Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 512.552.5+512.572

ТОЖДЕСТВА МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Изучаются метабелевы альтернативные, в частности, ассоциативные алгебры над полем характеристики 0. Построены аддитивные базисы свободных алгебр указанных многообразий, описаны некоторые центры этих алгебр, вычислены значения последовательности коразмерностей соответствующих T-идеалов, найдены унитарно неприводимые компоненты разложения указанных многообразий в объединение и их базисы тождеств, в частности, найден базис тождеств метабелевой альтернативной алгебры Грассмана. Доказано, что свободная алгебра многообразия, порожденного метабелевой альтернативной алгеброй Грассмана, имеет нулевой ассоциативный центр.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.416

Ключевые слова: свободная алгебра, метабелева алгебра, центр алгебры, последовательность коразмерностей T-идеала, объединение многообразий.

70-летию со дня рождения
Ивана Павловича Шестакова посвящается

Введение

Согласно теореме Артина алгебра является *альтернативной* тогда и только тогда, когда все ее 2-порожденные подалгебры ассоциативны. Альтернативная алгебра называется *метабелевой*, если в ней выполнено коммутаторное тождество

$$[[xy][zt]] = 0. \tag{1}$$

В работе рассматриваются алгебры над полем Φ характеристики 0, хотя многие результаты справедливы для алгебр над бесконечным полем характеристики $\neq 2, 3$.

Отметим, что для альтернативных алгебр случай характеристики 3 особый. Так, в [1] доказано существование первичных вырожденных алгебр (всякая такая алгебра 2-энгелева, значит, метабелева [2]), в [3] указаны элементы порядка 3 в свободном альтернативном кольце, в [4, 5] найдены бесконечные системы независимых тождеств, выполняющиеся в разрешимых альтернативных алгебрах.

Над полями конечной характеристики существуют бесконечно базируемые T-пространства ассоциативных алгебр с тождеством $[xyz] = 0$ и даже бесконечно базируемые T-идеалы (см. [6–8]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00756).

Целью работы является изучение метабелевых альтернативных, в частности, ассоциативных алгебр. По тематике эта работа наиболее близка к статьям [9–25]. Основные задачи, решаемые в работе, связаны с построением аддитивных базисов свободных алгебр, описанием их центров, вычислением коразмерностей T-идеалов, разложением многообразий в объединение и нахождением базисов тождеств.

Работа состоит из пяти параграфов. В § 1 содержатся известные результаты, и он носит предварительный характер. В § 2 доказываются вспомогательные тождества, выполняющиеся в метабелевых альтернативных алгебрах. Кроме того, в нем построен аддитивный базис свободной метабелевой ассоциативной алгебры (отметим, что в [14] построен аддитивный базис относительно свободной ассоциативной алгебры с тождеством $[xyz] = 0$). В качестве применений построенного базиса указано разложение многообразий Ass_2 метабелевых ассоциативных алгебр в объединение, а также доказано, что ядро свободной метабелевой ассоциативной алгебры как T-пространство порождается элементом $[xy]^2$.

Если P_n — полилинейная компонента свободной ассоциативной алгебры $\mathrm{Ass}[X]$ и T — ее T-идеал (или вербальный идеал), то положим $T_n = P_n \cap T$. Важной числовой характеристикой T-идеала T является последовательность коразмерностей $c_n(T)$. Известно, что

$$c_n(T^{(3)}) = 2^{n-1} \text{ (см. [11])}, \quad c_n(T^{(4)}) = 2^{n-1} + 2\mathrm{C}_n^4 + 2\mathrm{C}_n^3 \text{ (см. [13])},$$

где $T^{(n)} = ([x_1, \dots, x_n])^T$ — T-идеал, порожденный коммутатором степени n, C_n^m – биномиальные коэффициенты. В § 2 найдены значения коразмерностей тождества метабелевости:

$$c_n(\mathrm{Ass}_2) = (n-1)2^{n-1} + 2\mathrm{C}_n^4 - \mathrm{C}_n^2 + 1.$$

Пусть Alt_2 — многообразие метабелевых альтернативных алгебр. В § 3 строится аддитивный базис свободной метабелевой альтернативной супералгебры, порожденной одним нечетным элементом. Необходимо отметить, что в [21] построен базис свободной альтернативной супералгебры, порожденной одним нечетным элементом, из которого можно получить результаты § 3 (метабелевость значительно упрощает ситуацию). В § 4 построен аддитивный базис свободной метабелевой альтернативной алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$ и найдены размерности полилинейных компонент ассоциаторного идеала $d_n = \dim_\Phi D(\mathrm{Alt}_2[X]) \cap P_n$ алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$, а именно

$$d_n = n(n-2)2^{n-4} - 2\mathrm{C}_n^3 + 2\mathrm{C}_n^2 - 2\mathrm{C}_n^1 \quad \text{при } n \geq 5.$$

