

УДК 512.553

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ МОДУЛИ ПРОКОНЕЧНЫХ ГРУПП

К. Н. Пономарев

Аннотация. Для произвольной проконечной группы G и коммутативной области целостности R определено понятие перестановочного RG -модуля, обобщающее известное понятие из теории представлений конечных групп. Установлена теорема о свободе такого модуля как R -модуля над кольцом скаляров.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.415

Ключевые слова: перестановочный модуль, проконечная группа.

В теории представлений конечных групп хорошо известно понятие *перестановочного RG -модуля* конечной группы G над кольцом скаляров R . Иногда такие модули называют *пермутационными модулями*. Это конечно порожденный свободный модуль над кольцом скаляров R , на базисе которого определено перестановочное действие группы G . Структура перестановочного модуля определяется разложением перестановок в произведение независимых циклов. Поэтому перестановочный RG -модуль однозначно разлагается в прямую сумму неразложимых компонент — *транзитивно перестановочных RG -модулей*. Это понятие активно используется в теории алгебраических торов и, вообще, в теории алгебраических групп.

Важность перестановочных модулей при изучении мультипликативной группы бесконечного поля F объясняется следующим замечанием [1]. Рассмотрим конечную группу автоморфизмов G этого поля. Естественное действие группы G и кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ на мультипликативной группе поля F^* определяет на этой группе структуру $\mathbb{Z}G$ -модуля. Такая конструкция была подробно изучена в [2]. Заметим, что для произвольного непериодического элемента мультипликативной группы поля $f \in F^* \setminus \sqrt[\infty]{1}$ порожденный этим элементом $\mathbb{Z}G$ -модуль $f^{\mathbb{Z}G}$ оказывается перестановочным $\mathbb{Z}G$ -модулем. Однако при изучении мультипликативной группы произвольного поля требование конечности группы автоморфизмов представляется чрезмерным. Естественно рассматривать проконечные группы автоморфизмов и дискретные модули над ними.

Полагаем *транзитивно перестановочным модулем бесконечной проконечной группы G* такой дискретный RG -модуль, который представляется прямым пределом транзитивно перестановочных модулей конечных фактор-групп группы G по подгруппам некоторого ее базиса топологии. *Перестановочный RG -модуль* определяем прямой суммой некоторых транзитивно перестановочных RG -модулей.

Заметим, что в общем случае прямое произведение свободных модулей не образует свободного модуля. Прямой предел свободных модулей свободным, вообще говоря, не является. Структура дискретного модуля может быть достаточно сложной. Тем не менее в данной работе установлена теорема о том, что в

случае коммутативной области целостности R и проконечной группы G любой перестановочный RG -модуль M является свободным R -модулем как R -модуль над кольцом скаляров. В дальнейшем этот результат будет использован для изучения общего мультипликативного строения полей.

1. Транзитивно перестановочные модули конечных групп

Следуем [3, гл. 7]. Основные факты теории двойственности алгебр и групповых колец можно найти в [4].

Пусть G — конечная группа и R — коммутативная область целостности. Обозначим через RG групповую алгебру, отвечающую G . Используем самодвойственность групповых колец конечных групп, в частности $\widehat{RG}_{RG} = {}_{RG}RG$.

Правый регулярный модуль RG_{RG} считаем образующим транзитивно перестановочным модулем, каждый правый транзитивно перестановочный KG -модуль изоморфен фактору алгебры RG по правому разностному идеалу подходящей подгруппы $H \leq G$.

Двойственный левый регулярный модуль $\widehat{RG}_{RG} = {}_{RG}RG$ полагаем кообразующим транзитивно перестановочным модулем.

Любой транзитивно перестановочный левый G -модуль изоморфно вкладывается в некоторый подмодуль (правых) инвариантов $RG^H = RG \cdot H^+$ кообразующего модуля. Такой подмодуль V в групповой алгебре ${}_{RG}RG$ порождается элементом вида $H^+ = \sum_{h \in H} h \in RG$ для подходящей подгруппы $H \leq G$: $V = RGH^+$.

