

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ГРУППЕ $U_3(3)$

Ю. В. Лыткин

Аннотация. *Спектром* конечной группы называется множество всех порядков ее элементов. Конечная группа G называется *критической* относительно подмножества ω натуральных чисел, если ω совпадает со спектром группы G и не совпадает со спектром любой собственной секции группы G . Исследуется строение групп, изоспектральных простой унитарной группе $PSU(3, 3)$. В частности, дается описание конечных групп, критических относительно спектра группы $PSU(3, 3)$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.409

Ключевые слова: конечная группа, спектр, критическая группа, неабелева простая группа.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G , т. е. множество всех порядков элементов G . Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*. Поскольку множество $\omega(G)$ замкнуто по отношению делимости, оно однозначно определяется своим подмножеством, состоящим из элементов, максимальных по делимости. Обозначим его через $\mu(G)$. Под секцией группы G будем понимать фактор-группу H/N , где $N, H \leq G$ и $N \trianglelefteq H$.

Будем говорить, что группа G *распознаваема* (более точно, *распознаваема по спектру* в классе конечных групп), если любая конечная группа, изоспектральная G , изоморфна G . Группа G *почти распознаваема*, если существует лишь конечное число попарно не изоморфных групп, изоспектральных G . В противном случае она называется *нераспознаваемой*.

В [1] доказано, что группа нераспознаваема тогда и только тогда, когда она изоспектральна группе, содержащей нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу. В этой же работе сформулировано определение критической группы. Пусть ω — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Группа G называется *критической относительно ω* (или *ω -критической*), если ω совпадает со спектром группы G и не совпадает со спектром любой собственной секции группы G (т. е. секции, отличной от G).

В результате почти тридцатилетних исследований было установлено, что, как правило, конечные простые группы почти распознаваемы. Более точно, распознаваемы все неабелевы простые знакопеременные группы степени $n \neq 6, 10$ [2] и все простые спорадические группы, кроме J_2 [3]. Все простые группы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 16–31–00147 мол.а.

лиева типа достаточно большого лиева ранга почти распознаваемы [4]. Почти распознаваемы все исключительные группы лиева типа, кроме группы ${}^3D_4(2)$ [5].

Поэтому для решения проблемы распознавания простых групп по спектру актуальна задача описания групп, изоспектральных нераспознаваемым простым группам, которой и посвящена данная работа.

В [6, 7] описаны все группы, критические относительно спектров групп A_6 , A_{10} и J_2 . Кроме того, в [8] доказано, что любая группа, изоспектральная группе ${}^3D_4(2)$, имеет секцию, изоморфную ${}^3D_4(2)$, поэтому сама группа ${}^3D_4(2)$ — единственная с точностью до изоморфизма критическая группа с таким спектром. По модулю уже известных результатов из этого следует, что все группы, критические относительно спектров неабелевых простых знакопеременных, спорадических и исключительных групп, известны. В каждом из перечисленных случаев количество таких попарно не изоморфных критических групп не превышает трех. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только классические простые группы. В [6] дано полное описание критических групп, изоспектральных группе $L_3(3)$. Количество таких групп (с точностью до изоморфизма) равно двум.

В настоящей работе дается описание групп, изоспектральных простой унитарной группе $U_3(3) = PSU(3, 3)$. Интерес к данной группе вызван, в первую очередь, работами [9, 10], из которых следует, что группа $U_3(3)$ является единственной неабелевой простой группой, которая может быть изоспектральна и группе Фробениуса, и удвоенной группе Фробениуса.

Теорема. Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $U_3(3)$. Тогда $\mu(G) = \{7, 8, 12\}$ и G либо группа Фробениуса, либо удвоенная группа Фробениуса, либо расширение 2-группы N с помощью одной из следующих групп: $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$.

Более того, справедливы следующие утверждения.

(1) Если $G = FH$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H , то F — элементарная абелева 7-группа, а H изоморфна либо

$$H_1 = \langle a, b, s \mid a^8 = b^4 = s^3 = 1; a^4 = b^2, a^b = a^{-1}, s^a = s^{-1}, s^b = s \rangle,$$

либо подгруппе $H_0 = \langle a, s \rangle$ группы H_1 индекса 2. Группа H_1 является полупрямым произведением $\langle s \rangle$ и обобщенной группы кватернионов $Q = \langle a, b \rangle$ порядка 16. Центризатор s в Q является группой кватернионов порядка 8, порожденной a^2 и b .

В обоих случаях H -модуль F представляет собой прямую сумму H -модулей, изоморфных модулю V размерности 4 над полем порядка 7, действие элементов a, b и s на котором в подходящем базисе задается матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \cdot & \cdot \\ 4 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 2 \\ \cdot & \cdot & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \end{pmatrix}.$$

Единственная $\omega(U_3(3))$ -критическая группа такого типа изоморфна $V \rtimes H_0$.

(2) Если G — удвоенная группа Фробениуса, то $G = ABC$, где A — нормальная 2-подгруппа, а $H = BC$ является группой Фробениуса порядка 21 или 42.

В первом случае $H \simeq \langle r, s \mid r^7 = s^3 = r^s r^5 = 1 \rangle$ и порядок любого G -главного фактора V из A равен 2^3 . Если рассмотреть V как H -модуль над

полем порядка 2, то существует базис в V , в котором действие H на V задается матрицами

$$[r] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Во втором случае $H \simeq \langle r, s \mid r^7 = s^6 = r^s r^4 = 1 \rangle$ и порядок любого G -главного фактора V из A равен 2^6 . Если рассмотреть V как H -модуль над полем порядка 2, то существует базис в V , в котором действие H на V задается матрицами

$$[r] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

В каждом из двух случаев существует по меньшей мере одна группа, критическая относительно $\omega(U_3(3))$.

