

УДК 517.946

О ТОЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

А. А. Косов, Э. И. Семенов

Аннотация. Изучается нелинейная система реакции-диффузии, моделируемая системой уравнений параболического типа со степенными нелинейностями. Предложена конструкция точных решений, позволяющая декомпозировать процесс отыскания компонент, зависящих от времени и пространственных координат. Построены многопараметрические семейства точных решений, задаваемых элементарными функциями. Выделены случаи взрывающихся (blow-up solution) или периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным точных решений.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.408

Ключевые слова: система реакции-диффузии, уравнения параболического типа, точные решения, взрывающиеся решения, периодические решения.

1. Введение

Рассматривается система, состоящая из N квазилинейных параболических уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \nabla \cdot (u_k^{\lambda_k} \nabla u_k) + u_k^{1-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) u_j^{\lambda_j}, \quad (1)$$

где $u_k \triangleq u_k(\mathbf{x}, t)$ — искомые функции, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор независимых переменных, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $t \in [0, +\infty)$ — время, $k = 1, 2, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, ∇ — градиент, $\alpha_{kj}(t)$ — заданные функции, $\lambda_k \neq 0$ — вещественные параметры нелинейности среды.

Уравнения такого типа описывают нестационарные диффузионно-кинетические процессы в многокомпонентных распределенных системах, т. е. эволюцию широкого класса нелинейных систем с диффузией и взаимодействием компонент [1–5]. Математические модели, в основе которых лежат уравнения вида (1), применяются в биологии, экологии и экономике. Особенно широко системы уравнений (1) используют в химической кинетике при описании процессов типа «реакция-диффузия» [1, 6–8]. Поэтому искомые функции $u_k(\mathbf{x}, t)$ будем трактовать как концентрации взаимодействующих друг с другом компонентов некоторой смеси веществ, а $\alpha_{kj}(t)$ — как функции, характеризующие скорость протекающих реакций. При этом не исключается ситуация, когда для

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–08–06680) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8081.2016.9).

некоторых k и j функции $\alpha_{kj}(t)$ тождественно равны нулю. Отдельное внимание уделим случаю, когда все коэффициенты $\alpha_{kj}(t)$ являются тождественными постоянными.

Для построения точных решений системы (1) будем использовать конструкцию

$$u_k(\mathbf{x}, t) = \psi_k(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_k(t)]^{1/\lambda_k}. \quad (2)$$

Здесь

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad (3)$$

где ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ подлежат определению.

Отметим, что конструкции типа (2), (3) ранее успешно использовались в ряде работ [9–15] для построения точных решений уравнений нелинейной теплопроводности и других параболических уравнений. В [16–18] применялись несколько более общие конструкции. Однако для построения точных решений систем уравнений вида (1) конструкция (2), (3) ранее не была задействована.

Основная цель статьи состоит в построении точных решений вида (2), (3) для системы (1), а именно в получении по возможности полного описания коэффициентов квадратичного полинома по пространственным переменным, а также функций времени $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$ и способов их получения по показателям и коэффициентам исходной системы (1). Получены параметрические семейства точных решений, среди которых выделены как изотропные, так и анизотропные по пространственным переменным, а также «взрывающиеся» в обе или в одну сторону либо периодические по времени, либо колебательные с нарастающей амплитудой и частотой решения, задаваемые элементарными функциями.

2. Редукция к системе ОДУ

После подстановки функций (2) в систему (1) и несложных преобразований приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \psi'_k[W(\mathbf{x}) + \varphi_k] + \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \varphi'_k &= \frac{1}{\lambda_k} \psi_k^{1+\lambda_k} [W(\mathbf{x}) + \varphi_k] \Delta W(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{\lambda_k^2} \psi_k^{1+\lambda_k} |\nabla W(\mathbf{x})|^2 + \psi_k^{1-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \psi_j^{\lambda_j} [W(\mathbf{x}) + \varphi_j]. \end{aligned}$$

Здесь $\psi_k = \psi_k(t)$, $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $\psi'_k = \frac{d\psi_k}{dt}$, $\varphi'_k = \frac{d\varphi_k}{dt}$, $k = 1, 2, \dots, N$. Из (3) прямым вычислением находим

$$|\nabla W(\mathbf{x})|^2 = (A^2 \mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2, \quad \Delta W(\mathbf{x}) = \text{tr } A - \text{след матрицы } A.$$

С учетом этих соотношений и формулы (3) последние N равенств запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\left(\psi'_k - \frac{\text{tr } A}{\lambda_k} \psi_k^{1+\lambda_k} - \psi_k^{1-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \psi_j^{\lambda_j} \right) \left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C \right) \\ &+ \psi'_k \varphi_k + \frac{1}{\lambda_k} \psi_k \varphi'_k = \frac{\text{tr } A}{\lambda_k} \psi_k^{1+\lambda_k} \varphi_k + \frac{1}{\lambda_k^2} \psi_k^{1+\lambda_k} ((A^2 \mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2) \\ &+ \psi_k^{1-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \psi_j^{\lambda_j} \varphi_j. \quad (4) \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если симметричная матрица A , вектор $\mathbf{B}$ и постоянная C удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений (САУ):

$$A = 2\sigma A^2, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = 2\sigma A\mathbf{B}, \quad (6)$$

$$C = \sigma|\mathbf{B}|^2, \quad (7)$$

где $\sigma \neq 0$ — константа разделения, то равенства (4) сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\psi'_k = \left(\frac{\text{tr } A}{\lambda_k} + \frac{1}{\sigma \lambda_k^2} \right) \psi_k^{1+\lambda_k} + \psi_k^{1-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \psi_j^{\lambda_j}, \quad (8)$$

$$\varphi'_k = \left(\text{tr } A \psi_k^{\lambda_k} - \lambda_k \frac{\psi'_k}{\psi_k} \right) \varphi_k + \lambda_k \psi_k^{-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \psi_j^{\lambda_j} \varphi_j. \quad (9)$$

Таким образом, проведенными рассуждениями установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Нелинейная система реакции-диффузии (1) имеет точные решения (2), где функция $W(\mathbf{x})$ может быть выбрана произвольным полиномом вида (3) с коэффициентами, удовлетворяющими САУ (5)–(7), а функции $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$ являются решениями систем ОДУ (8), (9).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Данная теорема позволяет декомпозировать процесс построения компонент решения, зависящих от пространственных переменных и от времени. Такая декомпозиция существенно упрощает задачу, заменяя изучение исходной нелинейной системы уравнений в частных производных параболического типа исследованием систем алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия типа (5)–(7) на коэффициенты квадратичной функции (3) от пространственных переменных получены для одного уравнения параболического типа в [12]. При этом коэффициенты считались функциями времени и названные условия записывались в более общем виде как системы ОДУ. Однако константа разделения в [12] считалась фиксированной и задавалась через единственный показатель степени из исходного уравнения. В теореме 1 рассматриваем не одно уравнение параболического типа, а систему уравнений такого типа с нелинейными взаимосвязями в виде степенных функций и используем постоянные коэффициенты функции (3), но константа разделения теперь считается свободным параметром.

