & \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} = A_k^h (Q_h - I) \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \\ & + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (Q_h - P_h) u'(t) dt + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt \\ & - 4^{-1} \overline{P_h} [A(t_k) - A(t_{k-1})][u(t_k) - u(t_{k-1})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Применим к соотношению (11) оценки (6) и (7):

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left(\left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 + \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \right) \tau \\ & \leq M \left\{ \sum_{k=1}^N \left\| (Q_h - I) \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_V^2 \tau + \int_0^T \|(Q_h - I)u'(t)\|_{V'}^2 dt \right. \\ & \quad + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt \right\|_{V'}^2 \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^N \| [A(t_k) - A(t_{k-1})][u(t_k) - u(t_{k-1})] \|_{V'}^2 \tau \right\} = M \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Оценим слагаемые I_i в правой части (12).

Для оценки слагаемого I_3 воспользуемся равенством (2.11) из [6]:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2s + t_k) u''(s) ds. \quad (13)$$

Таким образом,

$$I_3 \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt \right\|_{V'}^2.$$

Обратимся к слагаемому

$$I_1 \leq 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| (Q_h - I) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - u(t) \right) dt \right\|_V^2 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (Q_h - I) u(t) dt \right\|_V^2.$$

Проведя здесь преобразование, подобное (13), получим

$$I_1 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2t - t_{k-1} - t_k) u'(t) dt \right\|_V^2 + 2 \int_0^T \|(Q_h - I)u(t)\|_V^2 dt.$$

Перейдем к слагаемому I_4 . Для произвольных $u, v \in V$ рассмотрим

$$\begin{aligned} |[A(t_k) - A(t_{k-1})]u, v| &= |a(t_k, u, v) - a(t_{k-1}, u, v)| \\ &= \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} a_1(s, u, v) ds \right| \leq \mu_1 \tau \|u\|_V \|v\|_V, \end{aligned}$$

откуда

$$\|[A(t_k) - A(t_{k-1})]u\|_{V'} \leq \mu_1 \tau \|u\|_V.$$

Таким образом, для I_4 имеем

$$I_4 \leq \mu_1^2 \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt \right\|_V^2 \tau^3 \leq \mu_1^2 \tau^4 \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt.$$

Итак, доказана оценка третьего слагаемого в левой части (10).

Для оценки первого и второго слагаемых в левой части (10) заметим, что

$$\frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} = (I - Q_h) \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} + \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}.$$

Тогда оценка второго слагаемого в левой части (10) следует из оценки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ \leq 2 \sum_{k=1}^N \left\| (Q_h - I) \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} \right\|_V^2 \tau + 2 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в левой части (10) получим

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 &\leq 2 \max_{1 \leq k \leq N} \left\| (Q_h - I) \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} \right\|_H^2 \\ &+ 2 \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|(Q_h - I)u(t)\|_H^2 + 2 \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2. \end{aligned}$$

Заметим, что если $v \in L_2(0, T; V)$ и $v' \in L_2(0, T; V')$, то [7, гл. 3, теорема 1.1] $v \in C([0, T], H)$ и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_H^2 \leq C(T) \int_0^T (\|v(t)\|_V^2 + \|v'(t)\|_{V'}^2) dt. \quad (14)$$

Так как $(Q_h - I)u(t) \in L_2(0, T; V)$, а $(Q_h - I)u'(t) \in L_2(0, T; V')$, имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|(Q_h - I)u(t)\|_H^2 \leq C \int_0^T (\|(Q_h - I)u(t)\|_V^2 + \|(Q_h - I)u'(t)\|_{V'}^2) dt.$$

Таким образом, оценка (10) установлена и для первого слагаемого в левой части (10). $\square$

3. Сходимость приближенных решений и скорость сходимости

Для получения сходимости приближенных решений к точному предположим, что задана последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$ пространства V , предельно плотная в V при $h \rightarrow 0$, т. е. $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ для любого $v \in V$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы и $\{V_h\}$ — предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств. Пусть $u(t)$ — решение задачи (2), а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ — решение задачи (4). Тогда при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 &+ \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ &+ \sum_{k=1}^N \left\| Q_h \frac{u(t_k) - u(t_{k-1}))}{\tau} - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \tau \rightarrow 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ выполняется $|2t - t_{k-1} - t_k| \leq \tau$. Поэтому, оценивая предпоследнее слагаемое в правой части (10), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2t - t_{k-1} - t_k) u'(t) dt \right\|_V^2 &\leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |2t - t_{k-1} - t_k| \|u'(t)\|_V dt \right)^2 \\ &\leq \tau \sum_{k=1}^N \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_V dt \right)^2 \leq \tau^2 \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt. \quad (16) \end{aligned}$$

Аналогично оценивается последнее слагаемое в правой части (10).