Подобным образом определяется подмодуль левых инвариантов ${}^H RG$. Отметим, что для нормальной подгруппы $N \triangleleft G$ имеется совпадение ${}^N RG = RG^N$. Это будет использоваться для удобства обозначений в доказательстве предложения 1.

Вложение транзитивно перестановочного модуля V в кообразующий называем коуниверсальным вложением, и обозначаем его через

$$\iota^H : V \cong RG \cdot H^+ = RG^H \hookrightarrow RG.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае нормальной подгруппы $N \triangleleft G$ будем использовать теорию двойственности модулей и отождествлять кообразующий модуль фактор-группы $\widehat{RG/N} = {}_{RG/N}RG/N$ с модулем правых инвариантов RG^N . Этот подмодуль образует ядро естественного эпиморфизма кообразующих модулей. Получаем точную строку кообразующих модулей:

$$0 \rightarrow \widehat{RG/N} \rightarrow \widehat{RG} \rightarrow \widehat{RN} \rightarrow 0.$$

Лемма 1. Пусть G — конечная группа и R — унитарное коммутативное кольцо. Рассмотрим подгруппы H и N этой группы. Если модули правых инвариантов этих подгрупп совпадают, $RG^H = RG^N$, то эти подгруппы одинаковые, $H = N$.

Это следует из того, что элементы $1 - N = \{1 - n \mid n \in N\}$ аннулируют N^+ . Поэтому из равенства $RG^H = RG^N$ вытекает, что $H^+(1 - N) = 0$. Значит, элементы подгруппы H переставляются при их умножении на любой $n \in N$. Тем самым $N \subseteq H$.

В этом рассуждении можно поменять H и N местами, поэтому также выполняется обратное включение. Результат леммы объясняет выраженную в замечании договоренность.

Рассмотрим подгруппы $H_2 \leq H_1 \leq G$ и коуниверсальные вложения $\iota^{H_1} : RG^{H_1} \hookrightarrow RG$ и $\iota^{H_2} : RG^{H_2} \hookrightarrow RG$. Тогда ι^{H_1} пропускается через сквозное вложение модулей $\iota_{H_2}^{H_1} : RG^{H_1} \hookrightarrow RG^{H_2}$, для которого $\iota^{H_2} \circ \iota_{H_2}^{H_1} = \iota^{H_1}$. Это вложение называем *коуниверсальным вложением транзитивно перестановочных модулей*.

2. Пермутационные модули проконечных групп

Далее следуем [5, 6]. Рассматриваем произвольную бесконечную проконечную группу G . Через $\mathcal{S}$ обозначаем некоторое направленное семейство открыто-замкнутых нормальных подгрупп конечного индекса этой группы, образующее фундаментальную систему окрестностей единицы. Группа представляется обратным пределом конечных фактор-групп: $G = \varprojlim_{N \in \mathcal{S}} G/N$.

Транзитивно перестановочным RG -модулем M называем такой дискретный RG -модуль, который получается объединением N -инвариантных транзитивно перестановочных RG/N -модулей M_N для $N \in \mathcal{S}$: $M = \bigcup_{N \in \mathcal{S}} M_N$.

Перестановочным RG -модулем называется прямая сумма некоторых транзитивно перестановочных RG -модулей.

Рассмотрим двойственный пополненному групповому кольцу $R[[G]]$ дискретный модуль $\widehat{R[[G]]} = \varprojlim_{N \in \mathcal{S}} \widehat{RG/N}$. Этот модуль называем *кообразующим транзитивно перестановочным модулем проконечной группы G над областью коэффициентов R* , кратко, *кообразующим модулем (проконечной группы G)*.

