

О ПОСТРОЕНИИ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА
С ПОМОЩЬЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ
С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ,
СОДЕРЖАЩИМИ ПАРАМЕТР

А. Н. Полковников, А. А. Шлапунов

Аннотация. Пусть D — открытое связное множество с достаточно гладкой границей ∂D на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Возмущением задачи Коши для системы Коши — Римана $\bar{\partial}u = f$ в D с граничными данными на замкнутом множестве $S \subset \partial D$ получено семейство смешанных задач типа Зарембы для уравнения Лапласа, зависящее от малого параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ в граничном условии. Несмотря на то, что смешанные задачи содержат некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$, каждая из них имеет единственное решение в подходящем гильбертовом пространстве $H^+(D)$, непрерывно вложенном в пространство Лебега $L^2(\partial D)$ и пространство Соболева — Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Соответствующее семейство решений $\{u_\varepsilon\}$ сходится в $H^+(D)$ к решению задачи Коши (если оно существует). Также доказано, что существование решения задачи Коши в $H^+(D)$ эквивалентно ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$ в этом пространстве. Таким образом, получены условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.414

Ключевые слова: оператор Коши — Римана, задача Коши, задача Зарембы, малый параметр, уравнение Лапласа.

Введение

Задача Коши для системы Коши — Римана (для голоморфных функций в классической версии) является давней проблемой, находящей свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т. д. (см. [1–3] и др.). На самом деле она является типичным примером некорректной задачи для более общего класса эллиптических систем (см., например, [3–5]) или даже эллиптических дифференциальных комплексов [6, 7].

Как отмечалось еще в [8], метод регуляризации наиболее эффективен для изучения данной задачи. Книги [2, 3] дают достаточно полное описание условий разрешимости задачи, а также пути ее регуляризации. Недавно был разработан новый подход (см., например, [9–11]), основанный на простом наблюдении, что решение задачи Коши для эллиптических уравнений можно свести к решению

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта правительства РФ для научных исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (контракт № 14.Y26.31.0006), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-9149.2016.1).

смешанных задач (возможно, некоэрцитивных) для эллиптических уравнений с параметром.

Текущий прогресс в теории некоэрцитивных задач типа Зарембы [12, 13] позволяет упростить метод из [10] и получить новый критерий разрешимости задачи, а также построить ее точные и приближенные решения.

А именно, пусть D — открытое связное множество с достаточно гладкой границей ∂D в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Возмущая задачу Коши для системы Коши — Римана $\bar{\partial}u = f$ в D с граничными данными на замкнутом множестве $S \subset \partial D$, получим семейство смешанных задач типа Зарембы для уравнения Лапласа, зависящее от малого параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ в граничном условии. Несмотря на то, что смешанные задачи содержат некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$, каждая из них имеет единственное решение в подходящем гильбертовом пространстве $H^+(D)$, непрерывно вложенном в пространство Лебега $L^2(\partial D)$ и в пространство Соболева — Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Соответствующее семейство решений $\{u_\varepsilon\}$ сходится в $H^+(D)$ к решению задачи Коши (если оно существует). Также докажем, что существование решения задачи Коши в $H^+(D)$ эквивалентно ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$ в этом пространстве. Таким образом, получим условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

По сравнению с [10] мы рассматриваем несколько другие пространства соболевского типа. Кроме того, вместо слабо сходящейся последовательности $\{u_\varepsilon\}$ в $L^2(D)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ получим последовательность, сходящуюся к решению по норме пространства $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$.

1. Задача Коши

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость с точками $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2$. Здесь $\sqrt{-1}$ — мнимая единица, а $x = (x_1, x_2)$ суть координаты в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим через

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

оператор Коши — Римана.

Пусть

$$\bar{\partial}^* = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

обозначает формально сопряженный оператор для $\bar{\partial}$. Известно, что $\bar{\partial}^* \bar{\partial} = -\Delta$, где Δ — стандартный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Пусть D — открытое связное ограниченное множество (ограниченная область) с липшицевой границей ∂D в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как обычно, под $L^2(D)$ понимаем гильбертово пространство измеримых функций в области D с конечной нормой, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{L^2(D)} = \int_D u \bar{v} \, dx.$$

Обозначим также через $H^s(D)$ пространство Соболева — Слободецкого функций в области D , $s \in \mathbb{R}_+$.

Для $u \in L^2(D)$ всегда будем понимать $\bar{\partial}u$ как распределение над D .

Рассмотрим некорректную задачу Коши для оператора Коши — Римана в области D с граничными данными на открытом непустом множестве $S \subset \partial D$. Всюду ниже будем считать это предположение относительно множества S выполненным.

Задача 1.1. Дано распределение f в D и распределение u_0 на S . Найти распределение u в D , удовлетворяющее в подходящем смысле условиям

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = f & \text{в } D, \\ u = u_0 & \text{на } S. \end{cases}$$

Если распределение u_0 обладает достаточной регулярностью, то можно свести задачу 1.1 к случаю, когда граничные условия равны нулю. Например, если граница ∂S множества S кусочно гладкая и $u_0 \in H^{1/2}(S)$, то можно найти $\tilde{u}_0 \in H^{1/2}(\partial D)$, совпадающую с u_0 на S , и затем использовать интеграл Пуассона P задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$P : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^1(D),$$

где оператор P линейный, ограниченный и

$$\begin{cases} \Delta P u_0 = 0 & \text{в } D, \\ t(P \tilde{u}_0) = \tilde{u}_0 & \text{на } \partial D \end{cases}$$

(здесь $t : H^1(D) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$ — стандартный оператор следа).

С целью контролировать поведение решений задачи 1.1 введем следующие функциональные пространства.

