Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 512.542

ВЛИЯНИЕ $\mathscr{M}$–ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУПП НА СТРУКТУРУ p–МОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП

Б. Гао, Л. Мяо, Ц. Тан

Аннотация. Подгруппа K группы G называется *$\mathscr{M}_p$-добавляемой в G*, если в G существует подгруппа B такая, что $G = KB$ и $TB < G$ для любой максимальной подгруппы T группы K, удовлетворяющей условию $|K : T| = p^\alpha$. С использованием $\mathscr{M}_p$-добавляемых подгрупп изучается строение главных факторов группы G и с помощью соответствующих результатов о p-модулярной подгруппе $O^p(G)$ группы G обобщается результат Монахова и Шныпаркова.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.406

Ключевые слова: $\mathscr{M}_p$-добавляемая подгруппа, силовская подгруппа, главный фактор, p-сверхразрешимость.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Большинство обозначений общеприняты и взяты из [1–3]. В частности, запись «$M <\cdot\, G$» означает, что M — максимальная подгруппа группы G, и через $U = O^p(G)$ обозначается p-модулярная подгруппа группы G.

За последние десять лет был достигнут значительный прогресс в изучении подгрупп. В 2009 г. В. С. Монахов и А. В. Шныпарков ввели понятие $\mathscr{M}_p$-добавляемой подгруппы и получили следующие результаты.

Теорема 1 [4, теорема 1]. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и H — p-сверхразрешимая подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Теорема 2 [4, теорема 2]. *Пусть G — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 = p < \dots < p_n$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

В 2013 г. Тан и Мяо [5] обобщили эти теоремы, рассматривая в p-нильпотентной подгруппе H, содержащей силовскую p-подгруппу группы G, подгруппу D такую, что $1 < D_p \leq P$. В 2016 г. Тан и Мяо [6] описали строение композиционных факторов группы G в случае, когда простой делитель числа $|G|$ — это 5, используя $\mathscr{M}_5$-добавляемые подгруппы фиксированного порядка.

The authors were supported by NSFC (Grant #11271016) and Qing Lan project of the Jiangsu Province and the High-level personnel of the support program of Yangzhou University and Key research project of Yili Normal University (2016YSZD06) and Key Natural Science Foundation of Anhui Education Commission (KJ2017A569). Long Miao is the corresponding author.

Недавно Го и Айзекс [7] исследовали строение p-модулярной подгруппы U группы G в терминах некоторых обобщений нормальности. Также Баллестер-Болинчес и др. [8] изучали p-сверхразрешимость группы G, рассматривая S-полуперестановочные подгруппы фиксированного порядка. Их результаты ясно указывают на то, что p-модулярная подгруппа U группы G тесно связана с ее p-сверхразрешимостью.

Отталкиваясь от этих работ, мы описываем строение p-модулярной подгруппы U группы G с использованием $\mathscr{M}_p$-добавляемых подгрупп фиксированного порядка и обобщаем предыдущие результаты из [5, 6]. В качестве приложения мы также обобщаем результаты В. С. Монахова и А. В. Шныпаркова.

2. Предварительны сведения

Для удобства читателя начнем с формулировки некоторых известных утверждений, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 2.1 [4, леммы 2, 3]. *Пусть H — подгруппа группы G и p — простой делитель числа $|G|$. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то выполнены следующие утверждения.*

(1) *Если $H \leq M \leq G$, то H $\mathscr{M}_p$-добавляема в M.*

(2) *Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то H/N $\mathscr{M}_p$-добавляема в G/N.*

(3) *Если K — нормальная p'-подгруппа, то HK/K $\mathscr{M}_p$-добавляема в G/K.*

Лемма 2.2 [4, лемма 4]. *Пусть H — $\mathscr{M}_p$-добавляемая подгруппа группы G и B — $\mathscr{M}_p$-добавление к H. Если H_1 — максимальная подгруппа группы H и $p \mid |H : H_1|$, то $|G : H_1B| = |H : H_1|$.*