В этом определении для каждой подгруппы $N \in \mathcal{S}$ отождествляем левый G/N -модуль $\widehat{RG/N}$ с модулем $\widehat{RG/N} = \widehat{RG}^N$. Направленная система при вычислении этого прямого предела образована коуниверсальными вложениями $\iota_{N_2}^{N_1}$ транзитивно перестановочных модулей.

Рассмотрим замкнутую подгруппу H проконечной группы G . Для каждой подгруппы $M \in \mathcal{S}$ определим замкнутую подгруппу $H_M = HM$, аппроксимирующую H . Тогда подгруппа представляется пересечением: $H = \bigcap_{M \in \mathcal{S}} H_M$.

Определим подмодуль кообразующего модуля — дискретный модуль $\widehat{R[[G]]}^H = \varprojlim_{M \in \mathcal{S}} \widehat{RG/M}^{H_M/M}$. Его называем *модулем (правых) H -инвариантов*.

Определенное при этом вложение $\iota^H : \widehat{R[[G]]}^H \rightarrow \widehat{R[[G]]}$ называем *коуниверсальным вложением модуля H -инвариантов в кообразующий модуль*.

Введенная терминология оправдывается следующим утверждением.

Предложение 1. Пусть R — коммутативная область целостности, а G — бесконечная проконечная группа. Рассмотрим произвольный транзитивно перестановочный RG -модуль M . Тогда в группе G найдется замкнутая подгруппа $H \leq G$, для которой модуль H -инвариантов $(\widehat{R[[G]]})^H$ кообразующего модуля $\widehat{R[[G]]}$ оказывается изоморфным RG -модулю M : $M \cong (\widehat{R[[G]]})^H$.

Доказательство. Используем локальную структуру дискретного модуля, установим утверждение предложения локально для каждой подгруппы $N \in$

$\mathcal{S}$. Представим модуль M объединением инвариантных подмодулей: $M = \bigcup_{N \in \mathcal{S}} M_N$.

Кообразующий модуль $\widehat{R[[G]]}$ представляется подобным образом. Для нормальных подгрупп конечного индекса $N \in \mathcal{S}$ получается объединение транзитивно перестановочных модулей конечных групп $\widehat{R[G/N]}$: $\widehat{R[[G]]} = \varinjlim_{N \in \mathcal{S}} \widehat{R[G/N]}$.

Выбираем $N \in \mathcal{S}$. Фактор-группа G/N образует конечную группу, а на модуле инвариантов M_N действие подгруппы N неподвижное. Разностный левый идеал $RG(1 - N)$ пополненной групповой алгебры попадает в ядро действия на модуле M_N . Тем самым этот модуль имеет естественную структуру пермутационного RG/N -модуля над конечной группой G/N . Будем рассматривать его с этой структурой.

По определению каждый модуль инвариантов M_N представляется в виде $M_N = (\widehat{RG/N})^{(H_N/N)}$ для некоторой промежуточной подгруппы H_N с условием $G \supseteq H_N \supseteq N$. Получаем замкнутую подгруппу конечного индекса в проконечной группе G .

Это позволяет определить отображение

$$\mathcal{H} : N \in \mathcal{S} \rightarrow H_N,$$

каждой подгруппе $N \in \mathcal{S}$ сопоставляющее максимальную подгруппу $H_N \leq G$, для которой $M_N = (\widehat{R[G/N]})^{(H_N/N)}$. Такая подгруппа будет замкнутой подгруппой конечного индекса в проконечной группе G .

Заметим, что это отображение монотонно: для любых двух подгрупп из $\mathcal{S}$ с отношением включения $N_1 \subseteq N$ выполняется неравенство $H_{N_1} \subseteq H_N$.