Пусть $\varepsilon \geq 0$, рассмотрим эрмитову форму

$$(u, v)_{+, \varepsilon} = \varepsilon(u, v)_{L^2(\partial D)} + (\bar{\partial}u, \bar{\partial}v)_{L^2(D)}$$

на пространстве $C^\infty(\overline{D})$ (всех гладких функций в замыкании $\overline{D}$ области D). В силу классической формулы Коши для голоморфных функций эта форма является скалярным произведением при любом $\varepsilon > 0$. Тогда функционал $\|u\|_{+, \varepsilon} = \sqrt{(u, u)_{+, \varepsilon}}$ является нормой для каждого $\varepsilon > 0$. Очевидно, нормы $\|u\|_{+, \varepsilon}$ и $\|u\|_{+, \delta}$ эквивалентны для любых положительных ε и δ . В частности,

$$\sqrt{\varepsilon}\|u\|_{+, 1} \leq \|u\|_{+, \varepsilon} \leq \|u\|_{+, 1} \quad \text{для всех } u \in H^+(D) \text{ и } 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.1)$$

Обозначим через $H^+(D)$ пополнение пространства $C^\infty(\overline{D})$ по норме $\|\cdot\|_{+, \varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$; из рассуждений выше следует, что пространство $H^+(D)$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Заметим, что по построению

1) пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(\partial D)$, в частности, каждый элемент $u \in H^+(D)$ имеет корректно определенный след $t(u)$ на ∂D , а соответствующий оператор следа t непрерывно отображает $H^+(D)$ в $L^2(\partial D)$;

2) оператор $\bar{\partial}$ непрерывно отображает $H^+(D)$ в $L^2(D)$.

Дальнейшие свойства пространства $H^+(D)$ были описаны в [12] (см. также [13]).

Теорема 1.2. Если D — ограниченная область с липшицевой границей, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Более того, если $\partial D \in C^2$, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^{1/2}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12, теорема 1] (ср. [13, теорема 2.5]). $\square$

Заметим, что вложение точное, т. е. пространство $H^+(D)$ не может быть непрерывно вложено в $H^s(D)$ для любого $s > 1/2$ (см. [12, пример 2] либо [13]).

Эти результаты позволяют рассмотреть следующую версию задачи Коши для оператора Коши — Римана.

Задача 1.3. По заданной функции $f \in L^2(D)$ найти $u \in H^+(D)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = f & \text{в } D, \\ t(u) = 0 & \text{на } S. \end{cases}$$

Известно, что задача 1.3 некорректна и имеет не более одного решения (см., например, [14–16; 17, теорема 2.8]).

Пусть дано непустое множество $S \subset \partial D$. Обозначим через $C^\infty(\bar{D}, S)$ подмножество $C^\infty(\bar{D})$ всех функций, исчезающих на относительно открытом множестве $U \subset \bar{D}$, содержащем замыкание S в ∂D . В частности, $C^\infty(\bar{D}, \partial D)$ совпадает с пространством гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(D)$.

Обозначим также через $H^+(D, S)$ множество, состоящее из всех $u \in H^+(D)$, удовлетворяющих условию $t(u) = 0$ на S . Очевидно, что $H^+(D, S)$ является замкнутым подпространством $H^+(D)$.

Теперь задача 1.3 сводится к исследованию инъективного ограниченного оператора

$$\bar{\partial} : H^+(D, S) \rightarrow L^2(D). \quad (1.2)$$

Опишем основные свойства области определения и образа этого оператора.

Используя неравенство Гординга, видим, что для $S = \partial D$ пространство $H^+(D, \partial D)$ совпадает с $H_0^1(D)$, т. е. с замкнутым подпространством пространства Соболева $H^1(D)$, состоящего из всех $u \in H^1(D)$, удовлетворяющих условию $t(u) = 0$ на ∂D .

Лемма 1.4. Для всех $u \in H^+(D, S)$ имеем $u \in H_{\text{loc}}^1(D \cup S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный элемент $u \in H^+(D, S) \subset H^+(D)$. Так как оператор Коши — Римана $\bar{\partial}$ эллиптический и $\bar{\partial}u \in L^2(D)$, заключаем, что $u \in H_{\text{loc}}^1(D)$.

Возьмем область $G \subset D$ такую, что $\bar{G} \cap \bar{D} = S_1 \subset S$, и функцию $\varphi \in C^\infty(\bar{D})$ с компактным носителем в $G \cup S_1$. Тогда

$$\bar{\partial}(\varphi u) = (\bar{\partial}u)\varphi + (\bar{\partial}\varphi)u \in L^2(D)$$

и $t(\varphi u) = 0$ на ∂D .

Обозначим через $H^{-1}(D)$ пространство, двойственное к $H^1(D, \partial D)$ относительно спаривания, задаваемого скалярным произведением в $L^2(D)$. Тогда распределение $F = \bar{\partial}^* \bar{\partial}(\varphi u)$ принадлежит $H^{-1}(D)$, так как

$$|(\bar{\partial}(\varphi u), \bar{\partial}v)_{L^2(D)}| = |((\bar{\partial}u)\varphi + (\bar{\partial}\varphi)u, \bar{\partial}v)_{L^2(D)}| \leq c(u, \varphi) \|v\|_{H^1(D)}$$

с некоторой константой $c(u, \varphi)$, не зависящей от $v \in H^1(D, \partial D)$.