Лемма 2.3 [9, теорема 4.5]. *Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Если $|G : H| = n$, то $G/H_G \hookrightarrow S_n$.*

Лемма 2.4 [10, лемма 2.8]. *Пусть G — p-сверхразрешимая группа. Если $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима.*

Лемма 2.5 [5, теорема 3.1]. *Пусть G — p-разрешимая группа и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Предположим, что в H есть подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^{\alpha}$. Если любая подгруппа T группы H со свойством $|T| = |D| = d$ является $\mathscr{M}_p$-добавляемой в G, то G p-сверхразрешима.*

Лемма 2.6 [9, теорема 4.6]. *Если H — подгруппа группы G и $|G : H| = p$, где p — наименьший простой делитель числа $|G|$, то $H \trianglelefteq G$.*

Лемма 2.7 [11, лемма 4]. *Если P — силовская p-подгруппа группы G, $N \trianglelefteq G$ и $P \cap N \leq \Phi(P)$, то N — p-нильпотентная подгруппа.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима или $U = G$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

По условию в G есть подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для любой максимальной подгруппы H_i группы H, удовлетворяющей условию $|H : H_i| = p$. По лемме 2.2 выполнено равенство $|G : H_iB| = |H : H_i| = p$, и, значит,

$G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе группы S_p по лемме 2.3. Ясно, что $O_{p'}(G) = 1$. Положим $\delta = \{H_i \mid H_i <\cdot H\}$.

(1) $(H_iB)_G \neq 1$ для любой группы $H_i \in \delta$.

Если существует $H_i \in \delta$ такая, что $(H_iB)_G = 1$, то G изоморфна подгруппе группы S_p и $|P| = p$. В случае $U = G$ сразу получаем противоречие. В случае $U < G$, рассматривая фактор группу G/U, заключаем, что G p-сверхразрешима; противоречие.

(2) $(H_iB)_G = H_iB$ для любой группы $H_i \in \delta$.

Пусть существует $H_i \in \delta$ такая, что $1 < (H_iB)_G < H_iB$. Тогда $H(H_iB)_G < G$. Полагая $G_i = H(H_iB)_G$, в силу леммы 2.1(1) и минимальности группы G получаем, что G_i p-сверхразрешима или $O^p(G_i) = G_i$. Если $O^p(G_i) = G_i$, то $U = G$; противоречие. Значит, G_i p-сверхразрешима, и $(H_iB)_G$ также p-сверхразрешима. Более того, $(H_iB)_G$ сверхразрешима по лемме 2.4, следовательно, $P_i = ((H_iB)_G)_p \trianglelefteq G$.

Если $P_i \cap U \neq 1$, то выберем минимальную нормальную подгруппу L группы G такую, что $L \leq P_i \cap U$. Тогда G/L удовлетворяет условию теоремы по лемме 2.1(2). В силу выбора группы G получаем, что G/L p-сверхразрешимой или $O^p(G/L) = G/L$. Если G/L p-сверхразрешима, то G тоже p-сверхразрешима по лемме 2.5; противоречие. Если $O^p(G/L) = G/L$, то $U = G$; противоречие. Таким образом, $P_i \cap U = 1$ и $G = P_i \times U$. Кроме того, если N — минимальная подгруппа группы $Z(P_i)$, то $|N| = p$ и $N \trianglelefteq G$, поэтому G/N удовлетворяет условию теоремы по лемме 2.1(2). Из минимальности группы G следует, что $O^p(G/N) = G/N$. Значит, $G = UN$ и $|P| = p^2$, откуда $G = H_iBU$. Поскольку $p = \frac{|G|}{|H_iB|} = \frac{|U|}{|U\cap H_iB|}$, группа $U \cap H_iB$ — холлова p'-подгруппа в G и $B_p \leq (H_i)_p = P_i$. Если $B_p \neq 1$, то $B_p = P_i$. Выберем максимальную подгруппу P_j группы P такую, что $B_p = P_i \neq P_j$. Если $H_j = P_jH_{p'}$, где $H_{p'}$ — холлова p'-подгруппа в H, то $G = H_jB < G$, что невозможно. Значит, $B_p = 1$, и B — холлова p'-подгруппа группы G.