(3) Если $G/N \simeq PGL_2(7)$, то N дополняется в G подгруппой H , изоморфной $PGL_2(7)$, и каждый G -главный фактор группы N как H -модуль изоморфен абсолютно неприводимому H -модулю V над полем порядка 2. Рассмотрим матрицы над полем порядка 2:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle a, b, c \rangle \simeq PGL_2(7)$ и соответствующее естественное представление эквивалентно действию H на V . Полупрямое произведение $V \rtimes H$ изоспектрально $U_3(3)$ и с точностью до изоморфизма является единственной группой, критической относительно $\omega(U_3(3))$.

(4) Если $G/N \simeq L_2(7) \simeq GL_3(2)$, то каждый G -главный фактор группы N изоморфен естественному трехмерному $GL_3(2)$ -модулю V или модулю, контргradientному V . Кроме того, экспонента группы $C_N(s)$ равна четырем, где s — элемент порядка 3 из G . Существуют по крайней мере две неизоморфные $\omega(U_3(3))$ -критические группы такого типа. Обе являются расширениями прямого произведения трех циклических групп порядка 4 с помощью $L_2(7)$, однако одно из этих расширений расщепляемое, другое — нерасщепляемое.

(5) Если $G/N \simeq U_3(3)$ или $G/N \simeq \text{Aut}(U_3(3))$, то каждый G -главный фактор группы N изоморфен единственному с точностью до эквивалентности абсолютно неприводимому шестимерному $\text{Aut}(U_3(3))$ -модулю над полем порядка 2 (или его ограничению на $U_3(3)$). Существуют примеры расширений N с помощью $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$, в которых N нетривиальна. Группа $U_3(3)$ является

единственной с точностью до изоморфизма $\omega(U_3(3))$ -критической группой такого типа.

Из данной теоремы следует, что существует не менее семи групп, критических относительно спектра группы $U_3(3)$. В пп. (1), (3) и (5) теоремы описание критических групп полное. В оставшихся двух случаях приведено по два примера неизоморфных критических групп соответствующих типов, однако вопрос о точном количестве критических групп в этих случаях остается открытым.

Вступительная часть теоремы доказывается в предложении 1.1. Пп. (1)–(5) теоремы доказываются в § 2–6 соответственно.

§ 1. Предварительные результаты

Спектр $\omega(G)$ группы G определяет граф Грюнберга — Кегеля (или граф простых чисел) $GK(G)$ группы G . Вершинами этого графа служат элементы из множества $\pi(G)$ простых делителей порядка группы G . Две различные вершины p и q смежны, если $pq \in \omega(G)$. Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$, а через $\pi_i(G)$ — i -ю компоненту связности, $i = 1, \dots, s$. Если порядок группы четен, то будем считать, что $2 \in \pi_1(G)$. Обозначим через $\omega_i(G)$ множество, состоящее из таких $n \in \omega(G)$, что каждый простой делитель числа n принадлежит $\pi_i(G)$.

Лемма 1.1 (Грюнберг, Кегель [11]). *Если G — конечная группа с несвязным графом $GK(G)$, то верно одно из следующих утверждений.*

(1) $s(G) = 2$ и G — группа Фробениуса, т. е. G содержит нетривиальную нормальную нильпотентную холлову подгруппу A и $C_G(a) \leq A$ для любого неединичного $a \in A$.

(2) $s(G) = 2$ и G — удвоенная группа Фробениуса, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы в G , B — нормальная подгруппа в BC и AB, BC — группы Фробениуса.

(3) Существует такая неабелева простая группа P , что

$$P \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(P)$$

для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(G)$ -подгруппы K из G и $\overline{G}/P$ является $\pi_1(G)$ -группой. Более того, граф $GK(P)$ несвязен, $s(P) \geq s(G)$, и для любого числа i , $2 \leq i \leq s(G)$, существует j , $2 \leq j \leq s(P)$, такое, что $\omega_i(G) = \omega_j(P)$.

В частности, G обладает самое большее одним неабелевым композиционным фактором.

Лемма 1.2 [12–14]. *Пусть G — группа Фробениуса с ядром N и дополнением H . Тогда верны следующие утверждения.*

(1) N — нильпотентная группа; в частности, $GK(N)$ — полный граф, и $|\mu(N)| = 1$.

(2) Если U — подгруппа порядка rs из H , где r и s — простые числа (не обязательно различные), то U — циклическая группа; в частности, силовские r -подгруппы группы H для нечетных r циклические.

(3) Если порядок группы H четен, то в H есть единственный элемент z порядка 2; в частности, силовская 2-подгруппа группы H является циклической группой или (обобщенной) группой кватернионов, подгруппа N коммутативна, и $n^z = n^{-1}$ для любого элемента $n \in N$.

(4) Либо группа H разрешима и граф $GK(H)$ полный, либо H содержит нормальную подгруппу $L \simeq SL_2(5)$ такую, что $(|L|, |H : L|) \leq 2$ и $GK(H)$ может быть получен из полного графа на $\pi(H)$ удалением ребра $\{3, 5\}$.

Лемма 1.3 (Машке [15, с. 123]). Если характеристика поля $\mathbb{F}$ равна нулю или не делит порядок конечной группы G , то любое конечномерное представление группы G над полем $\mathbb{F}$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений.