В самом деле, рассмотрим нормальные подгруппы из семейства $\mathcal{S}$ с отношением включения $N_1 \leq N$. Используем коуниверсальное вложение $\iota_{N_1}^N : \widehat{RG/N} \hookrightarrow (\widehat{RG/N_1})^N \leq \widehat{RG/N_1}$, отождествляем транзитивно перестановочный модуль $\widehat{RG/N}$ с модулем N -инвариантов в алгебре $\widehat{RG/N_1}$ и полагаем $\widehat{RG/N} = (\widehat{RG/N_1})^N = {}^N(\widehat{RG/N_1})$. Это представляет кообразующий модуль $\widehat{R[[G]]}$ объединением цепей таких коуниверсальных вложений и позволяет представить инвариантные модули в виде подмодулей двойственного модуля конечной фактор-группы $\widehat{RG/N_1}$:

$$M_N = (\widehat{RG/N})^{H_N/N} = (\widehat{RG/N_1})^{NH_N/N_1}, \quad M_{N_1} = (\widehat{RG/N_1})^{H_{N_1}/N_1}.$$

С другой стороны, по условию согласованности в определении дискретного модуля выводим равенство

$$M_N = {}^N M_{N_1} = {}^N (\widehat{RG/N_1})^{H_{N_1}/N_1} = (\widehat{RG/N_1})^{NH_{N_1}/N_1}.$$

По лемме 1 заключаем, что $H_N = NH_{N_1}$. Значит, $H_N \supseteq H_{N_1}$, что доказывает монотонность отображения $\mathcal{H}$.

В силу монотонности отображение $\mathcal{H}$ определяет направленную систему вложенных замкнутых подгрупп в компактной проконечной группе G . Для завершения доказательства достаточно выбрать замкнутую подгруппу $H = \bigcap_{N \in \mathcal{S}} H_N$. Предложение 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае нормальной замкнутой подгруппы $N \triangleleft G$ будем использовать двойственность и отождествлять кообразующий модуль фактор-группы $\widehat{R[[G/N]]}$ с модулем правых инвариантов $\widehat{R[[G]]}^N$.

Этот подмодуль образует ядро естественного эпиморфизма кообразующих модулей. Используем определение кообразующего и по замечанию 1 определим точную строку кообразующих модулей:

$$0 \rightarrow R[\widehat{[G/N]}] \rightarrow \widehat{R[[G]]} \rightarrow \widehat{R[[N]]} \rightarrow 0.$$

3. Цепи нормальных подгрупп

Обозначим через $w = w(G)$ вес бесконечной проконечной группы G , минимальную мощность базы топологии группы G . Из общей теоремы о цепях про- $\mathcal{C}$ -групп (см. [6, теорема 2.6.4]) вытекает свойство бесконечных цепей нормальных подгрупп проконечных групп.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В бесконечной проконечной группе G для любого порядкового числа μ мощности не меньше веса группы, $|\mu| \geq w$, найдется цепь нормальных замкнутых подгрупп, занумерованных всеми порядковыми числами до числа μ включительно:

$$G = G_0 \geq \dots \geq G_\mu = e,$$

с тем условием, что в этой цепи для любого предельного порядкового числа $\alpha \leq \mu$ выполняется соотношение $G_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} G_\beta$. Если это число не предельное,

$\alpha = \beta + 1$, то группа G_α образует нормальную подгруппу конечного индекса в группе G_β . При этом наименьшая длина такой цепи выражается начальным порядковым числом μ мощности веса группы w . Такая цепь получается пересечением семейств подгрупп из $\mathcal{S}$.

Кроме того, для этой цепи при любом $\delta < \mu$ фактор-группа G/G_δ имеет меньший вес: $w(G/G_\delta) < w = w(G)$.