Также найдется $H_k \in \delta$ такая, что $U \cap H_kB = B \trianglelefteq H_kB$ и $k \neq i$. Так как H_i, H_k, $O^p(B)$ нормализуют B, получаем, что $B \trianglelefteq G$; противоречие.

(3) Заключительное противоречие.

В силу (2) выполнено равенство $\bigcap(H_iB)_G = \bigcap(H_iB) \trianglelefteq G$. Положим $T = \bigcap(H_iB)$. Поскольку $P \cap T = \Phi(P)$, группа T p-нильпотентна по лемме 2.7. Значит, B тоже p-нильпотентна. Если $T_{p'} = 1$, то B — p-группа и тогда G p-сверхразрешима; противоречие. Следовательно $T_{p'} \neq 1$; противоречие.

Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Предположим, что в H есть подгруппа D такая, что $|H : D| = p^{n-1}$, где $|P| = p^n$. Если любая подгруппа T группы H, удовлетворяющая условию $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима или $|P \cap U| \geq p$.*

Доказательство. Если $U_p \neq 1$, то $|U_p| \geq p$ и тогда $|P \cap U| \geq p$. Если $U_p = 1$, то U — холлова p'-подгруппа группы G. Значит, G p-сверхразрешима.

Теорема 3.3. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Предположим, что в H есть подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^{\alpha}$. Если любая подгруппа T группы H, удовлетворяющая условию $|T| = |D| = d$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима или $|P \cap U| \geq d$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

Ясно, что $O_{p'}(G) = 1$ и $|U_p| < d$. Кроме того, $d < |P|$ по теореме 3.1. Значит, существует подгруппа T группы H такая, что $|T| = d$ и $U_p < T$. Тогда $HU < G$ и, значит, HU p-сверхразрешима или $HU = U$ по теореме 3.1. Если HU p-сверхразрешима, то U тоже p-сверхразрешима. Тогда G также p-сверхразрешима; противоречие. Если $HU = U$, то $H \leq U$; противоречие. Теорема доказана.

Полученные результаты позволяют предложить новые доказательства теорем 1 и 2, а также некоторых их следствий.

Доказательство теоремы 1. По условию в G существует подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для любой максимальной подгруппы H_i группы H со свойством $|H : H_i| = p$. По лемме 2.2 выполнено равенство $|G : H_iB| = |H : H_i| = p$, и, значит, $H_iB \trianglelefteq G$ по лемме 2.6. Следовательно, $U < G$ и G p-сверхразрешима по теореме 3.1.

Доказательство теоремы 2. Предположим противное, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

По условию в G есть подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для любой максимальной подгруппы H_i группы H со свойством $|H : H_i| = p$. По лемме 2.2 имеем $|G : H_iB| = |H : H_i| = p$. Значит, $G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе группы S_p по лемме 2.3, и $|G/(H_iB)_G| = (p_1)^\alpha p$. Ясно, что $O_{p'}(G) = 1$. Положим $\delta = \{H_i \mid H_i \lessdot H\}$.

(1) $(H_iB)_G \neq 1$ для любой группы $H_i \in \delta$.

Если найдется $H_i \in \delta$ такая, что $(H_iB)_G = 1$, то G изоморфна подгруппе группы S_p и $|G| = (p_1)^\alpha p$. Тогда G p-сверхразрешима; противоречие.

(2) $1 < (H_iB)_G < H_iB$ для любой группы $H_i \in \delta$.

Если $(H_jB)_G = H_jB$ для некоторой $H_j \in \delta$, то $U \leq H_jB < G$. Тогда G p-сверхразрешима по теореме 3.1; противоречие.

(3) Заключительное противоречие.