Лемма 1.4. Конечная группа G критическая относительно множества $\omega(G)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.

- (1) Если M — максимальная подгруппа группы G , то $\omega(M) \neq \omega(G)$.
- (2) Если S — минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\omega(G/S) \neq \omega(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G критическая относительно $\omega(G)$, то данные условия выполняются по определению.

Пусть для группы G выполняются условия (1) и (2). Рассмотрим собственную секцию H/N группы G . Если $H < G$, то для некоторой максимальной подгруппы $M < G$ выполняется цепочка включений

$$\omega(H/N) \subseteq \omega(H) \subseteq \omega(M) \neq \omega(G).$$

Если $H = G$, то N содержит некоторую минимальную нормальную подгруппу S группы G . В этом случае $\omega(G/N) \subseteq \omega(G/S) \neq \omega(G)$. Таким образом, группа G критическая. $\square$

Лемма 1.5 (Гашютц [15, с. 121]). Пусть G — конечная группа, A — нормальная абелева p -подгруппа G . Если A дополняется в силовской p -подгруппе группы G , то A дополняется в G .

Предложение 1.1. Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $U_3(3)$. Тогда G является либо группой Фробениуса, либо удвоенной группой Фробениуса, либо расширением 2-группы N с помощью одной из следующих групп: $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку у графа $GK(U_3(3))$ число компонент связности равно двум, для группы G выполняется одно из утверждений леммы 1.1. Если G не является группой Фробениуса или удвоенной группой Фробениуса, то существует такая неабелева простая группа P , что

$$P \leq G/N \leq \text{Aut}(P)$$

для некоторой нильпотентной нормальной $\{2, 3\}$ -группы N . Очевидно, что $\omega(P) \subseteq \omega(G)$ и $7 \in \omega(P)$. Из [16] следует, что P изоморфна $L_2(7)$ или $U_3(3)$. В обоих случаях индекс группы $\text{Aut}(P)$ по P равен двум. Таким образом, $G/N \simeq H$, где H является одной из следующих групп: $L_2(7)$, $\text{Aut}(L_2(7)) \simeq PGL_2(7)$, $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$.

Докажем, что N является 2-группой. Пусть $P_1 \in \text{Syl}_2(N)$ и $P_2 \in \text{Syl}_3(N)$. Предположим, что $P_2 > 1$. Введем обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по P_1 . Тогда $\overline{N}$ — 3-группа и $\overline{G}/\overline{N} \simeq H$.

Группа H содержит подгруппу K , изоморфную $L_2(7)$. Обозначим через S подгруппу порядка 7 группы K . Тогда порядок нормализатора $N_K(S)$ равен $7 \cdot 3$ (см. [17]). Пусть F — полный прообраз группы $N_K(S)$ в группе $\overline{G}$. По лемме 1 из [18] группа F содержит элемент порядка 9, что противоречит изоспектральности групп G и $U_3(3)$. Таким образом, N — 2-группа. $\square$

§ 2. Группы Фробениуса, изоспектральные $U_3(3)$

Пусть $G = F \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H и $\omega(G) = \omega(U_3(3))$. По лемме 1.2 группа F нильпотентна, а множество $\mu(F)$ одноэлементно. Далее, группа H разрешима, граф $GK(H)$ полный.

Покажем, что F — элементарная абелева 7-группа. Действительно, если 7 делит порядок группы H , то H — 7-группа, а F — $\{2, 3\}$ -группа. Тогда F содержит элементы порядков 8 и 12. Но тогда из одноэлементности множества $\mu(F)$ следует, что F содержит элемент порядка 24; противоречие. Значит, 7 делит порядок группы F . Поскольку G не содержит элементов порядка 49, а порядок группы H четен, из леммы 1.2 следует, что F элементарная абелева.

Из леммы 1.2 также вытекает, что в H существует единственная инволюция z , силовские 2-подгруппы в H — циклические или (обобщенные) группы кватернионов, а силовские 3-подгруппы в H циклические порядка 3. Обозначим через $\Omega(H)$ подгруппу группы H , порожденную всеми элементами простых порядков из H . Тогда по теореме 2 из [19] группа $\Omega(H)$ является прямым произведением холловых подгрупп Z и K , где Z циклическая и ее порядок свободен от квадратов, а K либо тривиальна, либо изоморфна $SL_2(5)$ или $SL_2(3)$. Ясно, что $K \not\simeq SL_2(5)$.

Предположим, что $K \simeq SL_2(3)$. Тогда $Z = 1$ и $\Omega(H) = K$, поэтому индекс H по K равен двум и порядок H равен 48. Введем обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по $\langle z \rangle$. Тогда порядок $\overline{H}$ равен 24 и в $\overline{H}$ есть подгруппа индекса 2, изоморфная A_4 . Поскольку $H \neq K \times \langle z \rangle$, получаем $\overline{H} \simeq S_4$. Но $\mu(S_4) = \{3, 4\}$, следовательно, в H нет элементов порядка 12; противоречие. Таким образом, $K = 1$, и $\Omega(H)$ циклическая порядка 6. Поэтому силовские 2-подгруппы группы H либо циклические порядка 8, либо обобщенные группы кватернионов порядка 16.

Пусть $S \in \text{Syl}_3(H)$. Тогда $S < \Omega(H)$ и из цикличности $\Omega(H)$ следует, что $S \leq H$. Таким образом, группа H является полупрямым произведением группы S на силовскую 2-подгруппу группы H .