Алгебро-дифференциальная система (5)–(9) состоит из блока алгебраических (5)–(7) и блока $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений (8), (9). Исследование каждого блока проведем последовательно.

Прежде всего рассмотрим разрешимость матричного уравнения (5). Отметим, что оно всегда имеет тривиальное решение $A = 0$. Поэтому далее будем рассматривать только нетривиальные решения этого уравнения. Легко проверить, что решением уравнения (5) является $A = \frac{1}{2\sigma} P$, где P — произвольная идемпотентная матрица, т. е. матрица, удовлетворяющая равенству $P^2 = P$. Известно [19], что любую идемпотентную матрицу P можно записать в виде $P = ME_m M^{-1}$, где M — произвольная невырожденная матрица порядка n ,

E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей; E_m также является идемпотентной: $E_m^2 = E_m$. Поскольку нас интересуют только симметрические матрицы A , идемпотентные матрицы P надо взять также симметрическими, т. е. $P = S^T E_m S$, где S — произвольная ортогональная матрица. Таким образом, матрица

$$A = \frac{1}{2\sigma} S^T E_m S \quad (10)$$

является решением матричного уравнения (5). При этом имеем

$$\text{tr } A = \frac{m}{2\sigma}, \quad m \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (11)$$

Векторное уравнение (6) представляет собой систему n линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент $b_1, \dots, b_n$ искомого вектора $\mathbf{B}$. Для любой зафиксированной матрицы (10) с $\text{rank } A = m < n$ всегда существует нетривиальное решение линейной однородной системы, причем компоненты $b_1, \dots, b_n$ вектора $\mathbf{B}$ могут быть выбраны произвольно из m -мерного линейного многообразия. В случае, когда $\text{rank } A = m \equiv n$, т. е. при $E_m \equiv E$, линейная однородная система уравнений имеет решение — произвольный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$. После того как последовательно найдены решения матричного и векторного уравнений, постоянная C определяется из (7) единственным образом.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 3$ и квадратные 3×3 -матрицы E_m имеют ранги 3, 2 и 1 соответственно. Произвольная ортогональная матрица S размера 3×3 представима формулой

$$S = \begin{bmatrix} \cos(s_1) \cos(s_3) - \sin(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) & -\sin(s_1) \cos(s_2) & a_{13} \\ \cos(s_1) \sin(s_2) \sin(s_3) + \sin(s_1) \cos(s_3) & \cos(s_1) \cos(s_2) & a_{23} \\ \cos(s_2) \sin(s_3) & -\sin(s_2) & \cos(s_2) \cos(s_3) \end{bmatrix}.$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{13} &= -\cos(s_1) \sin(s_3) - \sin(s_1) \sin(s_2) \cos(s_3), \\ a_{23} &= \cos(s_1) \sin(s_2) \cos(s_3) - \sin(s_1) \sin(s_3). \end{aligned}$$

Для построения конкретных примеров придадим параметрам s_1, s_2, s_3 определенные числовые значения. Пусть, например, $s_1 = -\frac{\pi}{4}$, $s_2 = \arcsin(\frac{1}{3})$, $s_3 = \frac{3\pi}{4}$, тогда ортогональная матрица S примет вид

$$S = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}.$$

Матрица E_m ранга 3 совпадает с единичной, и в этом случае получим форму вида $\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\sigma}[x^2 + y^2 + z^2]$. Для матрицы A данной квадратичной формы решением уравнения (6) будет произвольный вектор $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$. В этом случае формула (3) примет вид

$$W_0(x, y, z) = \frac{1}{4\sigma}[x^2 + y^2 + z^2] + b_1x + b_2y + b_3z + \sigma(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \quad (12)$$

и получим радиально-симметричные относительно пространственных переменных x, y, z решения.

Возьмем матрицы E_m ранга 2:

$$E_{1m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для этих матриц из (10) находим

$$A_1 = \frac{1}{18\sigma} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{18\sigma} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{18\sigma} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Из (6) получим соответствующие векторы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$:

$$\mathbf{B}_1 = (k_1, 2k_1 + 2k_3, k_3), \quad \mathbf{B}_2 = (k_1, k_2, 2k_1 + 2k_2), \quad \mathbf{B}_3 = (2k_2 + 2k_3, k_2, k_3),$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. С учетом этих векторов постоянные C_1, C_2, C_3 задаются формулами

$$C_1 = \sigma(5k_1^2 + 8k_1k_3 + 5k_3^2), \quad C_2 = \sigma(5k_1^2 + 8k_1k_2 + 5k_2^2), \quad C_3 = \sigma(5k_2^2 + 8k_2k_3 + 5k_3^2).$$

В результате

$$W_1(x, y, z) = \frac{1}{180\sigma} [(5x + 2y - 4z)^2 + 9(2y + z)^2] + k_1x + (2k_1 + 2k_3)y + k_3z + \sigma(5k_1^2 + 8k_1k_3 + 5k_3^2), \quad (13)$$

$$W_2(x, y, z) = \frac{1}{180\sigma} [(5x - 4y + 2z)^2 + 9(y + 2z)^2] + k_1x + k_2y + (2k_1 + 2k_2)z + \sigma(5k_1^2 + 8k_1k_2 + 5k_2^2), \quad (14)$$

$$W_3(x, y, z) = \frac{1}{72\sigma} [(4x + y + z)^2 + 9(y - z)^2] + (2k_2 + 2k_3)x + k_2y + k_3z + \sigma(5k_2^2 + 8k_2k_3 + 5k_3^2). \quad (15)$$

Таким образом, в этом случае имеем анизотропные по пространственным переменным x, y, z решения.