В § 5 обсуждаются некоторые применения построенного базиса. Во-первых, описаны центры свободной алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$. Во-вторых, указаны унитарно неприводимые компоненты разложения многообразия Alt_2 в объединение:

$$\mathrm{Alt}_2 = \mathrm{var}(A_1) + \mathrm{var}(A_2) + \mathrm{var}(A_3),$$

где $A_1 = T_2$ — алгебра треугольных матриц 2-го порядка, $A_2 = V_2$ — алгебра Воличенко и $A_3 = G(\mathrm{Alt}_2)$ — алгебра Грассмана многообразия Alt_2. В-третьих, описаны тождества алгебры $G(\mathrm{Alt}_2)$. Наконец, доказано, что ассоциативный центр алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$ совпадает с идеалом тождеств алгебры $G(\mathrm{Alt}_2)$ и свободная алгебра многообразия $\mathrm{var}\, G(\mathrm{Alt}_2)$ является алгеброй без центра. В связи с этим отметим, что в [17] построен пример альтернативной алгебры с нулевым ассоциативным центром, которая не локально нильпотентная. Тем самым указанным свойством может обладать относительно свободная альтернативная алгебра. Показано, что в многообразии Alt_2 всякая алгебра с нулевым ассоциативным центром над полем конечной характеристики $p \geq 5$ локально нильпотентна.

Прежде чем переходить к основному содержанию работы, отметим, что термин «метабелевость» использовался ранее для алгебр, удовлетворяющих другим тождествам: $(xy)(zt) = 0$ (см. [4, 22]) и $[xyz] = 0$ (см. [14]).

§ 1. Обозначения и известные тождества

1.1. Обозначения. Как обычно, если $a, b, c \in A$, то $[ab] = ab - ba$ — коммутатор элементов a, b, $a \circ b = ab + ba$, $a \bullet b = \frac{1}{2} a \circ b$ — йордановы произведения, $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c, $(a, b, c)^+$ — ассоциатор в присоединенной алгебре $A^+ = (A; +, \bullet)$.

Через A^- обозначается алгебра, присоединенная к A относительно коммутирования. Если алгебра A альтернативна, то A^- — *алгебра Мальцева*, т. е. антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству

$$J(x, y, yz) = J(x, y, z)y,$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан элементов x, y, z.

Если $X \subset A$, то обозначим через $\mathrm{span}_A(X)$, $\mathrm{alg}_A(X)$, $\mathrm{idl}_A(X)$ соответственно подпространство, подалгебру и идеал, порожденные множеством X в алгебре A, $A^\#$ — алгебра, полученная из A внешним присоединением единицы.

Всюду ниже $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, причем предполагается, что они упорядочены по возрастанию индексов. Если не оговорено противное, то многочлены предполагаются полилинейными и зависящими от переменных из X_n. Через $P_n(A)$ обозначается пространство в свободной алгебре A, порожденное многочленами от X_n. Свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathfrak{M}$ обозначается через $\mathfrak{M}[X]$ или через $F_{\mathfrak{M}}[X]$. Далее, $F_A[X]$ — свободная алгебра над X в многообразии $\mathrm{var}(A)$, порожденном A.

Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *унитарно замкнутым*, если $(\forall A) A \in \mathfrak{M} \Rightarrow A^\# \in \mathfrak{M}$. Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто. Тогда многочлен $f \in \mathfrak{M}[X]$ называется *собственным*, если $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ для любого $x \in X$. Все собственные многочлены относительно свободной алгебры A образуют подалгебру, которую обозначим через A_0. Пространство собственных многочленов, содержащихся в $P_n(A)$, обозначим через $\Gamma_n(A) = P_n(A) \cap A_0$.

Всякое унитарно замкнутое многообразие алгебр над полем характеристики 0 может быть задано системой полилинейных собственных многочленов.

Многообразия ассоциативных, альтернативных, лиевых и мальцевских алгебр обозначаются через $\mathrm{Ass}, \mathrm{Alt}$, Lie, Malc соответственно. Многообразие метабелевых алгебр, содержащихся в $\mathfrak{M}$, обозначается в работе через $\mathfrak{M}_2$.