Рассмотрим случай, когда силовские 2-подгруппы в H изоморфны Q_{16} , и пусть Q — одна из таких подгрупп. Тогда $H = S \rtimes Q$ и $\overline{H} = \overline{S} \rtimes \overline{Q}$, причем $\overline{Q} \simeq D_8$. Пусть $\overline{Q} = \langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a}^4 = \bar{b}^2 = 1, \bar{a}^{\bar{b}} = \bar{a}^{-1} \rangle$. Поскольку группа $\overline{S}$ циклическая порядка 3, задан гомоморфизм $\varphi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Ядро φ имеет порядок 4, но не содержит элементов порядка 4, так как элементы порядка 8 из Q действуют на S без неподвижных точек. Таким образом, $\ker \varphi$ изоморфно четверной группе Клейна K_4 . Группа $\overline{Q}$ содержит две подгруппы, изоморфные K_4 , и они переводятся друг в друга автоморфизмом группы $\overline{Q}$, поэтому можно считать, что $\ker \varphi = \langle \bar{a}^2, \bar{b} \rangle$. С помощью [20] проверяется, что

$$\overline{H} \simeq \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{s} \mid \bar{a}^4 = \bar{b}^2 = \bar{s}^3 = 1, \bar{a}^{\bar{b}} = \bar{a}^{-1}, \bar{s}^{\bar{a}} = \bar{s}^{-1}, \bar{s}^{\bar{b}} = \bar{s} \rangle.$$

Поскольку H содержит единственную инволюцию, получаем

$$H \simeq \langle a, b, s \mid a^8 = b^4 = s^3 = 1, a^4 = b^2, a^b = a^{-1}, s^a = s^{-1}, s^b = s \rangle \simeq H_1.$$

Из строения группы H_1 следует, что $\mu(H_1) = \{8, 12\}$.

Таким образом, с точностью до изоморфизма существует единственная группа H с силовской 2-подгруппой, изоморфной обобщенной группе кватернионов порядка 16, такая, что группа Фробениуса $F \rtimes H$ изоспектральна $U_3(3)$ и $|H| = 48$.

Рассмотрим случай, когда силовские 2-подгруппы в H циклические порядка 8, т. е. $H = S \rtimes \langle c \rangle$, c — элемент порядка 8 из H . Очевидно, должно выполняться $s^c = s^{-1}$, поэтому такая группа единственна с точностью до изоморфизма. Рассмотрим подгруппу $H_0 = \langle a, s \rangle$ индекса 2 группы H_1 из предыдущего случая. Она является полупрямым произведением группы S на группу $\langle a \rangle$ порядка 8. Более того, $\mu(H_0) = \{8, 12\}$.

Итак, если группа H такова, что группа Фробениуса $F \rtimes H$ изоспектральна $U_3(3)$, то H изоморфна либо H_1 , либо H_0 . Осталось в обоих случаях задать действие группы H на группе F . Напомним, что F — элементарная абелева 7-группа, поэтому на F можно смотреть как на H -модуль над полем порядка 7. Поскольку порядки F и H взаимно просты, по лемме 1.3 группа F как H -модуль изоморфна прямой сумме неприводимых модулей. Таким образом, достаточно найти все неприводимые H -модули над полем порядка 7, действие группы H на которых свободно. Отметим, что размерность любого такого модуля четна, поскольку число $7^n - 1$ должно делиться на 4, где n — размерность модуля.

Рассмотрим сначала случай, когда $H \simeq H_1$. В группе H содержится подгруппа $K = \langle a^2, b, s \rangle$ индекса 2, изоморфная прямому произведению группы кватернионов порядка 8 и циклической группы порядка 3. Для группы K существует представление размерности 2 над полем порядка 7, задаваемое матрицами

$$[a^2] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через W K -модуль, на котором группа K действует в соответствии с данными матрицами. Легко проверить, что данное действие свободно, поэтому модуль W неприводим. Рассмотрим H -модуль V размерности 4, индуцированный с модуля W . Непосредственно проверяется, что группа H действует на V в соответствии с матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \cdot & \cdot \\ 4 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 2 \\ \cdot & \cdot & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad [s] = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что модуль V неприводим. Непосредственно проверяется, что действие группы H на V свободно, поэтому размерность любого подмодуля модуля V четна. Покажем, что в V нет подмодулей размерности 2. Действительно, если они есть, то группа H изоморфна некоторой подгруппе группы $GL_2(7)$. Поскольку в $GL_2(7)$ все элементы порядка 4 сопряжены, можно считать, что образом элемента a^2 порядка 4 из H служит матрица $\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{pmatrix}$. Легко проверить, что единственными элементами порядка 3 из $GL_2(7)$, которые централизуют данную матрицу, являются матрицы $\begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & \cdot \\ \cdot & 4 \end{pmatrix}$. Но они лежат в центре группы $GL_2(7)$, а в группе H элементы порядка 8 не перестановочны с элементами порядка 3. Таким образом, H не может быть изоморфна подгруппе группы $GL_2(7)$, следовательно, модуль V неприводим. В таблице характеров группы H_1 (см. [20]) существует лишь один характер такой, что соответствующее действие группы H_1 свободно, и степень этого характера равна четырем. Следовательно, представление с данным характером эквивалентно действию H_1 на модуле V . Итак, группа F как H_1 -модуль является прямой суммой H_1 -модулей, изоморфных V .