В частности,

$$(\bar{\partial}(\varphi u), \bar{\partial}v)_{L^2(D)} = \langle F, v \rangle \quad \text{для всех } v \in H^1(D, \partial D),$$

где $\langle F, v \rangle$ обозначает действие распределения F на тестовую функцию v . Это означает, что функция φu является единственным решением задачи Дирихле для оператора Лапласа $\Delta = -\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ с данными $F \in H^{-1}(D)$ и граничными данными $t(\varphi u) = 0$ на ∂D (см., например, [18]). Следовательно, в силу произвольности области G и функции φ (обладающими описанными выше свойствами), $\varphi u \in H^1(D)$ и $u \in H_{\text{loc}}^1(D \cup S)$, что и следовало доказать. $\square$

Как отмечено ранее, $H^+(D, \partial D) = H_0^1(D)$. В частности, $H^+(D, \partial D)$ есть замыкание пространства гладких функций с компактным носителем $C_0^\infty(D)$. Опишем подобным образом пространство $H^+(D, S)$.

Теорема 1.5. Пусть $\partial D \setminus S$ имеет непустую внутренность на ∂D . Если $\partial D \in C^\infty$, то $H^+(D, S)$ есть замыкание $C^\infty(\overline{D}, S)$ в пространстве $H^+(D)$.

Доказательство. По определению замыкание H пространства $C^\infty(\overline{D}, S)$ в $H^+(D)$ есть замкнутое подпространство $H^+(D, S)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что ортогональное дополнение $H^\perp$ пространства H в $H^+(D, S)$ тривиально.

С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $u \in H^+(D, S)$, удовлетворяющее $(u, v)_{+, \varepsilon} = 0$ для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$. В силу того, что $C^\infty(\overline{D}, \partial D) \subset C^\infty(\overline{D}, S)$, имеем

$$(\bar{\partial}u, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} = 0 \quad \text{для всех } v \in C^\infty(\overline{D}, \partial D), \quad (1.3)$$

т. е. $-\bar{\partial}^*(\bar{\partial}u) = 0$ в D в смысле распределений. Так как оператор $\bar{\partial}^*$ эллиптический, решения для этого уравнения являются гладкими функциями над D ; действительно, $\bar{\partial}u$ является антиголоморфной в D функцией класса $L^2(D)$ (т. е. $\bar{\partial}u$ голоморфна).

Пусть ρ — порождающая функция области $D = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < 0\}$. Поскольку $\partial D \in C^\infty$, можно выбрать $\rho \in C^\infty(U)$ для окрестности U границы ∂D с $|\nabla \rho| \neq 0$ на ∂D такое, что $\nu = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$ является векторным полем единичных нормалей к ∂D . При достаточно малых $\delta > 0$ рассмотрим области

$$D_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < -\delta\}.$$

Ясно, что $D_\delta \Subset D$ и $\rho_\delta = \rho + \delta$ является порождающей функцией области D_δ с $\nabla \rho = \nabla \rho_\delta$, а $\nu_\delta = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$ есть векторное поле единичных нормалей к ∂D_δ . Тогда голоморфная функция $g = \bar{\partial}u$ имеет слабое граничное значение $g_0 \in \mathcal{D}'(\partial D)$ на ∂D в том смысле, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = \langle g_0, v \rangle \quad \text{для всех } v \in C^\infty(\overline{D})$$

(см. [15, следствие 2.3] либо [17, теорема 4.4]). Здесь $\mathcal{D}'(\partial D)$ — пространство распределений на ∂D , а $\langle g_0, v \rangle$ обозначает действие распределения g_0 на тестовую функцию v .

Пользуясь свойствами интеграла Пуассона P и тем фактом, что $|\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2| = 1$ на ∂D , заключаем, что функция $w = P(v/(\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2))$ принадлежит $C^\infty(\overline{D}, S)$ для каждого $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$. Применяя формулу интегрирования по частям и (1.3), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{\partial}w, \bar{\partial}u)_{L^2(D)} = (\bar{\partial}w, \bar{g})_{L^2(D)} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} (\bar{\partial}w, \bar{g})_{L^2(D_\delta)} = -\sqrt{-1} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) w(\zeta) d\zeta \\ &= -\sqrt{-1} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2})(\zeta) w(\zeta) ds_\delta(\zeta) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} g(\zeta) v(\zeta) ds_\delta(\zeta) = \langle g_0, v(\zeta) \rangle \quad \text{для всех } v \in C^\infty(\overline{D}, S), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\nu_{\delta,j}$ — компоненты вектора нормали ν_δ . Так как для любой функции $w \in C^\infty(\overline{D}, S)$ ее сужение $w|_{\partial D}$ на ∂D имеет компактный носитель в $\partial D \setminus S$, видим, что g_0 равняется нулю на $\partial D \setminus S$. Следовательно, g исчезает на $\partial D \setminus S$

в смысле слабых граничных значений. В силу того, что g голоморфна (т. е. является решением эллиптического оператора $\bar{\partial}$), из [17, теорема 2.8] следует, что g тождественно равна нулю в D .

Таким образом, заключаем, что $g = \overline{\partial}u = 0$ в D , т. е. функция $u \in L^2(D)$ голоморфна в D . По предположению она исчезает на непустом относительно открытом множестве $S \subset \partial D$. Наконец, так как оператор первого порядка $\bar{\partial}$ эллиптичен, из [17, теорема 2.8] следует, что u тождественно равна нулю в D . $\square$

Лемма 1.6. Пусть $\partial D \setminus S$ имеет непустую внутренность на ∂D . Если $\partial D \in C^\infty$, то образ оператора (1.2) плотен в $L^2(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in L^2(D)$ удовлетворяет условию

$$(g, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} = 0 \quad \text{для всех } v \in H^+(D, S).$$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1.5, заключаем, что $\bar{\partial}^*g = 0$ в D и $g = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Так как g антиголоморфна (т. е. является решением эллиптического оператора $\bar{\partial}^*$), из [17, теорема 2.8] следует, что g тождественно равна нулю в D . $\square$

Таким образом, мы описали замыкание образа отображения (1.2). Более сложной задачей является описание самого образа отображения (1.2). Следующая лемма делает первый шаг в данном направлении.