Наконец, рассмотрим матрицы E_m ранга 1:

$$E_{1m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{3m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для этих матриц из (10) находим

$$A_1 = \frac{1}{18\sigma} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{18\sigma} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \frac{1}{18\sigma} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Из (6) получим соответствующие векторы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$:

$$\mathbf{B}_1 = (k, -2k, -2k), \quad \mathbf{B}_2 = \left(k, k, -\frac{1}{2}k\right), \quad \mathbf{B}_3 = \left(k, -\frac{1}{2}k, k\right),$$

где k — произвольная постоянная. С учетом этих векторов постоянные C_1, C_2, C_3 задаются формулами $C_1 = 9\sigma k^2$, $C_2 = \frac{9}{4}\sigma k^2$, $C_3 = \frac{9}{4}\sigma k^2$. Окончательно находим

$$\begin{aligned} W_1(x, y, z) &= \frac{1}{36\sigma} \omega_1^2 + k\omega_1 + 9\sigma k^2, \quad \text{где } \omega_1 = x - 2y - 2z, \\ W_2(x, y, z) &= \frac{1}{36\sigma} \omega_2^2 + \frac{k}{2} \omega_2 + \frac{9}{4} \sigma k^2, \quad \text{где } \omega_2 = 2x + 2y - z, \\ W_3(x, y, z) &= \frac{1}{36\sigma} \omega_3^2 + \frac{k}{2} \omega_3 + \frac{9}{4} \sigma k^2, \quad \text{где } \omega_3 = 2x - y + 2z. \end{aligned} \quad (16)$$

В этом случае фактически получим одномерные относительно переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ решения.

Для $n = 2$ квадратные 2×2 -матрицы E_m единичного ранга также дают «одномерные» решения. Единичная матрица E_m ранга 2 для любой ортогональной 2×2 -матрицы S приводит к $W(x, y) = \frac{1}{4\sigma}(x^2 + y^2) + b_1x + b_2y + \sigma(b_1^2 + b_2^2)$, где b_1, b_2 — произвольные постоянные. В этом случае имеем радиально-симметричные относительно пространственных переменных x и y решения.

3. Разрешимость системы ОДУ (8), (9)

Приступим к исследованию системы ОДУ (8), (9), состоящей из N нелинейных уравнений на функции $\psi_k(t)$ и N линейных уравнений на функции $\varphi_k(t)$.

Введем обозначения: $Z_k(t) = \psi_k^{\lambda_k}(t)$, $S_k = \left(\frac{\text{tr} A}{\lambda_k} + \frac{1}{\sigma \lambda_k^2}\right)$, $k = \overline{1, N}$, с учетом которых система ОДУ (8), (9) запишется в виде

$$Z'_k = \lambda_k S_k Z_k^2 + \lambda_k \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) Z_j, \quad (17)$$

$$\varphi'_k = \left(\text{tr} A Z_k - \frac{Z'_k}{Z_k} \right) \varphi_k + \frac{\lambda_k}{Z_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) Z_j \varphi_j. \quad (18)$$

Соотношение (17) есть векторное уравнение Бернулли относительно новых искомых функций $Z_k(t)$. Напомним, что нас интересуют явные аналитические решения, которые могут быть представлены в виде комбинаций (суперпозиций) конечного набора элементарных и специальных функций. Нетривиальные стационарные решения системы ОДУ (17) также представляют интерес для нашего исследования, поэтому первоначальное внимание сосредоточим на их построении.

3.1. Постоянные скорости реакций и стационарные решения системы ОДУ (17). Пусть коэффициенты α_{kj} , характеризующие скорости реакций, для всех k, j ($j, k = \overline{1, N}$, $k \neq j$) являются тождественными постоянными. Тогда нетривиальные стационарные решения системы ОДУ (17) будем отыскивать из системы следующих N нелинейных алгебраических уравнений:

$$S_k Z_k^2 + \sum_{j \neq k} \alpha_{kj} Z_j = 0. \quad (19)$$

Здесь Z_k — искомые константы. С учетом (11) перепишем S_k в виде

$$S_k = \frac{1}{\sigma \lambda_k} \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{\lambda_k} \right). \quad (20)$$

Система (19) линейно-квадратична, и в общем случае при произвольных коэффициентах условия ее разрешимости получить затруднительно, поэтому рассмотрим ряд представляющих интерес частных случаев.

1. Пусть для некоторого натурального числа m , $1 \leq m \leq n$, при всех $k = \overline{1, N}$ выполнены равенства $\lambda_k = -\frac{2}{m}$. Тогда $S_k = 0$ и система (19) становится линейной и записывается в виде

$$QZ = 0, \quad (21)$$

где $Z = \text{col}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ — искомый вектор, а матрица $Q = [q_{kj}]_{k,j=\overline{1,N}}$ задается следующим образом: $q_{kj} = \alpha_{kj}$, $k \neq j$, и $q_{kj} = 0$, $k = j$. Для нетривиальной разрешимости системы (21) необходимо и достаточно выполнения условия $\det Q = 0$. Заметим, что это условие проверяется по исходной системе (1). При выполнении этого условия, используя любое решение системы (21), получаем для нахождения функций $\varphi_k(t)$ линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами.

2. Пусть для всех $k = 1, 2, \dots, N$ выполнены равенства $S_k = -\sum_{j \neq k} \alpha_{kj}$. Тогда система (19) имеет решение $Z = \text{col}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = \text{col}(1, 1, \dots, 1)$. Если для всех $k = \overline{1, N}$ выполнены равенства $S_k = \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}$, то система (19) имеет решение $Z = \text{col}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = \text{col}(-1, -1, \dots, -1)$.

3. Пусть для некоторого натурального числа m , $1 \leq m \leq n$, и для некоторого $\sigma \neq 0$ при всех $k = \overline{1, N}$ выполнены неравенства $S_k \neq 0$. Пусть матрица Q имеет вещественное собственное число $\mu(Q) \neq 0$, которому соответствует собственный вектор

$$Z = \text{col}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = \text{col}\left(-\frac{\mu(Q)}{S_1}, -\frac{\mu(Q)}{S_2}, \dots, -\frac{\mu(Q)}{S_N}\right).$$

Тогда этот вектор является стационарным решением системы (19).