Рассмотрим модуль V как H_0 -модуль. По лемме 1.3 если он приводим, то является прямой суммой неприводимых модулей. В этом случае V может быть только суммой двух подмодулей размерности 2. Однако, как уже установлено, в группе $GL_2(7)$ среди элементов порядка 3 элементы порядка 4 централизуют лишь матрицы $\begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & \cdot \\ \cdot & 4 \end{pmatrix}$, а они централизуют и элементы порядка 8. Отсюда получаем, что V как H_0 -модуль также неприводим.

Итак, действие групп H_1 и H_0 на F задано. Остается лишь отметить, что единственной с точностью до изоморфизма $\omega(U_3(3))$ -критической группой такого типа является группа $V \rtimes H_0$.

§ 3. Удвоенные группы Фробениуса, изоспектральные $U_3(3)$

В [21] описана структура таких групп и приведены примеры. Наша цель — доказать, что группы из этих примеров критические относительно $\omega(U_3(3))$.

Рассмотрим первый пример из [21], т. е. $G = AH$, где H — группа Фробениуса порядка 21, а A — группа из следующей леммы.

Лемма 3.1 [21, лемма 4]. Пусть группа A порождена элементами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_i^4 &= y_i^4 = 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \\ [x_i, x_j] &= [y_i, y_j] = 1, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ [x_i, y_i] &= 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \\ [x_i, y_j][x_j, y_i] &= 1, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \\ [[x_i, y_j], x_k] &= [[x_i, y_j], y_k] = 1, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Тогда выполняются следующие утверждения.

- (1) Степень нильпотентности группы A равна двум, и A — 2-группа.
- (2) Подгруппы $X = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ и $Y = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ изоморфны прямому произведению трех циклических групп порядка 4, и $A = \langle X, Y \rangle$.
- (3) Коммутант Z группы A порождается элементами $z_1 = [x_1, y_2]$, $z_2 = [x_1, y_3]$ и $z_3 = [x_2, y_3]$ порядка 4 и изоморфен прямому произведению трех циклических групп порядка 4.
- (4) Порядок A равен 2^{18} .
- (5) Экспонента A равна 8.

Докажем, что в этом случае группа G критическая, используя лемму 1.4. Предположим, что M — максимальная подгруппа группы G и $\omega(M) = \omega(G)$. Поскольку $\omega(G)$ содержит 3 и 7, имеем $AM = G$, т. е. M изоморфна полупрямому произведению $M_1 \rtimes H$, где M_1 — максимальная H -инвариантная подгруппа группы A .

Введем обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по подгруппе Фраттини $\Phi(A)$ группы A . Тогда $\overline{A}$ — прямая сумма двух неприводимых H -модулей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а $\overline{M_1}$ является максимальной подгруппой группы $\overline{A}$. Централизатор элемента $s \in H$ порядка 3 в группе $\overline{A}$ содержит ровно 3 ненулевых элемента: $\overline{x_1}$, $\overline{y_1}$ и $\overline{x_1} + \overline{y_1}$. Поэтому $\overline{M_1}$ — одна из следующих групп:

$$\langle \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3} \rangle, \quad \langle \overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3} \rangle, \quad \langle \overline{x_1} + \overline{y_1}, \overline{x_2} + \overline{y_2}, \overline{x_3} + \overline{y_3} \rangle.$$

С помощью [20] проверяется, что полные прообразы этих групп в A не содержат элементов порядка 8; противоречие. Следовательно, в G нет изоспектральных ей максимальных подгрупп.

Предположим, что S — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $\omega(G/S) = \omega(G)$. Тогда S элементарная абелева и является подгруппой группы Z , поэтому $S = \langle z_1^2, z_2^2, z_3^2 \rangle$. Но в этом случае группа G/S не содержит элементов порядка 8; противоречие. Таким образом, группа G критическая.

Рассмотрим второй пример из [21], т. е. $G = AH$, где A — группа порядка 2^{18} , а H — группа Фробениуса порядка 42. Воспользуемся построением этой группы, описанным в следующей лемме.

Лемма 3.2 [21, замечание после теоремы 3]. Пусть W — векторное пространство размерности 12 над полем порядка 2, а a_1 , b и c — линейные преобразования W , матрицы которых в базисе $\{v_1, v_2, \dots, v_{12}\}$ имеют вид

$$[a_1] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

$$[b] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$[c] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $L = \langle a_1, b, c \rangle$. Тогда

- (1) Порядки a_1 , b и c равны соответственно двум, семи и шести.
- (2) Подгруппа $K = \langle b, c \rangle$ является группой Фробениуса порядка 42.
- (3) Подгруппа $A_1 = \langle a_1^K \rangle$ является элементарной абелевой группой порядка 2^6 .
- (4) Группы L и $W \rtimes L$ являются удвоенными группами Фробениуса и $\omega(W \rtimes L) = \omega(U_3(3))$.

Зафиксируем обозначения из леммы 3.2 до конца параграфа. В этих обозначениях $A = W \rtimes A_1$ и $H = K$. Пользуясь леммой 1.4, докажем, что группа G критическая.

Пусть $M < G$ — максимальная подгруппа, изоспектральная G . Сначала покажем, что $AM = G$. Если $AM < G$, то $A \leq M$. Кроме того, M содержит элементы порядков 3 и 7, поэтому индекс G по M равен двум и можно считать, что $c^2 \in M$ и $c \notin M$. Но тогда в M нет элементов порядка 8; противоречие. Итак, M изоморфна полупрямому произведению $M_1 \rtimes H$, где M_1 — максимальная H -инвариантная подгруппа группы A .