Лемма 2. Предположим, что бесконечная проконечная группа G имеет счетный вес, $w(G) = \aleph_0$. По замечанию 3 выберем невозрастающую счетную цепь нормальных делителей $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_\omega = e$ группы G наименьшей длины. Каждая подгруппа G_i , $i < \omega$, образует замкнутую (и открытую) подгруппу конечного индекса в группе G . Система этих подгрупп образует базу окрестностей единицы группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 2.1.5(b) в [6]. Там утверждается, что если в проконечной группе G задано семейство открытых подгрупп $U = \{U_i, i \in I\}$, которое отделяет единицу: $\bigcap_{i \in I} U_i = e$, то дополнение этого семейства конечными пересечениями подгрупп $\overline{U} = \left\{ \bigcap_{i \in J} U_i \mid J - \text{конечное подмножество из } I \right\}$ приводит к фундаментальной системе окрестностей единицы группы G .

В условиях леммы система подгрупп $U = \{G_i \mid i = 0, 1, \dots\}$ отделяет единицу. Ее подгруппы образуют линейно упорядоченное по включению множество, поэтому $\overline{U} = U$. Отсюда следует

Предложение 2. Рассмотрим бесконечную проконечную группу G веса w . По замечанию 3 выберем некоторую цепь нормальных замкнутых подгрупп этой группы наименьшей длины: $G = G_0 \geq \dots \geq G_\mu = e$. Используем коуниверсальное вложение и определим по этой цепи неубывающую башню коуниверсальных вложений кообразующих модулей:

$$R \cong R[\widehat{[G/G_0]}] \leq \dots \leq R[\widehat{[G/G_\mu]}] = \widehat{R[[G]]}.$$

Рассмотрим замкнутую подгруппу $H \leq G$. Для каждого порядкового числа $\alpha < \mu$ пусть $H_\alpha = HG_\alpha/G_\alpha$ — замкнутая подгруппа фактор-группы G/G_α . Определим башню коуниверсальных вложений модулей инвариантов:

$$R \cong R[\widehat{G/G_0}]^{H_0} \leq \dots \leq R[\widehat{G/G_\mu}]^{H_\mu} = \widehat{R[G]}^H.$$

Утверждается, что подмодуль H -инвариантов кообразующего модуля группы $\widehat{R[G]}^H$ получается объединением начального сегмента башни дискретных RG -модулей: $\widehat{R[G]}^H = \bigcup_{\alpha < \mu} R[\widehat{G/G_\alpha}]^{H_\alpha}$.

В самом деле, из определения подмодуля инвариантов следует, что достаточно проверить это утверждение в случае $H = e$. Докажем, что кообразующий модуль группы получается объединением уже начального промежутка башни дискретных RG -модулей индукцией по весу группы.

Вначале рассмотрим случай группы счетного веса, $w = \aleph_0$. Длина цепи подгрупп μ является начальным порядковым числом мощности веса группы, $|\mu| = w$. В этом случае $\mu = \omega$ и имеем невозрастающую счетную цепь нормальных делителей $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_\omega = e$ группы G наименьшей длины. Каждая подгруппа G_i , $i < \omega$, образует замкнутую (и открытую) подгруппу конечного индекса в группе G .

По лемме 2 система этих подгрупп образует базу окрестностей единицы группы G . Поэтому группу G можно представить обратным пределом по этой системе окрестностей: $G = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G/G_i$. В этом случае утверждение следует из определения кообразующего.

Рассмотрим общий случай группы G несчетного веса w . Порядковое число μ — начальное порядковое число, которое является предельным порядковым числом. Значит, $\mu = \bigcup_{\delta < \mu} \delta$. Для каждого $\delta < \mu$ вес фактор-группы G/G_δ меньше веса группы, $w(G/G_\delta) < w(G)$. Для этой группы утверждение выполняется по предположению индукции:

$$R[\widehat{G/G_\delta}] = \bigcup_{\alpha < \delta} R[\widehat{G/G_\alpha}].$$

Для доказательства следует убедиться, что все эти подмодули кообразующего модуля $\widehat{R[G]}$ образуют его покрытие.

По определению кообразующего модуля $\widehat{R[G]}$ он покрывается подмодулями $\widehat{RG/N}$ для $N \in \mathcal{S}$. Заметим, что подмодули $\widehat{RG/N}$, в свою очередь, покрываются подмодулями $R[\widehat{G/G_\alpha}]$, $\alpha < \delta$.