1.2. Известные тождества. Напомним [26, 27], что в альтернативной алгебре A выполнены следующие тождества:

$$[x \circ y, a] = x \circ [ya] + [xa] \circ y, \tag{2}$$

$$[xy, a] = x[ya] + [xa]y + 3(x, y, a), \tag{3}$$

$$[xyz] + [yzx] + [zxy] = 6(x, y, z), \tag{4}$$

$$(x,a,b)\circ[ab]=0, \tag{5}$$
$$([xy],a,b)+2(x,y,[ab])=[x,(y,a,b)]+[(x,a,b),y], \tag{6}$$
$$2[(x,y,z),a]=([xy],z,a)+([yz],x,a)+([zx],y,a), \tag{7}$$
$$[xyzt]+[yztx]+[ztxy]+[txyz]=[xy[zt]], \tag{8}$$

где через $[xyz]$, $[xyzt]$, $[xy[zt]]$ обозначают, как обычно, правонормированные коммутаторы.

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются следующие обозначения:

$$U(A)=[A,A],\quad A'=\mathrm{idl}(U),\quad W=[U,A],\quad \overline{W}=\mathrm{idl}(W),$$
$$V(A)=(A,A,A),\quad D(A)=\mathrm{idl}(V),\quad Q=\mathrm{span}\{[ab]^2\mid a,b\in A\}.$$

Для центров алгебры A используются следующие обозначения: $N_{\mathrm{Comm}}(A) = \{n\in A\mid(\forall a\in A)[na]=0\}$ — коммутативный центр, $N_{\mathrm{Ass}}(A)=\{n\in A\mid (\forall a,b\in A)(n,a,b)=0\}$ — ассоциативный центр, $N_{\mathrm{Eng}}(A)=\{n\in A\mid(\forall a\in A)[naa]=0\}$ — 2-энгелев центр, $Z(A)=N_{\mathrm{Comm}}(A)\cap N_{\mathrm{Ass}}(A)$ — центр, $C^*(A)$ — сумма идеалов алгебры A, содержащихся в центре $C(A)$, $C^*(A)$ — С-ядро.

Далее, $N_{\mathrm{Comm}}(A)=Z(A)$ ввиду (4) и $Z^*(A)\subseteq \mathrm{Ann}(A')$ ввиду (3). Ясно, что $A'=UA^{\#}$.

1.3. Правильные V-слова. Всюду далее через A обозначается *метабелева альтернативная алгебра над полем* Φ *характеристики* 0. Ясно, что A^- — метабелева алгебра Мальцева.

Пусть $x\overline{yz}=(xy)z+(xz)y$ — симметризация элемента $(xy)z$ по переменным y,z. Если $f(a,b,c)$ — полилинейный многочлен, то положим

$$\sum_{a,b,c} f(a,b,c)=f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b).$$

Известно [28], что всякий многочлен над X_n, содержащийся в якобиане алгебры $\mathrm{Malc}_2[X]$, является линейной комбинацией правильных J-слов, в которых недостающие скобки расставлены правонормированным образом (это соглашение действует и далее):

$n=3$: $J(x_1,x_2,x_3)$;

$n=4$: $J(x_2x_3,x_4,x_1)$, $J(x_1x_p,x_q,x_r)$, $q<r$;

$n=5$: $J(x_1(x_2x_3),x_4,x_5)$, $J(x_1\overline{x_2x_3},x_4,x_5)$, $J(J(x_p,x_2,x_3),x_q,x_r)$, $q<r$;

$n\geq 6$: $J(x_1(x_2x_3)x_4\ldots x_{n-2},x_{n-1},x_n)$, $J(x_1\overline{x_2x_3}x_4\ldots x_{n-2},x_{n-1},x_n)$; $J(J(a,x_2,x_3)y_1\ldots y_{n-5},y_{n-4},y_{n-3})$, $a,y_i\in X_n$, $y_1<\dots<y_{n-3}$.

Известно, что правильные J-слова линейно независимы.

Определение. *Правильными V-словами* алгебры A над X_n назовем следующие многочлены:

$n=3$: (x_1,x_2,x_3);

$n=4$: $d_1=([x_1x_2],x_3,x_4)$, $d_1^{\mathrm{Id}+(13)}$, $d_1^{\mathrm{Id}+(23)}$, $d_1^{\mathrm{Id}+(24)}$, где (ij) — транспозиция чисел i,j и $d_1^{\mathrm{Id}+(24)}$ — симметризация d_1 по x_2,x_4;

$n=5$: $d_1=([x_1x_2x_3],x_4,x_5)$, $d_2=([x_1[x_2x_3]],x_4,x_5)$, $d_i=d_1^{\mathrm{Id}+(2,i)}$ ($i=3,4,5$);

$n\geq 6$: $d_0=([x_1x_2\ldots x_{n-2}],x_{n-1},x_n)$, $d_1=([x_1[x_2x_3]x_4\ldots x_{n-2}],x_{n-1},x_n)$, $d_i=d_0^{\mathrm{Id}+(2,i)}$ ($3\leq i\leq n$).