Рассмотрим в A подгруппу $V = \langle v_7, v_8, \dots, v_{12} \rangle$. Из строения матрицы $[a_1]$ видно, что V нормальна в A и фактор-группа A/V элементарная абелева. Поэтому $\Phi(A) \leq V$. Кроме того, из теоремы 1 в [21] следует, что порядок $\Phi(A)$ делится на 2^6 , поэтому $\Phi(A)$ совпадает с V .

Пусть $\bar{X}$ означает образ X при факторизации по $\Phi(A)$. Тогда $\bar{A}$ является прямой суммой неприводимых H -модулей $\bar{W}$ и $\bar{A}_1$. Для $i = \overline{2, 6}$ обозначим $a_i = a_{i-1}^b$. Легко проверить, что H действует на базисах $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_6\}$ и $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_6\}$ одинаково. Центризатор элемента c в группе $\bar{A}$ содержит ровно 3 ненулевых элемента: $\bar{v}_1$, $\bar{a}_1$ и $\bar{v}_1 + \bar{a}_1$. Поэтому $\bar{M}_1$ — одна из следующих групп:

$$\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_6 \rangle, \quad \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_6 \rangle, \quad \langle \bar{v}_1 + \bar{a}_1, \bar{v}_2 + \bar{a}_2, \dots, \bar{v}_6 + \bar{a}_6 \rangle.$$

Непосредственно проверяется, что полные прообразы этих групп элементарные абелевы, откуда получаем, что в M нет элементов порядка 8; противоречие. Следовательно, в G нет изоспектральных ей максимальных подгрупп.

Предположим, что S — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $\omega(G/S) = \omega(G)$. Тогда $S \leq W$ и из теоремы 1 в [21] следует, что порядок S равен 2^6 . Получаем, что $S = \Phi(A)$, откуда вытекает, что G/S элементарная абелева. Поскольку в этом случае G/S не содержит элементов порядка 8, данное противоречие завершает доказательство этой части теоремы.

§ 4. Расширения с помощью $PGL_2(7)$, изоспектральные $U_3(3)$

Отметим, что $\mu(PGL_2(7)) = \{6, 7, 8\}$, $\mu(L_2(7)) = \{3, 4, 7\}$ (см. [17]). Кроме того, положим $H = PGL_2(7)$ и $K \leq H$, $K \simeq L_2(7)$ и зафиксируем эти обозначения до конца параграфа.

Пусть G — группа, изоспектральная $U_3(3)$ и содержащая нормальную подгруппу N , для которой $G/N \simeq H$.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие утверждения.*

- (1) $H \simeq \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^2 = (ab)^7 = (ac)^2 = (bc)^2 = [a, b]^4 = 1 \rangle$.
- (2) Силовские 2-подгруппы группы H изоморфны группе D_{16} , и каждая из них порождается некоторыми инволюциями $x \in K$ и $y \in H \setminus K$.

(3) С точностью до подобия существует единственный неприводимый H -модуль V над полем порядка 2 такой, что элементы порядка 7 из H действуют на V без неподвижных точек. Его размерность равна шести, и действие H на V при подходящем выборе базиса определяется следующими матрицами:

$$[a] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$[c] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

(4) $\omega(V \rtimes H) = \omega(U_3(3))$.

(5) Любое расширение V с помощью H , изоспектральное $U_3(3)$, расщепляется, т. е. является полупрямым произведением $V \rtimes H$.

(6) Группа $V \rtimes H$ критическая относительно $\omega(U_3(3))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Утверждения (1) и (3) проверяются с помощью [20, 22].

(2) Из [17] известно, что в K и $H \setminus K$ ровно по одному классу сопряженных инволюций. Пусть $y \in H \setminus K$ — инволюция, S — силовская 2-подгруппа группы H , содержащая y , а $D \leq S$ — силовская 2-подгруппа группы K . Таким образом, D изоморфна группе D_8 , и индекс группы S по D равен двум.

Следовательно, группа S является полупрямым произведением $D \rtimes \langle y \rangle$. Пусть $D \simeq \langle r, s \mid r^2 = s^2 = (rs)^4 = 1 \rangle$. Если $r^y = r$ или $r^y = r^s$, то $\mu(S) = \{4\}$, что невозможно. Поэтому $r^y = s$ или $r^y = s^r$. В первом случае $(ry)^2 = rr^y = rs$, во втором случае $(ry)^2 = rr^y = rrsr = sr = (rs)^{-1}$. Так или иначе $|ry| = 8$. Таким образом, $S = \langle r, y \rangle \simeq D_{16}$.

(4) Поскольку элементы порядка 7 из H действуют на V без неподвижных точек и $\dim V < 8$, множество $\mu(V \rtimes H)$ содержит 7 и 8. Докажем, что $12 \in \mu(V \rtimes H)$. Пусть x — элемент порядка 6 из H и v — произвольный элемент из V . Непосредственно проверяется, что

$$(vx^{-1})^6 = vv^x v^{x^2} v^{x^3} v^{x^4} v^{x^5}.$$

Элемент справа лежит в группе V . Запишем его в аддитивной форме (это можно сделать, поскольку на V можно смотреть как на H -модуль):

$$v + vx + vx^2 + vx^3 + vx^4 + vx^5,$$

где запись vx означает образ v под действием x . Далее, запишем этот элемент в виде

$$v(E + [x] + [x]^2 + [x]^3 + [x]^4 + [x]^5),$$

где E — единичная матрица, $[x]$ — матричное представление элемента x . Можно проверить (например, с помощью [20]), что матрица $E + [x] + [x]^2 + [x]^3 + [x]^4 + [x]^5$ отлична от нуля, следовательно, существует $v_1 \in V$ такой, что

$$v_1(E + [x] + [x]^2 + [x]^3 + [x]^4 + [x]^5) \neq 0.$$

Таким образом, $(v_1 x^{-1})^6 = v_2 \in V$, где $|v_2| = 2$, поэтому порядок $v_1 x^{-1}$ равен 12.