В самом деле, по построению цепи подгрупп для произвольной подгруппы $N \in \mathcal{S}$ найдется $\delta < \mu$, для которого $G_\delta \subseteq N$. По определению коуниверсального вложения каждый модуль $\widehat{RG/N} = \widehat{R[G]}^N$ образует подмодуль модуля $R[\widehat{G/G_\delta}] = \widehat{R[G]}^{G_\delta}$.

Следовательно, кообразующий модуль $\widehat{R[G]}$ покрывается подмодулями $R[\widehat{G/G_\alpha}]$, $\alpha < \mu$. Это доказывает утверждение и в общем случае. Предложение 2 доказано.

4. Скалярная свобода кообразующего модуля

Предложение 3. Рассмотрим коммутативную область целостности R и бесконечную проконечную группу G . Определим кообразующий транзитивно перестановочный RG -модуль $R[\widehat{G}]$. Он является свободным R -модулем как R -модуль над кольцом скаляров. При этом мощность его свободного базиса совпадает с локальным весом группы: $\dim_R(\widehat{R[\widehat{G}]}) = w(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем начальное порядковое число μ мощности веса группы, $|\mu| = w = w(G)$. По замечанию 3 определим цепь замкнутых нормальных подгрупп группы G длины μ :

$$G = G_0 \geq \dots \geq G_\mu = e. \quad (1)$$

На каждом шаге $\delta < \mu$ этой цепи происходит сужение подгрупп $G_\delta \geq G_{\delta+1}$, выделяется подгруппа конечного индекса. При этом если δ — предельное порядковое число, то $G_\delta = \bigcap_{\alpha < \delta} G_\alpha$.

Используем замечание 2 и по этой цепи определим неубывающую башню коуниверсальных вложений кообразующих модулей:

$$R = R[\widehat{G/G_0}] \leq \dots \leq R[\widehat{G/G_\delta}] \leq R[\widehat{G/G_{\delta+1}}] \leq \dots \leq R[\widehat{G/G_\mu}] = \widehat{R[\widehat{G}]}.$$

По предложению 2 выполняется равенство $\widehat{R[\widehat{G}]} = \bigcup_{\delta < \mu} R[\widehat{G/G_\delta}]$.

Для каждого порядкового числа $\delta < \mu$ построим свободный базис B_δ модуля $R[\widehat{G/G_\delta}]$ в этой башне так, чтобы при любом $\alpha < \delta$ выполнялось равенство $B_\delta \cap R[\widehat{G/G_\alpha}] = B_\alpha$. Тогда эти множества образуют возрастающую цепь

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_\delta \subseteq B_{\delta+1} \subseteq \dots \subseteq B_\mu.$$

Отсюда следует утверждение предложения.

Строим базис B по порядку. Вначале полагаем $B_0 = \emptyset$, тогда по определению это базис начального модуля $R = R[\widehat{G/G_0}]$. Если уже построен свободный базис B_δ модуля $R[\widehat{G/G_\delta}]$, то дополняем его до свободного базиса $B_{\delta+1} = B_\delta \cup A_\delta$ модуля $R[\widehat{G/G_{\delta+1}}]$ следующим образом.

В цепи замкнутых нормальных подгрупп (1) выделим подгруппы $G \supseteq G_\delta \supseteq G_{\delta+1}$. Они определяют эпиморфизм проконечных групп $G/G_{\delta+1} \rightarrow G/G_\delta$ и точную строку групп:

$$e \rightarrow G_\delta/G_{\delta+1} \rightarrow G/G_{\delta+1} \rightarrow G/G_\delta \rightarrow e.$$

По замечанию 2 это определяет точную строку кообразующих модулей:

$$0 \rightarrow R[\widehat{G/G_\delta}] \rightarrow R[\widehat{G/G_{\delta+1}}] \rightarrow R[\widehat{G_\delta/G_{\delta+1}}] \rightarrow 0.$$