Для распределения f , определенного около ∂D , положим $\nu(f) = (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2})f$, а для распределения u , определенного около ∂D , положим $\bar{\partial}_\nu u = (\nu_{\delta,1} + \sqrt{-1}\nu_{\delta,2})\bar{\partial}u$. На самом деле $\bar{\partial}_\nu u$ — так называемая комплексная нормальная производная функции u .

Лемма 1.7. Пусть $\partial D \in C^\infty$. Если $f \in L^2(D)$, то функция $u \in H^+(D, S)$ является решением задачи 1.3 в том и только в том случае, когда

$$(\bar{\partial}u, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} = (f, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} \quad (1.5)$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если задача 1.3 разрешима и u — одно из ее решений, то (1.5), очевидно, выполнено. Обратно, если (1.5) выполнено для любого элемента $u \in H^+(D, S)$, то $\bar{\partial}^*(\bar{\partial}u - f) = 0$ в D , так как пространство $H^+(D, S)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D . В частности, функция $(\bar{\partial}u - f)$ голоморфна в D . Интегрируя, как в (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\bar{\partial}u - f)(\zeta)} v(\zeta) ds_\delta(\zeta) &= -\sqrt{-1} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\bar{\partial}u - f)(\zeta)} w(\zeta) d\zeta \\ &= (w, (\bar{\partial}^*(\bar{\partial}u - f)))_{L^2(D)} - (\bar{\partial}w, \bar{\partial}u - f)_{L^2(D)} = -(\bar{\partial}w, \bar{\partial}u - f)_{L^2(D)} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$, поскольку $w \in C^\infty(\overline{D}, S)$. Следовательно, как и в доказательстве теоремы 1.5, видим, что $\bar{\partial}u - f = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений.

Наконец, так как $(\bar{\partial}u - f)$ антиголоморфна (т. е. является решением эллиптического оператора $\bar{\partial}^*$), из [17, теорема 2.8] следует, что $(\bar{\partial}u - f)$ тождественно равна нулю в D . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Согласно [15, следствие 2.3] слабые граничные значения голоморфных (антиголоморфных) функций класса $L^2(D)$ в области D принадлежат пространству Соболева $H^{-1/2}(\partial D)$ на компактном множестве ∂D , т. е. эти следы имеют конечный порядок особенности на ∂D . Следовательно, все вышеперечисленные результаты действительны для областей с конечным (вероятно, достаточно высоким) порядком гладкости границы.

В заключение этого раздела поясним значение (1.5). Это равенство означает, что решение $u \in H^+(D, S)$ задачи Коши $\bar{\partial}u = f$ на самом деле является решением смешанной задачи типа Зарембы

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{\partial}^* f & \text{в } D, \\ t(u) = 0 & \text{на } S, \\ \bar{\partial}_\nu u = \nu(f) & \text{на } \partial D \setminus S. \end{cases} \quad (1.7)$$

Действительно, из доказательства леммы 1.7 вытекает, что

$$\bar{\partial}^* \bar{\partial} u = -\Delta u = \bar{\partial}^* f \quad \text{в } D$$

в пространстве распределений и $\nu(\bar{\partial}u - f) = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. В частности, если вектор $\nu(f)$ корректно определен на $\partial D \setminus S$, то и $\bar{\partial}_\nu u$ также корректно определен на $\partial D \setminus S$.

Конечно, смешанная задача (1.7), рассмотренная в подходящих пространствах, дает не что иное, как (1.5). В следующем разделе получим условия разрешимости задачи 1.3.

2. Об одном возмущении задачи Коши

Последнее наблюдение разд. 1 наталкивает на мысль о возмущении задачи 1.3 с целью получения смешанной задачи типа Зарембы (1.7).

С учетом леммы 1.7 рассмотрим следующую возмущенную задачу Коши.

Задача 2.1. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1]$. По заданной функции $f \in L^2(D)$ найти элемент $u_\varepsilon \in H^+(D, S)$, удовлетворяющий условию

$$(\bar{\partial}u_\varepsilon, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} + \varepsilon(u_\varepsilon, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} = (f, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} \quad (2.1)$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

Заметим, что уравнение (2.1) приводит к возмущению смешанной задачи (1.7). Более точно,

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \bar{\partial}^* f & \text{в } D, \\ t(u_\varepsilon) = 0 & \text{на } S, \\ \bar{\partial}_\nu u_\varepsilon + \varepsilon t(u_\varepsilon) = \nu(f) & \text{на } \partial D \setminus S. \end{cases} \quad (2.2)$$

Так как пространство $H^+(D, S)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D , (2.1) означает, что $-\Delta u_\varepsilon = \bar{\partial}^* f$ в D в смысле распределений. Граничное условие $t(u_\varepsilon) = 0$ на S следует из определения пространства $H^+(D, S)$. Наконец, равенство $\nu(\bar{\partial}u_\varepsilon) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = \nu(f)$ выполнено в том смысле, что $\nu(\bar{\partial}u_\varepsilon - f) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = 0$ на $\partial D \setminus S$, так как

$$\bar{\partial}^*(\bar{\partial}u_\varepsilon - f) = 0 \in L^2(D)$$

в смысле распределений в D , $\overline{(\partial u_\varepsilon - f)}$ голоморфна в D и после интегрирования по частям, как в (1.6), с использованием (2.1) получается

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\partial u_\varepsilon - f)}(\zeta) v(\zeta) ds_\delta(\zeta) &= -\sqrt{-1} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial D_\delta} \overline{(\partial u_\varepsilon - f)}(\zeta) w(\zeta) d\zeta \\ &= (\bar{\partial} w, \bar{\partial} u_\varepsilon - f)_{L^2(D)} = -\varepsilon(w, t(u_\varepsilon))_{L^2(\partial D \setminus S)} = -\varepsilon \left(v, \frac{t(u_\varepsilon)}{\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2} \right)_{L^2(\partial D \setminus S)} \end{aligned}$$

для всех $v \in C^\infty(\overline{D}, S)$, т. е. $\overline{(\partial u_\varepsilon - f)}$ совпадает с $-\varepsilon t(\overline{u_\varepsilon})/(\nu_1 + \sqrt{-1}\nu_2)$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Следовательно, $\nu(\partial u_\varepsilon - f) + \varepsilon t(u_\varepsilon) = 0$ на $\partial D \setminus S$ в смысле слабых граничных значений. Если сужение $\nu(f)$ на $\partial D \setminus S$ имеет смысл, то сужение $\nu(\partial u_\varepsilon - f)$ также корректно определено, поскольку $t(u_\varepsilon) \in L^2(\partial D)$.