4. Пусть $S_k \neq 0$ для всех $k = \overline{1, N}$. Тогда если матрица линейной части системы (19) имеет вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N-1,N} \\ \alpha_{N1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0, \dots, \alpha_{N-1,N} \neq 0$, $\alpha_{N1} \neq 0$, то она сводится к одному уравнению следующего вида: $\Omega Z_1^{2^N} + Z_1 = 0$, где

$$\Omega = \frac{S_N}{\alpha_{N1}} \left(\frac{S_{N-1}}{\alpha_{N-1,N}} \right)^2 \left(\frac{S_{N-2}}{\alpha_{N-2,N-1}} \right)^4 \left(\frac{S_{N-3}}{\alpha_{N-3,N-2}} \right)^8 \dots \left(\frac{S_2}{\alpha_{23}} \right)^{2^{N-2}} \left(\frac{S_1}{\alpha_{12}} \right)^{2^{N-1}},$$

которое имеет нетривиальное вещественное решение $Z_1 = (-\frac{1}{\Omega})^{1/(2^N-1)}$. При этом $Z_2, \dots, Z_N$ определяются формулами

$$Z_2 = -\frac{S_1}{\alpha_{12}} Z_1^2, \quad Z_3 = -\frac{S_2}{\alpha_{23}} \left(\frac{S_1}{\alpha_{12}} \right)^2 Z_1^4, \quad Z_4 = -\frac{S_3}{\alpha_{34}} \left(\frac{S_2}{\alpha_{23}} \right)^2 \left(\frac{S_1}{\alpha_{12}} \right)^4 Z_1^8$$

и т. д.

5. Пусть $N = 2$. В этом случае система (19) примет вид

$$S_1 Z_1^2 + \alpha_{12} Z_2 = 0, \quad S_2 Z_2^2 + \alpha_{21} Z_1 = 0. \quad (23)$$

Решая эту систему, находим

$$Z_1 = -\left(\frac{\alpha_{21}}{S_2}\right)^{1/3} \left(\frac{\alpha_{12}}{S_1}\right)^{2/3}, \quad Z_2 = -\left(\frac{\alpha_{12}}{S_1}\right)^{1/3} \left(\frac{\alpha_{21}}{S_2}\right)^{2/3}.$$

6. Пусть $N = 3$. Система (19) принимает вид

$$\begin{aligned} S_1 Z_1^2 + \alpha_{12} Z_2 + \alpha_{13} Z_3 &= 0, \quad S_2 Z_2^2 + \alpha_{21} Z_1 + \alpha_{23} Z_3 = 0, \\ S_3 Z_3^2 + \alpha_{31} Z_1 + \alpha_{32} Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь для системы (24) рассмотрим два частных случая: первый, когда один из коэффициентов α_{kj} равен нулю (для определенности пусть $\alpha_{13} = 0$), и второй, когда один из коэффициентов при квадратичных членах равен нулю (пусть для определенности $S_3 = 0$). Вначале рассмотрим первый случай. Если кроме $\alpha_{13} = 0$ будет еще и $\alpha_{12} = 0$, то из первого уравнения (24) следует, что $Z_1 = 0$, а для нахождения Z_2, Z_3 будем иметь систему двух уравнений, аналогичную изученной в п. 5. Поэтому далее будем считать, что α_{12} не равно нулю. Тогда из первого уравнения (24) находим

$$Z_2 = -\frac{S_1 Z_1^2}{\alpha_{12}}. \quad (25)$$

Подставляя Z_2 во второе уравнение, получим равенство

$$\frac{S_2 S_1^2}{\alpha_{12}^2} Z_1^4 + \alpha_{21} Z_1 + \alpha_{23} Z_3 = 0. \quad (26)$$

Если $\alpha_{23} = 0$, то (26) приводит к кубическому уравнению для нахождения ненулевого решения Z_1 . Подставляя это решение в (25), найдем Z_2 и далее из третьего уравнения получим соответствующие значения Z_3 . Поэтому далее считаем α_{23} не равным нулю. Из (26) выразим Z_3 и подставим в третье уравнение системы (24), что приведет к уравнению 7-й степени для нахождения ненулевого решения Z_1 . По крайней мере один вещественный корень у этого уравнения имеется, и если α_{31} не равно нулю, то этот корень будет ненулевым.

Таким образом, при $\alpha_{13} = 0$ и ненулевых $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ у системы (24) имеется нетривиальное вещественное решение.

Рассмотрим второй случай, когда в системе (24) $S_3 = 0$. Если дополнительно один из коэффициентов α_{31}, α_{32} равен нулю, то система редуцируется, поэтому оба эти коэффициента считаем ненулевыми. Тогда из третьего уравнения системы (24) следует, что

$$Z_2 = -\frac{\alpha_{31} Z_1}{\alpha_{32}}. \quad (27)$$

Если один из коэффициентов α_{13}, α_{23} равен нулю, то, используя соответствующее уравнение системы (24) совместно с (27), найдем решение Z_1, Z_2 и далее надо только найти Z_3 из линейного уравнения либо в случае, когда Z_3 не присутствует в системе, выполнить проверку. Поэтому коэффициенты α_{13}, α_{23} считаем ненулевыми. Тогда из первого уравнения (24) выразим Z_3 :

$$Z_3 = \frac{\alpha_{12} \alpha_{31}}{\alpha_{13} \alpha_{32}} Z_1 - \frac{S_1}{\alpha_{13}} Z_1^2. \quad (28)$$

Подставляя (28) и (27) в систему (24), найдем ее решение

$$Z_1 = \frac{\alpha_{32}(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32})}{S_2\alpha_{13}\alpha_{31}^2 - S_1\alpha_{23}\alpha_{32}^2}, \quad Z_2 = \frac{\alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32})}{S_2\alpha_{13}\alpha_{31}^2 - S_1\alpha_{23}\alpha_{32}^2},$$

$$Z_3 = -\frac{(\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32})(S_2\alpha_{21}\alpha_{32}^3 + S_1\alpha_{12}\alpha_{31}^3)}{(S_2\alpha_{13}\alpha_{31}^2 - S_1\alpha_{23}\alpha_{32}^2)^2}.$$

Таким образом, при $N = 3$ нетривиальные решения системы (24) существуют и выписываются в явном виде в широком классе случаев, выделяемых необременительными условиями. Одно из этих условий состоит в обнулении одного из коэффициентов α_{kj} при линейных членах и соответствует отсутствию взаимодействия между некоторой парой компонент смеси. Второе состоит в обнулении одного из коэффициентов S_k при квадратичных членах, и иногда его можно удовлетворить за счет выбора числа m , являющегося параметром в конструируемом решении.