Наконец, с помощью [20] проверяется, что если y — элемент порядка 8 из H , то матрица $E + [y] + [y]^2 + [y]^3 + [y]^4 + [y]^5 + [y]^6 + [y]^7$ нулевая, откуда следует, что в группе $V \rtimes H$ нет элементов порядка 16.

(5) Пусть G — группа, изоспектральная $U_3(3)$ и содержащая нормальную элементарную абелеву подгруппу V , для которой $G/V \simeq H$. Пусть T — полный прообраз группы K в G , т. е. индекс G по T равен 2, $V \leq T$. Докажем, что G является расщепляемым расширением группы V с помощью $G/V \simeq H$. Для этого воспользуемся леммой 1.5, показав, что группа V дополняется в силовой 2-подгруппе группы G .

Пусть S — подгруппа порядка 7 группы G . Докажем, что $V \cap N_G(S) = 1$. Пусть $g \in V$ нормализует S . Тогда $g^{-1}sg \in S$ для любого $s \in S$. С другой стороны, $V \trianglelefteq G$, поэтому $s^{-1}g^{-1}s \in V$. Тогда $s^{-1}g^{-1}sg \in S \cap V = 1$, следовательно, $g^{-1}sg = s$. Если g нетривиален, то $|sg| = 14$, что невозможно.

Отсюда, пользуясь [17], получаем, что $|N_G(S)| = 7 \cdot 6$, а $|N_T(S)| = 7 \cdot 3$, следовательно, в $G \setminus T$ есть инволюция y .

Пусть запись $\bar{X}$ обозначает образ X при факторизации по V . Тогда $\bar{y}$ — инволюция из $H \setminus K$. Поскольку в K и $H \setminus K$ ровно по одному классу сопряженных инволюций, найдется инволюция $\bar{r} \in K$, для которой $|\bar{y}\bar{r}| = 8$ и $\langle \bar{y}, \bar{r} \rangle \simeq D_{16}$.

Покажем, что в $T \setminus V$ также есть инволюция. Возьмем элемент k порядка 8 из H . Так как $16 \notin \omega(U_3(3))$, порядок k также равен восьми. Элемент k^4 содержится в T , ибо $|G : T| = 2$. Но он не содержится в V , поскольку тогда порядок элемента $\bar{k}$ был бы равен 4.

Обозначим $x = k^4$. Тогда $\bar{x} \in K$, значит, существует элемент $\bar{g} \in K$ такой, что $\bar{x}^{\bar{g}} = \bar{r}$. Пусть g — прообраз $\bar{g}$. Тогда $x^g \in T \setminus V$ — инволюция и $\overline{x^g} = \bar{r}$. Имеем $\langle y, x^g \rangle \simeq D_{16}$ и $\langle y, x^g \rangle \cap V = 1$, поэтому V дополняется в силовой 2-подгруппе группы G .

(6) Пусть G_1 — секция в $V \rtimes H$ и $\omega(G_1) = \omega(V \rtimes H)$. Поскольку V — неприводимый H -модуль и K — единственная нормальная подгруппа в H , группа G_1 имеет вид $V \rtimes H_1$, где $H_1 \leq H$ и порядок H_1 делится на 7. В H есть с точностью до сопряжения всего две максимальные подгруппы, содержащие элемент порядка 7. Это K и $N_H(S)$, где S — подгруппа порядка 7 группы H . Если $H_1 = K$, то G_1 не содержит элементов порядка 12; противоречие. Если $G_1 = N_H(S)$, то $|G_1| = 7 \cdot 6$, в этом случае G_1 не содержит элементов порядка 8, что также противоречит предположению, что $\omega(G_1) = \omega(V \rtimes H)$. Поэтому $H_1 = H$ и $G_1 = V \rtimes H$. $\square$

Итак, пусть G — группа, изоспектральная $U_3(3)$ и содержащая нормальную 2-подгруппу N , для которой $G/N \simeq PGL_2(7)$. Пусть, кроме того, G критическая. Рассмотрим в N G -главный ряд

$$N > V_1 > V_2 > V_3 > \dots > V_k > 1.$$

Тогда фактор-группа N/V_1 является неприводимым H -модулем, поэтому из леммы 4.1 следует, что N/V_1 изоморфна модулю V из леммы 4.1. Следовательно, группа G/V_1 изоморфна полупрямому произведению $V \rtimes H$. Это полупрямое произведение, в свою очередь, изоспектрально $U_3(3)$, тем самым из критичности G вытекает, что $V_1 = 1$ и $G = V \rtimes H$.