Ясно, что смешанная задача (2.2), рассмотренная в подходящих пространствах, дает не что иное, как (2.1).

На самом деле (1.7) и (2.2) являются смешанными задачами с граничными условиями робеновского типа. Это аналоги так называемой задачи Зарембы для оператора Лапласа (см. [19]). В общем случае смешанные задачи (1.7) и (2.2) имеют некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$ (см. [10, 13]). Следовательно, они не могут быть корректными в весовых пространствах Соболева (см. [20]). Принципиальная разница между задачами 1.3 и 2.1 в том, что последняя корректна в $H^+(D, S)$.

Лемма 2.2. Для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in L^2(D)$ существует единственное решение $u_\varepsilon(f) \in H^+(D, S)$ задачи 2.1. Более того, оно удовлетворяет оценке

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+, \varepsilon} \leq \|f\|_{L^2(D)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видели выше, пространство $H^+(D, S)$, наделенное скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{+, \varepsilon}$, гильбертово. Из неравенства Шварца следует, что

$$|(f, \bar{\partial} v)_{L^2(D)}| \leq \|f\|_{L^2(D)} \|\bar{\partial} v\|_{L^2(D)} \leq \|f\|_{L^2(D)} \|v\|_{+, \varepsilon}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$. Значит, отображение $v \mapsto (f, \bar{\partial} v)_{L^2(D)}$ определяет непрерывный линейный функционал $\mathcal{F}_f$ на $H^+(D, S)$, норма которого мажорируется следующим образом: $\|\mathcal{F}_f\| \leq \|f\|_{L^2(D)}$.

В силу теоремы Рисса заключаем, что существует единственный элемент $u_\varepsilon(f) \in H^+(D, S)$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{F}_f(v) = (u_\varepsilon(f), v)_{+, \varepsilon}$$

для любого $v \in H^+(D, S)$. Ясно, что $u_\varepsilon(f)$ является решением задачи (2.1). Наконец, по теореме Рисса имеем

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+, \varepsilon} \leq \|f\|_{L^2(D)},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Уравнения (2.2) показывают, что лемма 2.2 дает информацию о разрешимости смешанной задачи для оператора Лапласа Δ с очень специальными данными на D , S и $\partial D \setminus S$. Выясним, какие теоремы разрешимости могут быть получены для произвольных данных. С этой целью обозначим через $H^-(D, S)$

двойственное к $H^+(D, S)$ пространство относительно спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$, индуцированного скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{L^2(D)}$ (см., например, [12, 13]). На самом деле, это гильбертово пространство, изоморфное нормированному пространству, построенному как пополнение $H^+(D, S)$ по любой из норм

$$\|g\|_{-, \varepsilon} = \sup_{\substack{v \in H^+(D, S), \\ v \neq 0}} \frac{|(g, v)_{L^2(D)}|}{\|v\|_{+, \varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Задача 2.3. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1]$. Для заданного $g \in H^-(D, S)$ найти элемент $w_\varepsilon(g) \in H^+(D, S)$, удовлетворяющий условию

$$(\bar{\partial} w_\varepsilon(g), \bar{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon (w_\varepsilon(g), v)_{L^2(\partial D \setminus S)} = \langle g, v \rangle \quad (2.3)$$

для любого $v \in H^+(D, S)$.

Лемма 2.4. Для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in H^-(D, S)$ существует единственное решение $w_\varepsilon \in H^+(D, S)$ задачи 2.3. Более того,

$$\|w_\varepsilon(g)\|_{+, \varepsilon} \leq \|g\|_{H^-(D, S)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.2 (см. [12, лемма 3; 13]). $\square$

На самом деле лемма 2.4 эквивалентна следующему утверждению: задача 2.3 индуцирует непрерывно обратимый линейный оператор $L_\varepsilon : H^+(D, S) \rightarrow H^-(D, S)$ с $\|L_\varepsilon\| = \|L_\varepsilon^{-1}\| = 1$.

Но даже в этом случае нельзя гарантировать того, что $w_\varepsilon \in H^s(D)$ при любом $s > 1/2$, без введения дополнительных ограничений на g . Эта ситуация типична для смешанных задач (см. [20, 21]).

Однако теорема 1.2 (вместе с теоремами вложения Реллиха — Кондрашова и теоремой Гильберта — Шмидта) дает преимущество — спектральную теорему, относящуюся к задаче 2.3.

Введем скалярное произведение

$$(g, \tilde{g})_{-, \varepsilon} = \langle g, L_\varepsilon^{-1} \tilde{g} \rangle$$

в пространстве $H^-(D, S)$. Данное скалярное произведение определяет норму $\|\cdot\|_{-, \varepsilon}$.