В заключение данного раздела отметим два момента. Во-первых, перечень случаев нетривиальной разрешимости системы (19) является неполным и может быть расширен. Во-вторых, нетривиальная разрешимость (19) относительно Z_k еще не означает разрешимости относительно ψ_k . Если $Z_k > 0$ для всех $k = \overline{1, N}$, то при любых ненулевых вещественных λ_k находим $\psi_k = Z_k^{1/\lambda_k}$. Если среди Z_j , $j = \overline{1, N}$, имеется отрицательное число $Z_\nu < 0$, то вещественное решение $\psi_\nu = Z_\nu^{1/\lambda_\nu}$ существует только в случае, когда $\lambda_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$ есть рациональное число с нечетным числителем p_ν .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему типа (1) из трех уравнений в случае трех пространственных координат:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (u_1^3 \nabla u_1) + u_1^{-2}(u_2^3 + u_3^3), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (u_2^3 \nabla u_2) + u_2^{-2}(u_1^3 + u_3^3),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \nabla \cdot (u_3^3 \nabla u_1) + u_3^{-2}(u_1^3 + u_2^3). \quad (29)$$

Для этой системы матрица $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ имеет собственное число $\mu = 2$, ко-

торому отвечает собственный вектор $q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Для построения изотропных

по пространственным переменным решений положим $m = 3$ и возьмем $\sigma = \frac{11}{36}$. Тогда получаем $S_1 = S_2 = S_3 = 2$ и вектор q будет решением соответствующей линейно-квадратичной системы типа (19). Интегрируя соответствующую линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами типа (9), получаем следующее параметрическое семейство точных решений системы (29), изотропных по пространственным переменным:

$$u_i(x, y, z, t) = -[W_0(x, y, z) + \varphi_i(t)]^{1/3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $W_0(x, y, z)$ задается формулой (12), а функции $\varphi_i(t)$ следующими равенствами:

$$\varphi_1(t) = C_2 \exp\left(-\frac{87}{11}t\right) + C_3 \exp\left(\frac{12}{11}t\right),$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= (C_1 + C_2) \exp\left(-\frac{87}{11}t\right) + C_3 \exp\left(\frac{12}{11}t\right), \\ \varphi_3(t) &= -(C_1 + 2C_2) \exp\left(-\frac{87}{11}t\right) + C_3 \exp\left(\frac{12}{11}t\right).\end{aligned}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные параметры.

Для построения анизотропных по пространственным переменным решений положим $m = 2$ и возьмем $\sigma = \frac{2}{9}$. Тогда вновь получаем $S_1 = S_2 = S_3 = 2$ и вектор q будет решением соответствующей линейно-квадратичной системы типа (19). Интегрируя соответствующую линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами типа (9), получаем следующее параметрическое семейство точных решений системы (29), анизотропных по пространственным переменным:

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z, t) &= -\left[W(x, y, z) + C_2 \exp\left(\frac{3}{2}t\right) + C_3 \exp\left(-\frac{15}{2}t\right)\right]^{1/3}, \\ u_2(x, y, z, t) &= -\left[W(x, y, z) + (C_1 + C_3) \exp\left(-\frac{15}{2}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{3}{2}t\right)\right]^{1/3}, \\ u_3(x, y, z, t) &= -\left[W(x, y, z) - (C_1 + 2C_3) \exp\left(-\frac{15}{2}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{3}{2}t\right)\right]^{1/3},\end{aligned}$$

где $W(x, y, z)$ — любая из функций, определяемых формулами (13)–(15), C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные параметры.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему типа (1) из трех уравнений в случае трех пространственных координат следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \nabla \cdot (u_1^{\lambda_1} \nabla u_1) + \alpha_{12} u_1^{1-\lambda_1} u_2^{\lambda_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (u_2^{\lambda_2} \nabla u_2) + \alpha_{23} u_2^{1-\lambda_2} u_3^{\lambda_3}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \nabla \cdot (u_3^{\lambda_3} \nabla u_3) + \alpha_{31} u_3^{1-\lambda_3} u_1^{\lambda_1}.\end{aligned}\quad (30)$$

Система (30) имеет точные много параметрические решения

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z, t) &= [W(x, y, z) + \varphi_1(t)]^{\frac{1}{\lambda_1}}, \quad u_2(x, y, z, t) = [W(x, y, z) + \varphi_2(t)]^{\frac{1}{\lambda_2}}, \\ u_3(x, y, z, t) &= [W(x, y, z) + \varphi_3(t)]^{\frac{1}{\lambda_3}},\end{aligned}$$

где $W(x, y, z)$ — любая из функций, определяемых формулами (12)–(16), а $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют следующей линейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned}\varphi_1'(t) &= \frac{m}{2\sigma} Z_1 \varphi_1(t) + \lambda_1 \alpha_{12} \frac{Z_2}{Z_1} \varphi_2(t), \\ \varphi_2'(t) &= \frac{m}{2\sigma} Z_2 \varphi_2(t) + \lambda_2 \alpha_{23} \frac{Z_3}{Z_2} \varphi_3(t), \\ \varphi_3'(t) &= \frac{m}{2\sigma} Z_3 \varphi_3(t) + \lambda_3 \alpha_{31} \frac{Z_1}{Z_3} \varphi_1(t).\end{aligned}\quad (31)$$

Здесь постоянные Z_i определяются формулами

$$Z_1 = -\left[\frac{S_3}{\alpha_{31}} \left(\frac{S_2}{\alpha_{23}}\right)^2 \left(\frac{S_1}{\alpha_{12}}\right)^4\right]^{-1/7}, \quad Z_2 = -\frac{S_1}{\alpha_{12}} Z_1^2, \quad Z_3 = -\frac{S_2}{\alpha_{23}} \left(\frac{S_1}{\alpha_{12}}\right)^2 Z_1^4,$$

а S_i ($i = 1, 2, 3$) — соотношениями (20). Пусть $m = 2$, $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и параметры α_{12} , α_{23} , α_{31} , λ_1 , λ_2 , λ_3 удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_{12} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{(1 + \lambda_1)}{\lambda_1^2}, \quad \alpha_{23} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{(1 + \lambda_2)}{\lambda_2^2}, \quad \alpha_{31} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{(1 + \lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2}{(1 + \lambda_1)^2(1 + \lambda_2)^2},$$

$$\lambda_1 \neq -1, \quad \lambda_2 \neq -1, \quad \lambda_1 \neq -1 - \lambda_2, \quad \lambda_3 = -\frac{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

Тогда общее решение линейной системы ОДУ (31) имеет вид

$$\varphi_1(t) = C_1 + e^{\sqrt{3}t}(C_2 \sin(t) + C_3 \cos(t)),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\lambda_1(2C_1 + e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}C_3 - C_2)\sin(t) - e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}C_2 + C_3)\cos(t))}{2(1 + \lambda_1)},$$

$$\varphi_3(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2(2C_1 - e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}C_3 + C_2)\sin(t) + e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}C_2 - C_3)\cos(t))}{2(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)}.$$

Здесь C_1 , C_2 , C_3 — произвольные постоянные. Значению $m = 2$ соответствуют функции $W(x, y, z)$, определяемые формулами (13)–(15), что приводит к анизотропным по пространственным переменным точным решениям.