В силу (2) $H(H_iB)_G < G$. Положим $G_i = H(H_iB)_G$. Из леммы 2.1(1) вытекает p-сверхразрешимость группы G_i, и, значит, $(H_iB)_G$ сверхразрешима по лемме 2.4. Следовательно, $P_i = ((H_iB)_G)_p \trianglelefteq G$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G, содержащаяся в H. Тогда $P \trianglelefteq G$ в силу произвольного выбора группы P_i. Если P_i — единственная максимальная подгруппа в P, то P — циклическая p-группа. Значит, существует минимальная нормальная подгруппа L группы G такая, что $L \leq P$. Группа G/L p-сверхразрешима по лемме 2.1(2), следовательно, G тоже p-сверхразрешима; противоречие. Таким образом, $P \trianglelefteq G$ и $|P| > p$. Рассматривая фактор-группу G/P_i, получаем, что G/P_i p-сверхразрешима по лемме 2.1(2). Значит, $G/\Phi(P)$ тоже p-сверхразрешима. Поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп — насыщенная формация и $\Phi(P) \leq \Phi(G)$, группа G тоже p-сверхразрешима. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 3.4 [6, лемма 2.8]. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Тогда G p-нильпотентна в том и только в том случае, когда H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G и $N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Остается доказать достаточность. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

Ясно, что $O_{p'}(G) = 1$. По теореме 3.1 группа G p-сверхразрешима или $U = G$. Если G p-сверхразрешима, то G сверхразрешима по лемме 2.4 и $P \trianglelefteq G$. Поскольку $N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа, $N_G(P)$ p-нильпотентна и, значит, $G = N_G(P)$ p-нильпотентна; противоречие. Следовательно, $U = G$.

По условию в G есть подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для любой максимальной подгруппы H_i группы H со свойством $|H : H_i| = p$. Из леммы 2.2 следует, что $|G : H_iB| = |H : H_i| = p$, и, значит, $G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе группы S_p по лемме 2.3. Положим $\delta = \{H_i \mid H_i \lessdot H\}$.

Если $(H_iB)_G = 1$ для некоторой группы $H_i \in \delta$, то G изоморфна подгруппе группы S_p и $|P| = p$. Значит, $N_G(P)/C_G(P) = 1$, и G p-нильпотентна по теореме Бернсайда; противоречие.

Если $(H_jB)_G = H_jB$ для некоторой группы $H_j \in \delta$, то $U \leq H_jB < G$, что опять дает противоречие.

Таким образом, $1 < (H_iB)_G < H_iB$ для любой группы $H_i \in \delta$ и $H(H_iB)_G < G$. Следовательно, $H(H_iB)_G$ удовлетворяет условию теоремы по лемме 2.1(1). В силу минимальности группы G получаем, что $H(H_iB)_G$ p-нильпотентна. Тогда $(H_iB)_G$ тоже p-нильпотентна. Значит, $P_i = ((H_iB)_G)_p \trianglelefteq G$ для любой максимальной подгруппы P_i группы P. Если P_i — единственная максимальная подгруппа в P, то P — циклическая p-группа, и по теореме Бернсайда G будет p-нильпотентной; противоречие. Следовательно, $P \trianglelefteq G$ и $|P| > p$. Рассуждая, как выше, заключаем, что G p-нильпотентна. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 3.5 [5, теорема 3.3]. *Пусть G — конечная группа и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G, где p — наименьшее простое число, делящее $|G|$. Предположим, что в H есть подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если любая подгруппа T группы H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 3.6 [5, теорема 3.5]. *Пусть G — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \dots, p_n\}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Предположим, что в H есть подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если любая подгруппа T группы H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

4. Приложения

В конце статьи [4] авторы делают следующее замечание: *в простой группе $G = A_5$ силовская 5-подгруппа $\mathscr{M}_5$-добавляема в G. Таким образом, ограничения на простое число p в теоремах 1 и 2 существенны.*

Ясно, что нельзя получить утверждение о p-сверхразрешимости группы G в духе теорем 1 и 2 для произвольного простого числа из $\pi(G)$. Следовательно, вопрос, который необходимо изучить, состоит в том, как устроены конечные группы, удовлетворяющие похожим условиям.