Лемма 2.5. Для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ существуют положительные числа $\{\lambda_k^{(\varepsilon)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ и функции $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H^+(D, S)$ такие, что

$$(\bar{\partial} b_k^{(\varepsilon)}, \bar{\partial} v)_{L^2(D)} + \varepsilon (b_k^{(\varepsilon)}, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} = (\lambda_k^{(\varepsilon)})^{-1} (b_k^{(\varepsilon)}, v)_{L^2(D)} \quad (2.4)$$

для любого $v \in H^+(D, S)$. Система $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ является ортонормированным базисом в $H^+(D, S)$ (по норме $(\cdot, \cdot)_{+, \varepsilon}$), также это ортогональный базис в $L^2(D)$ и $H^-(D, S)$ (по норме $(\cdot, \cdot)_{-, \varepsilon}$). Более точно, $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ является системой собственных векторов компактных самосопряженных операторов

$$L_\varepsilon^{-1} \iota' : H^+(D, S) \rightarrow H^+(D, S), \quad \iota' L_\varepsilon^{-1} : H^-(D, S) \rightarrow H^-(D, S),$$

$$\iota L_\varepsilon^{-1} \iota' : L^2(D) \rightarrow L^2(D),$$

соответствующих (положительным) собственным значениям $\{\lambda_k^{(\varepsilon)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, где

$$\iota : H^+(D, S) \rightarrow L^2(D), \quad \iota' : L^2(D) \rightarrow H^-(D, S)$$

суть операторы естественного вложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12, лемма 4; 13]. $\square$

По построению каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет некоторому уравнению Гельмгольца в области D ; в частности, каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ вещественно аналитическая в D .

Кроме того, можно получить формулу для решения задачи 2.3. С этой целью положим

$$\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z, \zeta) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k^{(\varepsilon)}(z) \overline{b_k^{(\varepsilon)}(\zeta)}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{L^2(D)}^2}.$$

Следствие 2.6. Для каждого $g \in H^-(D, S)$ решение $w_\varepsilon(g) \in H^+(D, S)$ задачи 2.3 задается формулой

$$w_\varepsilon(g)(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle g, \mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z, \cdot) \rangle, \quad z \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.5 следует, что для всех $u \in H^+(D, S)$ и $g \in H^-(D, S)$ имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, b_k^{(\varepsilon)})_{+, \varepsilon} b_k^{(\varepsilon)}, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g, \iota' b_k^{(\varepsilon)})_{-, \varepsilon}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{-, \varepsilon}^2} \iota' b_k^{(\varepsilon)}.$$

С другой стороны, лемма 2.5 означает, что

$$L_\varepsilon b_k^{(\varepsilon)} = \lambda_k^{(\varepsilon)} \iota' b_k^{(\varepsilon)}, \quad L_\varepsilon u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, b_k^{(\varepsilon)})_{+, \varepsilon} \lambda_k^{(\varepsilon)} \iota' b_k^{(\varepsilon)}.$$

Используя ортогональность системы $\{b_k^{(\varepsilon)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, получаем

$$(w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+, \varepsilon} = \frac{(g, \iota' b_k^{(\varepsilon)})_{-, \varepsilon}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{-, \varepsilon}^2}.$$

Наконец, по определению

$$(g, \iota' b_k^{(\varepsilon)})_{-, \varepsilon} = \langle g, L_\varepsilon^{-1} \iota' b_k^{(\varepsilon)} \rangle = \lambda_k^{(\varepsilon)} \langle g, b_k^{(\varepsilon)} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \|b_k^{(\varepsilon)}\|_{-, \varepsilon}^2 &= (\iota' b_k^{(\varepsilon)}, \iota' b_k^{(\varepsilon)})_{-, \varepsilon} = \langle \iota' b_k^{(\varepsilon)}, L_\varepsilon^{-1} \iota' b_k^{(\varepsilon)} \rangle \\ &= \lambda_k^{(\varepsilon)} \langle \iota' b_k^{(\varepsilon)}, b_k^{(\varepsilon)} \rangle = \lambda_k^{(\varepsilon)} \|b_k^{(\varepsilon)}\|_{L^2(D)}^2 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+, \varepsilon} = \frac{\langle g, b_k^{(\varepsilon)} \rangle}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{L^2(D)}^2}.$$

Поэтому

$$w_\varepsilon(g)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_\varepsilon(g), b_k^{(\varepsilon)})_{+, \varepsilon} b_k^{(\varepsilon)}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\langle g, b_k^{(\varepsilon)} \rangle}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{L^2(D)}^2} b_k^{(\varepsilon)}(z),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 2.7. Для каждого $f \in L^2(D)$ решение $u_\varepsilon \in H^+(D, S)$ задачи 2.1 задается формулой

$$u_\varepsilon(f)(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (f, \bar{\partial} \mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z, \cdot))_{L^2(D)}, \quad z \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 2.6 с учетом следующей связи между данными задач 2.1 и 2.3:

$$\langle g, v \rangle = (f, \bar{\partial} v)_{L^2(D)}$$

(см. доказательство леммы 2.4). $\square$

Обсудим очень важный вопрос о том, как найти собственные векторы задачи Зарембы, а следовательно, и решение задачи 1.3.

Пусть $\mathcal{D}$ — единичный диск в $\mathbb{C}$. Построение системы $\{b_k^{(\varepsilon)}\}$ для $D = \mathcal{D}$ можно выполнить с использованием системы функций Бесселя

$$\mathcal{J}_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}} \frac{z^{2k+p}}{k!(k+p)!}, \quad \mathcal{J}_{-p}(z) = (-1)^p \mathcal{J}_p(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

А именно, известно, что любая собственная функция задачи 2.3 в диске $\mathcal{D}$, отвечающая собственному значению $\lambda_k^{(\varepsilon)}$, имеет вид

$$b_k^{(\varepsilon)}(z) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (z/|z|)^q \mathcal{J}_q(|z| \sqrt{\lambda_k^{(\varepsilon)}}) d_q^{(\varepsilon)}(S) \quad (2.5)$$

с некоторыми коэффициентами $\{d_q^{(\varepsilon)}(S)\}_{q \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Если $S = \emptyset$ или $S = \partial D$, то сумма состоит только из одного ненулевого слагаемого; если $S \neq \partial \mathcal{D}$ и $S \neq \emptyset$, то число ненулевых коэффициентов $d_q^{(\varepsilon)}(S)$ суммы не может быть конечным (см., например, [22, дополнение II, с. 1, § 2]. Собственное значение $\lambda_k^{(\varepsilon)}$ и коэффициенты $\{d_q^{(\varepsilon)}(S)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ могут быть найдены из соотношений $b_k^{(\varepsilon)} = 0$ на S и $(\bar{\partial}_\nu + \varepsilon)b_k^{(\varepsilon)} = 0$ на $\partial D \setminus S$.