3.2. О существовании периодических решений системы (9). В этом разделе рассмотрим важный вопрос о существовании периодических решений системы ОДУ (9) и соответственно периодических решений исходной нелинейной системы реакции-диффузии (1) в предположении, что функции $\psi_k(t) = \psi_{k0} \equiv \text{const}$ постоянны.

Пусть $N = 2$. Тогда характеристическое уравнение для системы (9) запишется в виде

$$l^2 - \frac{m}{2\sigma}(Z_1 + Z_2)l + \frac{m^2}{4\sigma^2}Z_1Z_2 - \alpha_{12}\alpha_{21}\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Напомним, что здесь $Z_i = \psi_{i0}^{\lambda_i}$, $i = 1, 2$. Чтобы у этого уравнения корни были чисто мнимыми, надо потребовать выполнения равенства $Z_1 + Z_2 = 0$. В этом случае алгебраическая система (23) разделяется и сводится к уравнениям $S_1Z_1^2 - \alpha_{12}Z_1 = 0$, $S_2Z_2^2 - \alpha_{21}Z_2 = 0$. Отсюда при $S_1 \neq 0$ и $S_2 \neq 0$ находим

$$Z_1 = \psi_{10}^{\lambda_1} = \frac{\alpha_{12}}{S_1}, \quad Z_2 = \psi_{20}^{\lambda_2} = \frac{\alpha_{21}}{S_2}, \quad \frac{\alpha_{12}}{S_1} = -\frac{\alpha_{21}}{S_2}.$$

С учетом этих формул характеристическое уравнение перепишется в виде $l^2 + K = 0$, где

$$K = \alpha_{12}\alpha_{21}\lambda_1\lambda_2 \left[\frac{m^2}{(m + \frac{2}{\lambda_1})(m + \frac{2}{\lambda_2})} - 1 \right].$$

При положительных λ_1 и λ_2 знак числа K противоположен знаку произведения $\alpha_{12}\alpha_{21}$. Поэтому при $\alpha_{12}\alpha_{21} < 0$ будет $K > 0$ и характеристическое уравнение будет иметь чисто мнимые корни $l = \pm i\sqrt{K}$. Резюмируя приведенные выше рассуждения, получаем, что справедливо

Утверждение 1. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\alpha_{12}\alpha_{21} < 0$ и для некоторого $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеет место равенство

$$\left(m + \frac{2}{\lambda_2}\right) \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} + \left(m + \frac{2}{\lambda_1}\right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0, \quad (32)$$

то система (1) имеет семейство периодических по времени решений (2) с постоянными $\psi_1(t) \equiv \psi_{10}$, $\psi_2(t) \equiv \psi_{20}$.

Рассмотрим вопрос о существовании периодических решений в случае $N = 3$, предполагая, что решения $\psi_k(t) = \psi_{k0}$ постоянны и система имеет вид, соответствующий указанному в п. 4. Тогда характеристическое уравнение для системы (9) записывается следующим образом:

$$l^3 + a_1 l^2 + a_2 l + a_3 = 0, \quad (33)$$

где

$$a_1 = -\frac{m}{2\sigma}(Z_1 + Z_2 + Z_3), \quad a_2 = \left(\frac{m}{2\sigma}\right)^2 (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3),$$

$$a_3 = -\left(\frac{m}{2\sigma}\right)^3 Z_1 Z_2 Z_3 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31}.$$

Здесь решение $Z_k = \psi_k^{\lambda_k}$ системы типа (19) вычисляется по формулам

$$Z_1 = -|\Omega|^{-1/7}, \quad Z_2 = -\frac{S_1}{\alpha_{12}} Z_1^2, \quad Z_3 = -\left(\frac{S_2}{a_{23}}\right) \left(\frac{S_1}{\alpha_{12}}\right)^2 Z_1^4, \quad (34)$$

$$\Omega = \frac{(\lambda_3 m + 2)(\lambda_2 m + 2)^2(\lambda_1 m + 2)^4}{128 \sigma^7 \lambda_1^8 \lambda_2^4 \lambda_3^2 \alpha_{12}^4 \alpha_{23}^2 \alpha_{31}}.$$

Для того чтобы уравнение (33) имело пару чисто мнимых корней, необходимо и достаточно выполнения условий $a_2 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 = 0$. Поэтому справедливо

Утверждение 2. Пусть $N = 3$, матрица линейной части системы (19) имеет вид (22), числа λ_1 , λ_2 , λ_3 рациональны с нечетными числителями и для коэффициентов системы и вычисляемого по формулам (34) решения Z_k системы типа (19) выполняются условия

$$Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 > 0, \quad m^3 (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_1) - 8\sigma^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} = 0.$$

Тогда система (1) имеет периодические по времени решения.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим систему трех уравнений в 3-мерном координатном пространстве

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (u_1^3 \nabla u_1) - u_1^{-2} u_2^3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (u_2^3 \nabla u_2) - u_2^{-2} u_3^3,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \nabla \cdot (u_3^3 \nabla u_3) + p^7 u_3^{-2} u_1^3, \quad (35)$$

где p — произвольный вещественный параметр. Покажем, что существует такое значение параметра $p = p_*$, что у системы (35) существуют периодические по времени и анизотропные по пространственным переменным решения.

Положим $m = 2$ и выберем соответствующие A , $\mathbf{B}$, C для решения в виде (3), получим функцию $W(x, y, z)$. В частности, можно взять любую из функций

(13)–(15). Выберем $\sigma = \frac{4}{9}$, тогда $S_k = 1$, $k = 1, 2, 3$. Вычисляя стационарные решения системы типа (8), найдем

$$\Omega = p^{-7}, \quad Z_1 = -p, \quad Z_2 = p^2, \quad Z_3 = -p^4.$$

Характеристическое уравнение соответствующей системы типа (9) будет следующим:

$$l^3 + \frac{9}{4}(p^4 - p^2 + p)l^2 - \frac{81}{16}(p^6 - p^5 + p^3)l + \frac{999}{64}p^7 = 0.$$