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt \right\|_{V'}^2 \leq \tau^2 \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2 dt. \quad (17)$$

Сходимость (15) следует из предельной плотности подпространств $\{V_h\}$ в V и непрерывности вложений $V \subset H \subset V'$. $\square$

Из оценок (10), (16) и (17) видно, что сходимость приближенных решений к точному получается только с первым порядком по времени. Для получения сходимости с большим порядком по времени вплоть до второго следует предположить дополнительную по сравнению теоремой гладкость решения $u(t)$ и иначе провести оценки (16) и (17). Как и в [6, следствие 3.2], устанавливается

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть в теореме решение $u(t)$ обладает дополнительной гладкостью $u'' \in L_p(0, T; V)$, $u''' \in L_p(0, T; V')$ для $1 \leq p \leq 2$. Тогда справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2t - t_{k-1} - t_k) u'(t) dt \right\|_V^2 \leq \frac{1}{16} \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_V^p dt \right)^{2/p}, \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt \right\|_{V'}^2 \leq \frac{1}{16} \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u'''(t)\|_{V'}^p dt \right)^{2/p}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) при $p = 2$ сходимость приближенных решений к точному, как следует из (10), происходит со вторым порядком по времени.

Далее покажем, что в случае, если известны аппроксимационные свойства подпространств $\{V_h\}$, из (10) можно получить скорость сходимости и по пространственным переменным. Подобно тому, как сделано в [6], проиллюстрируем это на проекционных подпространствах типа «конечных элементов».

Предполагаем далее, что существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ [2, гл. 1, § 2].

Пусть $V_h \subset V$ — проекционные подпространства такие, что для $v \in E$

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq rh\|v\|_E. \quad (20)$$

Условие (20) типично для метода конечных элементов. Заметим, что в простейшем одномерном случае такими являются, например, подпространства непрерывных кусочно линейных на заданной сетке функций [8, гл. 3].

В [9] показано, что из (20) для $v \in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна — Нитше)

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leq rh\|(I - Q_h)v\|_V. \quad (21)$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы и подпространства V_h удовлетворяют условию (20). Пусть дополнительно решение $u(t)$ задачи (2)

такое, что $u \in L_2(0, T; E)$, и $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ — решение задачи (4). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ & \leq M \left\{ h^2 \int_0^T (\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_V^2) dt + \tau^2 \int_0^T (\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2) dt \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Доказательство следует из (10), (16), (17), (20), (21) и того, что вложение $H \subset V'$ непрерывно. $\square$

Следствие 3. Пусть выполнены условия следствия 2. Пусть дополнительно решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u'' \in L_p(0, T; V)$, $u''' \in L_p(0, T; V')$ для $1 \leq p \leq 2$. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ & \leq M \left\{ h^2 \int_0^T (\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_V^2) dt + \tau^4 \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right. \\ & \quad \left. + \tau^{5-2/p} \left[\left(\int_0^T \|u''(t)\|_V^p dt \right)^{2/p} + \left(\int_0^T \|u'''(t)\|_{V'}^p dt \right)^{2/p} \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Доказательство (23) проводится, как и доказательство (22), но вместо оценок (16) и (17) следует использовать оценки (18) и (19). $\square$

Для задачи (2) можно получить оценки погрешностей и в точках $t_{k-1/2} = (t_{k-1} + t_k)/2$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & u(t_{k-1/2}) - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \\ & = \left(u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right) + \left(\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right). \quad (24) \end{aligned}$$

Оценки второго слагаемого в правой части (24) установлены выше. Поэтому достаточно проверить, что первое слагаемое в правой части (24) дает в соответствующих условиях тот же порядок по τ . Приведем здесь один из возможных результатов.

Следствие 4. Пусть выполнены условия следствия 2. Пусть, кроме того, решение $u(t)$ задачи (2) таково, что $u'' \in L_2(0, T; V)$, $u''' \in L_2(0, T; V')$. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ & \leq M \left\{ h^2 \int_0^T (\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_V^2) dt \right. \\ & \quad \left. + \tau^4 \int_0^T (\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_V^2 + \|u'''(t)\|_{V'}^2) dt \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением

$$u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} = \frac{1}{2} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}} (t_{k-1} - t) u''(t) dt + \int_{t_{k-1/2}}^{t_k} (t - t_k) u''(t) dt \right), \quad (26)$$

из которого, как и в [6], получается оценка

$$\sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \tau^4 \int_0^T \|u''(t)\|_V^2 dt. \quad (27)$$

Заметим, что в условиях следствия 3 с $p = 2$ функция u'' принадлежит $C([0, T], H)$ и, подобно (14), выполняется оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u''(t)\|_H^2 \leq C \int_0^T (\|u''(t)\|_V^2 + \|u'''(t)\|_{V'}^2) dt. \quad (28)$$

Тогда из (26) и (28) получим

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_H^2 &\leq \tau^4 \max_{0 \leq t \leq T} \|u''(t)\|_H^2 \\ &\leq \tau^4 C \int_0^T (\|u''(t)\|_V^2 + \|u'''(t)\|_{V'}^2) dt. \end{aligned} \quad (29)$$

В результате оценка (25) следует из (23) при $p = 2$, (27) и (29). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
3. Бондарев А. С., Смагин В. В. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физика, математика. 2014. № 2. С. 81–94.
4. Бондарев А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физика, математика. 2015. № 4. С. 78–88.
5. Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и скорости сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 7. С. 1269–1277.
6. Смагин В. В. Проекционно-разностный метод со схемой Кранка — Николсона по времени приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 116–126.
7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
8. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
9. Смагин В. В. Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 115–123.

Статья поступила 11 июня 2016 г., окончательный вариант — 12 мая 2017 г.

Бондарев Андрей Сергеевич, Смагин Виктор Васильевич
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394018
obliskuratsiya@bk.ru, smagin@math.vsu.ru