3. Основной результат

Неравенства (1.1) и лемма 2.2 дают следующую грубую оценку для семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$:

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|f\|_{L^2(D)}, \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Таким образом, это семейство может быть неограниченным при $\varepsilon \rightarrow +0$. Выясним, как поведение семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon > 0}$ влияет на разрешимость задачи 1.3.

Теорема 3.1. Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $u \in H^+(D, S)$, удовлетворяющее (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 3.2. Пусть существует такое множество $A \subset (0,1]$, что

- 1) нуль является предельной точкой A ;
- 2) семейство $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta \in A}$ ограничено.

Тогда существует $u \in H^+(D, S)$, удовлетворяющее (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что нуль является предельной точкой множества A и семейство $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta \in A}$ ограничено. Согласно (2.1) имеем

$$(\bar{\partial}u_\delta(f), \bar{\partial}v)_{L^2(D)} + \delta(u_\delta(f), v)_{L^2(D)} = (f, \bar{\partial}v)_{L^2(D)}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$. Переходя к пределу при $A \ni \delta \rightarrow +0$ в последнем равенстве и пользуясь тем фактом, что $\{u_\delta(f)\}_{\delta \in A}$ ограничено, получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} (\bar{\partial}u_\delta(f), \bar{\partial}v)_{L^2(D)} = (f, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} \quad (3.1)$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

Известно, что любое ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{\delta_j}(f)\} \subset H^+(D, S)$, слабо сходящаяся в этом пространстве к элементу $u \in H^+(D, S)$. Здесь $\{\delta_j\}$ стремится к 0 при $j \rightarrow \infty$.

Покажем, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо к u в $H^s(D)$ при $s < 1/2$ и $j \rightarrow \infty$.

Из теоремы 1.2 следует, что вложение $i_s : H^+(D, S) \rightarrow H^s(D)$ непрерывно для любого $s < 1/2$. Следовательно, сопряженный оператор $i_s^* : H^s(D) \rightarrow H^+(D, S)$ также ограничен, а

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (i_s u_{\delta_j}(f), v)_{H^s(D)} = \lim_{j \rightarrow \infty} (u_{\delta_j}(f), i_s^* v)_{H^+(D, S)} = (u, i_s^* v)_{H^+(D, S)}$$

для всех $v \in H^s(D)$. Это в точности означает, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо в $H^s(D)$.

Обозначим через $\bar{\partial}^* : L^2(D) \rightarrow H^+(D, S)$ сопряженный к ограниченному линейному оператору $\bar{\partial} : H^+(D, S) \rightarrow L^2(D)$. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \lim_{A \ni \delta \rightarrow +0} (\bar{\partial}u_\delta(f), \bar{\partial}v)_{L^2(D)} &= \lim_{A \ni \delta \rightarrow +0} (u_\delta(f), \bar{\partial}^* \bar{\partial}v)_{H^+(D, S)} \\ &= (u(f), \bar{\partial}^* \bar{\partial}v)_{H^+(D, S)} = (\bar{\partial}u(f), \bar{\partial}v)_{L^2(D)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

для всех $v \in H^+(D, S)$. Комбинируя (3.1) и (3.2), видим, что (1.5) выполняется для функции $u \in H^+(D, S)$. $\square$

Получим более сильное утверждение, чем теорема 3.1, если докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. Если существует функция $u \in H^+(D, S)$, удовлетворяющая условию (1.5), то семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничено и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\bar{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|_{L^2(D)} = 0.$$

Более того, $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится слабо к $u \in H^+(D, S)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и сходится к решению u в $H^s(D)$ для всех $s < 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует $u \in H^+(D, S)$, удовлетворяющее условию (1.5). Обозначим $R_\varepsilon = u_\varepsilon(f) - u$, тогда из (1.5) и (2.1) следует, что

$$(\bar{\partial}R_\varepsilon, \bar{\partial}v)_{L^2(D)} + \varepsilon(R_\varepsilon, v)_{L^2(\partial D)} = -\varepsilon(u, v)_{L^2(\partial D)} \quad (3.3)$$

для всех $v \in H^+(D, S)$. Так как

$$|-\varepsilon(u, v)_{L^2(\partial D)}| \leq \varepsilon \|u\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{L^2(\partial D)} \leq \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{+,\varepsilon},$$

отображение $v \mapsto -\varepsilon(u, v)_{L^2(\partial D)}$ определяет непрерывный линейный функционал $g_\varepsilon(u)$ в пространстве $H^+(D, S)$ и

$$\|g_\varepsilon(u)\| \leq \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Таким образом, (3.3) означает, что $R_\varepsilon = w_\varepsilon(g_\varepsilon(u))$ есть решение задачи 2.3 с данными $g = g_\varepsilon(u)$.