Применяя утверждение 2, приходим к уравнению

$$27p^6 - 27p^5 - 27p^4 + 118p^3 - 27p^2 - 27p + 27 = 0.$$

Наибольший отрицательный корень $p_* = -0.6574451 \dots$ этого уравнения удовлетворяет всем условиям утверждения 2, поэтому соответствующая линейная система типа (9) имеет периодические решения. Тем самым существование периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным решений у системы (35) при $p = p_*$ доказано.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим систему типа (1) из четырех уравнений в случае четырех пространственных координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \nabla \cdot (u_1^3 \nabla u_1) + u_1^{-2} u_3^3, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \nabla \cdot (u_2^3 \nabla u_2) + u_2^{-2} \left(-\frac{485}{886} u_1^3 + \frac{1371}{886} u_3^3 \right), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \nabla \cdot (u_3^3 \nabla u_3) + u_3^{-2} u_4^3, \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} &= \nabla \cdot (u_4^3 \nabla u_4) + u_4^{-2} \left(-\frac{443}{144} u_2^3 + \frac{587}{144} u_3^3 \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Для построения анизотропных по пространственным переменным решений положим $m = 2$ и возьмем $\sigma = -\frac{4}{9}$. Тогда получаем $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = -1$ и вектор $Z = \text{col}(1, 1, 1, 1)$ будет решением соответствующей линейно-квадратичной системы типа (19). Интегрируя соответствующую линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами типа (9), получаем следующее параметрическое семейство точных решений системы (36), периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным:

$$u_k(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = [W(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_k(t)]^{1/3}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{9}{32} \left(\sum_{j=1}^4 x_j^2 + \sqrt{2} x_1 x_2 + \sqrt{2} x_1 x_3 - \sqrt{2} x_2 x_4 + \sqrt{2} x_3 x_4 \right) \\ &\quad + (\sqrt{2} k_1 + k_2) x_1 + k_1 x_2 + (\sqrt{2} k_2 + k_1) x_3 + k_2 x_4 \\ &\quad - \frac{4}{9} ((\sqrt{2} k_1 + k_2)^2 + k_1^2 + (\sqrt{2} k_2 + k_1)^2 + k_2^2), \quad (38) \\ \varphi_1(t) &= \left(\frac{108}{97} C_2 - \frac{48}{97} C_1 \right) \cos t + \left(\frac{48}{97} C_2 + \frac{108}{97} C_1 \right) \sin t, \\ \varphi_2(t) &= \left(\frac{522}{443} C_2 - \frac{72}{443} C_1 \right) \cos t + \left(\frac{72}{443} C_2 + \frac{522}{443} C_1 \right) \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= C_2 \cos t + C_1 \sin t, \\ \varphi_4(t) &= \left(\frac{3}{4} C_2 + \frac{1}{3} C_1\right) \cos t + \left(\frac{3}{4} C_2 - \frac{1}{3} C_1\right) \sin t.\end{aligned}$$

Здесь k_1, k_2, C_1, C_2 — произвольные вещественные параметры.

Если система (36) рассматривается в трехмерном координатном пространстве, то параметрическое семейство точных анизотропных по пространственным переменным и периодических по времени решений задается формулой (37), в которой вместо (38) надо использовать следующее выражение:

$$\begin{aligned}W(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{9}{32} \left(\frac{3}{2} x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2} x_3^2 + \sqrt{2} x_1 x_2 + x_1 x_3 - \sqrt{2} x_2 x_3 \right) \\ &+ (\sqrt{2} k_1 + k_2) x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3 - \frac{4}{9} ((\sqrt{2} k_1 + k_2)^2 + k_1^2 + k_2^2). \quad (39)\end{aligned}$$

Отметим также, что за счет выбора других матриц квадратичных форм в (38) и (39) указанные выше параметрические семейства точных решений можно расширить.

Необходимо отметить, что после открытия периодической химической реакции Белоусова [20] вопрос о существовании и построении периодических решений соответствующих математических моделей начал интенсивно изучаться [21]. Как указано в обзоре [1], вопросы существования и построения периодических решений для моделей систем реакция-диффузия с распределенными параметрами актуальны и представляют интерес как с точки зрения приложений в химической технологии, так и с теоретической точки зрения для качественной теории дифференциальных уравнений. Изучение этих вопросов на основе различных методов и подходов успешно продолжается в настоящее время (см., например, [22] и цитированную там литературу). Поэтому построенные здесь периодические решения системы реакция-диффузия вида (1) могут оказаться полезными в приложениях к моделям химических реакций.

3.3. Нестационарные решения системы ОДУ (17). Система ОДУ (17) нелинейна, и в общем случае при произвольных коэффициентах $\alpha_{kj}(t)$ условия ее разрешимости получить затруднительно, поэтому рассмотрим ряд представляющих интерес частных случаев. Для простоты изложения далее будем считать, что все $\lambda_j, j = \overline{1, N}$, являются рациональными числами с нечетными числителями.

Будем искать решение системы (17) в виде $z_k(t) = \mu_k f(t)$, где $\mu_k \in \mathbb{R}$, а $f(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Подставляя $z_k(t) = \mu_k f(t)$ в (17), придем к равенству

$$\mu_k f' = \lambda_k S_k \mu_k^2 f^2 + \lambda_k f \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \mu_j = 0. \quad (40)$$

Предположим, что для некоторой функции $b(t)$ выполняются условия

$$\sum_{j \neq k} \alpha_{kj}(t) \mu_j = \frac{\mu_k}{\lambda_k} b(t), \quad k = \overline{1, N}. \quad (41)$$

Тогда (40) переписывается так:

$$f' = \lambda_k S_k \mu_k f^2 + b(t) f, \quad k = \overline{1, N}. \quad (42)$$

Полагая $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k S_k}$, придем к уравнению Бернулли $f' = f^2 + b(t)f$, интегрируя которое, найдем его общее решение

$$f(t) = \frac{\exp \int_0^t b(\tau) d\tau}{C - \int_0^t \exp \int_0^\xi b(\tau) d\tau d\xi}, \quad (43)$$

где C — произвольная постоянная. Проведенными рассуждениями доказано

Утверждение 3. Если для некоторого $\sigma \neq 0$ вычисляемые по формуле (20) S_k , $k = \overline{1, N}$, таковы, что для $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k S_k}$ выполняются условия (41), то система (1) имеет решение (2), (3), в котором $\psi_k(t) = (\mu_k f(t))^{1/\lambda_k}$, где $f(t)$ задается формулой (43), а функции $\varphi_k(t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$\varphi'_k = \left(\frac{m\lambda_k}{m\lambda_k + 2} f - \frac{f'}{f} \right) \varphi_k + \lambda_k^2 S_k \sum_{j \neq k} \frac{\alpha_{kj}(t)}{\lambda_j S_j} \varphi_j, \quad k = \overline{1, N}. \quad (44)$$