Опустим условие критичности группы G и докажем, что и в общем случае подгруппа N дополняется в группе G . Рассмотрим тот же G -главный ряд. Выше доказали, что $G/V_1 \simeq V \rtimes H$, поэтому существует подгруппа H_1 группы G

такая, что $H_1/V_1 \simeq H$. Далее, фактор-группа H_1/V_2 тоже изоморфна $V \rtimes H$, следовательно, существует подгруппа H_2 группы H_1 такая, что $H_2/V_2 \simeq H$. Продолжая этот процесс, аналогично получим подгруппу H_{k+1} группы H_k , изоморфную $PGL_2(7)$. Таким образом, подгруппа N дополняется в G подгруппой H_{k+1} .

§ 5. Расширения с помощью $L_2(7)$, изоспектральные $U_3(3)$

Пусть G — конечная группа, изоспектральная $U_3(3)$ и содержащая нормальную подгруппу N , для которой $G/N \simeq L_2(7)$. С помощью [22] проверяется, что существует лишь два неприводимых представления группы $L_2(7)$ над полем порядка 2 таких, что элементы порядка 7 из $L_2(7)$ на соответствующем модуле не имеют нетривиальных неподвижных точек. Первое представление является естественным представлением для $GL_3(2) \simeq L_2(7)$, второе — контраградиентным к нему.

Пусть s — элемент порядка 3 из G . Поскольку $12 \in \omega(G)$ и $24 \notin \omega(G)$, централизатор элемента s в группе N должен иметь экспоненту 4.

Существует по крайней мере два примера групп такого типа. Обе группы совершенны, т. е. совпадают со своими коммутантами. Подробное описание строения этих групп приведено в [23, с. 177, 178]. Отметим лишь, что обе группы являются расширениями прямого произведения трех циклических групп порядка 4 с помощью $L_2(7)$, однако одно из этих расширений расщепляемое, другое — нерасщепляемое. С помощью леммы 1.4 проверяется (например, используя вычисления в GAP [20]), что эти группы критические относительно $\omega(U_3(3))$.

§ 6. Расширения с помощью $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$, изоспектральные $U_3(3)$

Для каждой из групп $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$ существует единственное неприводимое представление над полем порядка 2 такое, что элементы порядка 7 на соответствующем модуле не имеют нетривиальных неподвижных точек (см. [22]). В обоих случаях порядок модуля равен 2^6 . Обозначим данный $\text{Aut}(U_3(3))$ -модуль через V . Поскольку в $\text{Aut}(U_3(3))$ есть подгруппа, изоморфная $U_3(3)$, модуль V является также неприводимым модулем для $U_3(3)$. Рассмотрим следующие матрицы над полем порядка 2:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle a, b \rangle \simeq U_3(3)$, $\langle c, d \rangle \simeq \text{Aut}(U_3(3))$ и действие групп $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$ на V определяется как естественное действие соответствующих групп матриц. С помощью [20] проверяется, что $\omega(V \rtimes U_3(3)) = \omega(V \rtimes \text{Aut}(U_3(3))) = \omega(U_3(3))$.

Покажем, что группа $U_3(3)$ критическая. Поскольку 7^2 не делит порядок группы $U_3(3)$, достаточно рассмотреть максимальные подгруппы в $U_3(3)$, порядок которых делится на 7. С помощью [17] проверяется, что все такие подгруппы изоморфны группе $L_2(7)$, а $\omega(L_2(7)) \neq \omega(U_3(3))$.

Осталось отметить, что если группа G является расширением N с помощью $U_3(3)$ или $\text{Aut}(U_3(3))$, то G содержит секцию, изоморфную $U_3(3)$. Поэтому $U_3(3)$ — единственная с точностью до изоморфизма $\omega(U_3(3))$ -критическая группа такого типа. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. Д. Мазурову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазуров В. Д., Ши В. Дж. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.
2. Горшков И. Б. Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 57–63.
3. Mazurov V. D., Shi W. J. A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 3. P. 285–288.
4. Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 5. P. 741–759.
5. Васильев А. В., Старолетов А. М. Почти распознаваемость по спектру простых исключительных групп лиева типа // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 6. С. 669–692.
6. Lytkin Y. On groups critical with respect to a set of natural numbers // Sib. Electron. Math. Rep. 2013. V. 10. P. 666–675.
7. Лыткин Ю. В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и sporadических групп // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 122–128.
8. Мазуров В. Д. Нераспознаваемость конечной простой группы ${}^3D_4(2)$ по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 5. С. 601–605.
9. Алеева М. Р. О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.
10. Lucido M. S., Moghaddamfar A. R. Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. V. 73, N 3. P. 373–384.
11. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
12. Thompson J. G. Normal p -complements for finite groups // Math. Z. 1960. Bd 72, Heft 2. S. 332–354.
13. Zassenhaus H. Kennzeichnung endlicher lineare Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. Bd 11. S. 17–40.
14. Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. Bd 11. S. 187–220.
15. Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin: Springer-Verl., 1979.
16. Zavarnitsine A. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electron. Math. Rep. 2009. V. 6. P. 1–12.
17. Conway J. H., etc. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
18. Мазуров В. Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
19. Мазуров В. Д. Обобщение теоремы Цассенхауза // Владикавк. мат. журн. 2008. Т. 10, № 1. С. 40–52.
20. GAP: Groups, algorithms, and programming (<http://www/gap-system.org>).
21. Мазуров В. Д. Удвоенные группы Фробениуса, изоспектральные простой группе $U_3(3)$ // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1384–1390.
22. ATLAS of finite group representations (<http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>).

23. Holt D., Plesken W. Perfect groups. Oxford: Clarendon Press, 1989.

Статья поступила 25 июля 2016 г.

Лыткин Юрий Всеволодович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
jurasicus@gmail.com