Согласно (1.1) и лемме 2.4 имеем

$$\|R_\varepsilon\|_{+,1} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|R_\varepsilon\|_{+,\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\partial D)} = \|u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Следовательно, семейство $\{\|R_\varepsilon\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$, а также семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничены. Из (3.3) следует

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\bar{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|_{L^2(D)}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\bar{\partial}R_\varepsilon\|_{L^2(D)}^2 \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon (\|R_\varepsilon\|_{L^2(\partial D)}^2 + (u, R_\varepsilon)_{L^2(\partial D)}) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, покажем, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится слабо к u в $H^+(D, S)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Доказательство будем строить от противного. Действительно, если $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ не сходится слабо к u в $H^+(D, S)$, то существуют $v \in H^+(D, S)$, $\gamma > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_j\}$, стремящаяся к $+0$ при $j \rightarrow \infty$, такие, что

$$|(u_{\varepsilon_j} - u, v)_{+,1}| \geq \gamma \quad (3.4)$$

для любого $j \in \mathbb{N}$. Но последовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $H^+(D, S)$, а значит, существует подпоследовательность, сходящаяся слабо в $H^+(D, S)$. Чтобы не усложнять обозначения, снова обозначим ее через $\{u_{\varepsilon_j}\}$. Как видно из доказательства леммы 3.2, слабый предел $\{u_{\varepsilon_j}\}$ есть u . Это противоречит (3.4), а следовательно, первая часть леммы доказана.

Наконец, согласно теореме 1.2 пространство $H^+(D, S)$ непрерывно вложено в пространство Соболева — Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. Хорошо известно, что компактные операторы в гильбертовом пространстве переводят слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Таким образом, из теоремы Реллиха — Кондрашова о компактных вложениях для пространств Соболева вытекает, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится к u в $H^s(D)$ для любого $s < 1/2$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1 немедленно следует из лемм 3.2 и 3.3. $\square$

Следствие 3.4. Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничено тогда и только тогда, когда задача 1.3 разрешима. Более того, в этом случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\bar{\partial}u_\varepsilon(f) - f\|_{L^2(D)} = 0$$

и $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится слабо в $H^+(D, S)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ к решению $u \in H^+(D, S)$ задачи 1.3. Кроме того, оно сходится к u в пространстве $H^s(D)$ для любого $s < 1/2$ и в $H_{\text{loc}}^1(D \cup S)$.

Доказательство. Почти все эти утверждения следуют из теоремы 3.1 и лемм 1.7 и 3.3. Остается только показать, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится к u в топологии $H_{\text{loc}}^1(D \cup S)$, если $u \in H^+(D, S)$ является решением задачи 1.3.

Действительно, замечаем, что $\{u_\varepsilon(f) - u\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ ограничена в $H^+(D)$ в силу леммы 3.3 и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\bar{\partial}(u_\varepsilon(f) - u)\|_{L^2(D)} = 0, \quad t(u_\varepsilon(f) - u) = 0$$

на S для любого $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда, применяя [23, теорема 7.2.6], заключаем, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ сходится к u в $H_{\text{loc}}^1(D \cup S)$. $\square$

Наконец, выпишем формулу карлемановского типа для решений задачи Коши 1.3.

Следствие 3.5. Для любой функции $u \in H^+(D, S)$

$$(u, v)_{+,1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{N \rightarrow +\infty} ((\bar{\partial}u, \bar{\partial}\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z, \cdot))_{L^2(D)}, v(z))_{L^2(D)}$$

для всех $v \in H^+(D, S)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carleman T. Les fonctions quasianalytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
2. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990.
3. Tarkhanov N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Berlin: Akademie-Verl., 1995.
4. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 2. С. 195–197.
5. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.
6. Fedchenko D. P., Shlapunov A. A. On the Cauchy problem for the Dolbeault complex in spaces of distributions // Complex Variables, Elliptic Equ. 2013. V. 58, N 11. P. 1591–1614.
7. Fedchenko D. P., Shlapunov A. A. On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions // Complex Variables, Elliptic Equ. 2014. V. 59, N 5. P. 651–679.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. Simanca S. Mixed elliptic boundary value problems // Comm. in PDE. 1987. V. 12. P. 123–200.
10. Shlapunov A. A., Tarkhanov N. Mixed problems with a parameter // Russ. J. Math. Phys. 2005. V. 12, N 1. P. 97–124.
11. Schulze B.-W., Shlapunov A., Tarkhanov N. Green's integrals on manifolds with cracks // Ann. Global Anal. Geom. 2003. V. 24. P. 131–160.
12. Polkovnikov A. N., Shlapunov A. A. On spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with the $\bar{\partial}$ -operator // J. Sib. Federal Univ., Math., Phys. 2013. V. 6, N 2. P. 247–261.
13. Shlapunov A. A., Tarkhanov N. On completeness of root functions of Sturm–Liouville problems with discontinuous boundary operators // J. Differ. Equ. 2013. V. 255. P. 3305–3337.
14. Айзенберг Л. А., Кытманов А. М. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–507.
15. Тарханов Н. Н., Шлапунов А. А. О задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега L^2 в области // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 914–922.
16. Shlapunov A. A. On the Cauchy problem for the Cauchy–Riemann operator in Sobolev spaces // Contemp. Math. 2008. V. 445. P. 333–347.
17. Shlapunov A. A., Tarkhanov N. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols // Proc. London. Math. Soc. 1995. V. 71, N 1. P. 1–54.
18. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
19. Zarembka S. Sur un problème mixte à l'équation de Laplace // Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie. 1910. P. 314–344.
20. Harutjunjan G., Schulze B.-W. Mixed problems and edge calculus: symbolic structure // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 2006. V. 64, N 2. P. 159–197.
21. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
22. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

- 23.** *Tarkhanov N.* Analysis of solutions of elliptic equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.

Статья поступила 25 октября 2016 г.

Полковников Александр Николаевич, Шлапунов Александр Анатольевич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
paskaattt@yandex.ru, ashlapunov@sfu-kras.ru