Теорема 4.1. *Пусть p — простое число, делящее $|G|$, и пусть H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то каждый G-главный фактор A/B удовлетворяет одному из следующих условий:*

$$(1)\ A/B \leq \Phi(G/B); \quad (2)\ A/B \text{ — } p'\text{-группа}; \quad (3)\ |A/B|_p = p.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

Поскольку H является $\mathscr{M}_p$-добавляемой в G, найдется подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H_iK < G$ для любой максимальной подгруппы H_i группы H, удовлетворяющей условию $|H : H_i| = p$. Тогда $|G : H_iK| = |H : H_i| = p$ по лемме 2.2 и, значит, $G/(H_iK)_G$ изоморфна подгруппе группы S_p по лемме 2.3. Положим $\delta = \{H_i \mid H_i \lessdot H\}$.

Если $(H_iK)_G = 1$ для некоторой группы $H_i \in \delta$, то G изоморфна подгруппе группы $S_p \times \dots \times S_p$, но это не так. Следовательно, $(H_iK)_G \neq 1$ для любой группы $H_i \in \delta$, и $G/\bigcap(H_iK)_G$ изоморфна подгрупе в $S_p \times S_p \times \dots \times S_p$. Пусть $T = \bigcap(H_iK)_G$. Отметим, что $T \neq 1$, поскольку в противном случае G изоморфна подгруппе в S_p. По лемме 2.7 группа T p-нильпотентна. Если $T_{p'} \neq 1$, то $G/T_{p'}$ удовлетворяет условию теоремы по лемме 2.1(2). Из минимальности группы G вытекает, что $G/T_{p'}$ удовлетворяет одному из указанных условий, но тогда одному из этих условий удовлетворяет и G; противоречие. Следовательно, T — p-группа, и $T \leq \Phi(G)$. Ясно, что G/T удовлетворяет одному из условий по лемме 2.1(2), значит, этим свойством обладает и G. Это противоречие завершает доказательство.

Из теоремы 5 в [6] и теоремы 4.1 получается следующее описание главных факторов группы G для простого числа 5, делящего $|G|$.

Следствие 4.2. *Пусть H — 5-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую 5-подгруппу группы G. Если H $\mathscr{M}_5$-добавляема в G, то каждый G-главный фактор A/B удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $A/B \leq \Phi(G/B)$; (2) A/B — $5'$-*группа*; (3) $|A/B| = 5$; (4) $A/B \cong A_5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press, Kluwer Acad. Publ., 2000.
2. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
3. *Isaacs I. M.* Finite group theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. (Grad. Stud. Math.; V. 92).
4. *Монахов В. С., Шнырарков А. В.* О p-сверхразрешимости конечной группы с $\mathscr{M}$-добавляемой силовской p-подгруппой // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 858–864.
5. *Tang J., Miao L.* On $\mathscr{M}_p$-supplemented subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2013. V. 41, N 5. P. 1913–1922.
6. *Тао Б., Танг Ц., Мяо Л.* О $\mathscr{M}_p$-добавляемых подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 25–32.
7. *Guo Y., Isaacs I. M.* Conditions on p-subgroups implying p-nilpotence or p-supersolvability // Arch. Math. 2015. V. 105, N 3. P. 215–222.
8. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Qiao S. H.* A note on a result of Guo and Isaacs about p-supersolubility of finite groups // Arch. Math. 2016. V. 106, N 6. P. 501–506.
9. *Xu M.* An introduction to finite groups. Beijing: Sci. Press, 1999.
10. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble group // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.
11. *Tate J.* Nilpotent quotient groups // Topology. 1964. V. 3. Suppl. 1. P. 109–111.

Статья поступила 16 июля 2016 г.

Baijun Gao (Гао Байцзюнь)
School of Mathematics and Statistics
Yili Normal University,
Yining 835000, People's Republic of China

Long Miao (Мяо Лун)
School of Mathematical Sciences, Yangzhou University
Yangzhou 225002, People's Republic of China
lmiao@yzu.edu.cn

Juping Tang (Тан Цзюйпин)
Wuxi Institute of Technology
Wuxi 214121, People's Republic of China