Предположим, что $\alpha_{kj}(t) = \frac{\hat{\alpha}_{kj}}{t}$ для всех $k, j = \overline{1, N}$, $k \neq j$, где $\hat{\alpha}_{kj} \in \mathbb{R}$. Будем искать решение системы (17) в виде $Z_k(t) = g_k t^{-1}$. Тогда для постоянных $g_k \in \mathbb{R}$ после подстановки в (17) получим линейно-квадратичную систему уравнений следующего вида:

$$S_k g_k^2 + \frac{1}{\lambda_k} g_k + \sum_{j \neq k} \hat{\alpha}_{kj} g_j = 0, \quad (45)$$

где S_k определяется формулой (20). Система (45) отличается от (19) только одним дополнительным линейным слагаемым, и к ней можно применить изложенные в разд. 3.1 подходы к построению нетривиальных решений. Тем самым обосновано

Утверждение 4. Если система уравнений (45) имеет нетривиальное решение g_k , $k = \overline{1, N}$, то система (1) имеет решение (2), (3), в котором $\psi_k(t) = g_k^{1/\lambda_k} t^{-1/\lambda_k}$, а функции $\varphi_k(t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$\varphi'_k = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{mg_k}{2\sigma} \right) \varphi_k + \frac{1}{t} \frac{\lambda_k}{g_k} \sum_{j \neq k} \hat{\alpha}_{kj} g_j \varphi_j, \quad k = \overline{1, N}.$$

ПРИМЕР 6. Рассмотрим в n -мерном координатном пространстве систему двух уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (u_1^3 \nabla u_1) + \frac{1}{t} u_1^{-2} u_2^3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (u_2^3 \nabla u_2) + \frac{1}{t} u_2^{-2} u_1^3.$$

Применяя утверждение 4, получим параметрическое семейство точных решений (2), (3), в котором функции $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2$) задаются формулами

$$\psi_k(t) = - \left(\frac{24\sigma}{3m+2} \right)^{1/3} t^{-1/3},$$

$$\varphi_1(t) = C_1 t^{a-3} + C_2 t^{a+3}, \quad \varphi_2(t) = -C_1 t^{a-3} + C_2 t^{a+3}, \quad a = \frac{2-9m}{3m+2}.$$

Используя утверждение 3, получим параметрическое семейство точных решений (2), (3), в котором симметричная матрица A , вектор $\mathbf{B}$ и постоянная C удовлетворяют системе алгебраических уравнений (5)–(7), а функции $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2$) задаются формулами

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \left(\frac{6\sigma}{3m+2} \right)^{1/3} \frac{t}{(C - \frac{1}{4}t^4)^{1/3}},$$

$$\varphi_1(t) = (C_1 + C_2 t^{-6})(4C - t^4)^{\frac{2}{3m+2}}, \quad \varphi_2(t) = (C_1 - C_2 t^{-6})(4C - t^4)^{\frac{2}{3m+2}}.$$

Здесь $1 \leq m \leq n$, $\sigma \neq 0$, C_1, C_2 — произвольные вещественные параметры. Это семейство содержит «взрывающиеся» решения при $C > 0$, определенные только на конечном интервале времени [23].

ПРИМЕР 7. Рассмотрим в n -мерном координатном пространстве систему трех уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot (u_1^3 \nabla u_1) + t u_1^{-2} (u_2^3 - u_3^3), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla \cdot (u_2^3 \nabla u_2) + t u_2^{-2} (u_3^3 - u_1^3),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \nabla \cdot (u_3^3 \nabla u_3) + t u_3^{-2} (u_1^3 - u_2^3).$$

Применяя утверждение 3, получим параметрическое семейство точных решений (2), (3) в котором симметричная матрица A , вектор $\mathbf{B}$ и постоянная C удовлетворяют системе алгебраических уравнений (5)–(7), а функции $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$, ($k = 1, 2, 3$) задаются формулами

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_3(t) = \left(\frac{6\sigma}{(3m+2)(C-t)} \right)^{1/3},$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(C-t)^{\frac{2}{3m+2}} \left[(C_1 + C_3) \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \right) + C_2 \sin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \right) + C_1 - C_3 \right],$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{4}(C-t)^{\frac{2}{3m+2}} \left[Q_1 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \right) + Q_2 \sin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \right) + 2C_1 - 2C_3 \right],$$

$$\varphi_3(t) = -\frac{1}{4}(C-t)^{\frac{2}{3m+2}} \left[Q_3 \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \right) + Q_4 \sin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 \right) - 2C_1 + 2C_3 \right],$$

где $Q_1 = (\sqrt{3}C_2 - C_1 - C_3)$, $Q_2 = -\sqrt{3}(C_1 + C_3) - C_2$, $Q_3 = (\sqrt{3}C_2 + C_1 + C_3)$, $Q_4 = -\sqrt{3}(C_1 + C_3) + C_2$. Здесь $1 \leq m \leq n$, $\sigma \neq 0$, C, C_1, C_2, C_3 — произвольные вещественные параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слинько М. Г., Зеленьяк Т. И., Акрамов Т. А., Лаврентьев М. М.-мл., Шеплев В. С. Нелинейная динамика каталитических реакций и процессов (обзор) // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 12. С. 87–100.
2. Meirmanov A. M., Pukhnachov V. V., Shmarev S. I. Evolution equations and Lagrangian coordinates. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1997.
3. Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton; London; New York: Taylor & Francis, 2007.
4. Vazquez J. L. The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. (Oxford Math. Monogr.).

5. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
6. Polyanin A. D., Kutevov A. M., Vyazmin A. V., Kazenin D. A. Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering. London; New York: Taylor & Francis, 2002.
7. Шмидт А. В. Анализ систем реакция-диффузия методом линейных определяющих уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 256–268.
8. Пухначев В. В. Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 2. С. 16–23.
9. Титов С. С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика. Саратов: Саратов. ун-т, 1988. С. 104–110.
10. Галактионов В. А., Посашков С. С. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 4. С. 497–506.
11. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Построение точных решений многомерного уравнения нелинейной теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 8. С. 1228–1239.
12. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1131–1140.
13. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 2. С. 250–256.
14. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002.
15. Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. of the Royal Society of Edinburgh. 1995. V. 125A. P. 225–246.
16. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. I // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1144–1166.
17. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. II // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 176–195.
18. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Существование и качественный анализ точных неавтомодельных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2003. С. 352–396.
19. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
20. Белоусов Б. П. Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. М.: Медгиз, 1959.
21. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
22. Nefedov N. N., Nikulin E. I. Existence and stability of periodic solutions for reaction-diffusion equations in the two-dimensional case // Model. Anal. Inf. Syst. 2016. V. 23, N 3. P. 342–348.
23. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Статья поступила 24 ноября 2016 г.

Косов Александр Аркадьевич, Семёнов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aakosov@yandex.ru, semenov@icc.ru