Фактор-группа $G_\delta/G_{\delta+1}$ — конечная группа, и модуль $R[\widehat{G_\delta/G_{\delta+1}}]$ образует свободный R -модуль. Такой модуль проективен, значит, подмодуль $R[\widehat{G/G_\delta}]$ дополняется до модуля $R[\widehat{G/G_{\delta+1}}]$ подходящим свободным слагаемым. Пусть A_δ — базис этого слагаемого. Тогда $B_{\delta+1} = B_\delta \cup A_\delta$ — требуемое дополнение базиса.

Это построение определяет базис B_δ для неопредельных порядковых чисел $\delta < \mu$. В случае предельного δ полагаем $B_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} B_\alpha$.

Для заключительной оценки размерности следует обратить внимание на то, что скачки в цепи нормальных подгрупп (1) взаимно однозначно соответствуют скачкам в башне коуниверсальных вложений кообразующих модулей. Предложение 3 доказано.

Следствие 1. Рассмотрим коммутативную область целостности R и проконечную группу G . Определим кообразующий транзитивно перестановочный RG -модуль $\widehat{R[[G]]}$. Рассмотрим замкнутую подгруппу $H \leq G$. Подмодуль H -инвариантов кообразующего модуля $\widehat{R[[G]]}^H$ является свободным R -модулем как R -модуль над кольцом скаляров.

Следуем доказательству предложения 3. Однако рассматриваем башню вложений H -инвариантов кообразующего модуля:

$$\begin{aligned} R = \widehat{R[[G/G_0]]}^H &\leq \cdots \leq \widehat{R[[G/G_\delta]]}^H \leq \widehat{R[[G/G_{\delta+1}]]}^H \\ &\leq \cdots \leq \widehat{R[[G/G_\mu]]}^H = \widehat{R[[G]]}^H. \end{aligned}$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству предложения 3.

5. Скалярная свобода пермутационного модуля

Теорема 1. Рассмотрим коммутативную область целостности R и проконечную группу G . Любой перестановочный RG -модуль M является свободным R -модулем как R -модуль над кольцом скаляров.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную область целостности R и проконечную группу G . Покажем, что любой перестановочный RG -модуль M является свободным R -модулем как R -модуль над кольцом скаляров.

В случае конечной группы G утверждение следует из определения перестановочного RG модуля. Далее предполагаем, что группа G бесконечная.

Вначале установим утверждение для транзитивно перестановочного RG -модуля M проконечной группы G . По предложению 1 для подходящей замкнутой подгруппы $H \leq G$ этот модуль изоморфен подмодулю H -инвариантов $M \cong (\widehat{R[[G]]})^H$ кообразующего RG -модуля $\widehat{R[[G]]}$. Он является свободным R -модулем по следствию 1. Поэтому в случае транзитивно перестановочного модуля M утверждение теоремы справедливо.

В общем случае перестановочный модуль M — прямая сумма транзитивно перестановочных (по доказанному выше) свободных R -модулей. Такой модуль свободный. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев К. Н. Алгебраические группы и экспоненциальное действие // Изв. вузов. Математика. 1991. Т. 7. С. 58–61.
2. Пономарев К. Н. О действии группового кольца группы автоморфизмов поля // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 162–168.
3. Karpilovsky G. Induced modules over group algebras. Amsterdam; New York; Oxford; Tokyo: North-Holland, 1990. (North-Holland Math. Stud.).
4. Фейт У. Теория представлений конечных групп. М.: Наука, 1990.
5. Кох Х. Теория Галуа p -расширений. М.: Мир, 1973.

6. Ribes L., Zalesskii P. Profinite groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2010.

Статья поступила 14 октября 2016 г.

Пономарев Константин Николаевич
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
ponomaryov@ngs.ru