Покажем, что система правильных J-слов в алгебре A^- линейно эквивалентна системе правильных V-слов в A. Для $n=3,4$ утверждение верно в силу тождества (4).

Рассмотрим случай $n=5$. Для этого понадобится

Лемма 1 [28]. *Элементы* $([abx],y,z)$, $([x\overline{ab}],y,z)$ *кососимметричны по* x,y,z *в* A. *В частности,* $([xaa],a,y)=0$ *и* $\sum\limits_{a,b,c}([x\overline{ab}],c,y)=0$.

Пусть P — линейная оболочка элементов d_i $(i=1,\dots,5)$. Докажем, что каждое правильное J-слово длины 5 лежит в P. Ясно, что $([x_1[x_2x_3]],x_4,x_5)$, $([x_1\overline{x_2x_3}],x_4,x_5)\in P$.

Далее, в силу тождества (4) имеем

$$6(x_1,x_2,x_3)=2[x_1x_2x_3]-[x_1[x_2x_3]]-[x_1\overline{x_2x_3}],$$

откуда $((x_1,x_2,x_3),x_4,x_5)\in P$. Рассмотрим элемент $((x_4,x_2,x_3),x_1,x_5)$. Он является линейной комбинацией элементов $v_1=([x_2x_3x_4],x_1,x_5)$, $v_2=([x_3x_4x_2],x_1,x_5)$ и $v_3=([x_4\overline{x_2x_3}],x_1,x_5)$. В силу леммы 1 верно $v_1,v_3\in P$. Далее, по модулю P ввиду леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}v_2&=-([x_3x_2x_4],x_1,x_5)+([x_3\overline{x_2x_4}],x_1,x_5)\equiv-([x_1\overline{x_2x_4}],x_3,x_5)\\&=-([x_1x_2x_4],x_3,x_5)-([x_1x_4x_2],x_3,x_5)\equiv([x_1x_4x_3],x_2,x_5)=d_4.\end{aligned}$$

Точно так же $((x_5,x_2,x_3),x_1,x_4)\in P$. Случай $n\geq 6$ рассматривается аналогично.

Замечание. Количество правильных V-слов над множеством X_n равно n, если $n\geq 4$.

§ 2. Предварительные результаты

Всюду ниже, если не оговорено противное, $u,u'\in U$, $w,w_1,w_2\in W$, a,b,a_i, $x,y\in A$.

2.1. Вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Справедливы равенства* $(U,U,A)=(U,U,A)^+=0$. *В частности, подалгебра* $\mathrm{alg}_A(U)$ *ассоциативна и коммутативна.*

Доказательство. Поскольку $u,u'\in U$, то $(u,u',x)=0$ в силу тождеств (4) и (1). Второе равенство вытекает из доказанного соотношения и тождества $4(x,y,z)^+=2(y,x,z)+[y[xz]]$, выполняющегося в произвольной альтернативной алгебре [26, 27].

Следующая лемма является аналогом известной леммы Латышева [10] для метабелевой альтернативной алгебры A.

Лемма 3. *Элемент* $[ux][yz]$, *где* $u\in U$, *кососимметричен по* x,y,z *в алгебре* A.

Доказательство. На основании тождеств (1) и (2) имеем

$$2[ux][xy]=[ux]\circ[xy]=[u,x\circ[xy]]=[u,[x^2,y]]=0.$$

Лемма 4. *Верно соотношение* $[xy][xz]\in\overline{W}$.

Доказательство. Аналогично лемме 3 по модулю $\overline{W}$ получим

$$2[xy][xz]=[xy]\circ[xz]\equiv[[x,y]\circ x,z]=[[x^2,y],z]\equiv 0.$$

Лемма 5. *В алгебре A справедливы следующие соотношения:*
(а) $\overline{W} = WA^{\#} \subseteq U + U^2$;
(б) *идеал* $\overline{W}$ *тривиален, т. е.* $\overline{W}^2 = 0$, *в частности,* $D \cdot \overline{W} = \overline{W} \cdot D = 0$;
(в) *элемент* $[ux][y_1z_1]\dots[y_nz_n]$ *кососимметричен по* $x, y_1, z_1, \dots, y_n, z_n$.

Доказательство. (а) Заметим, что если $w \in W$, то модулю W справедливы сравнения

$$[wx] \equiv 0, (wx)y = w(xy) + (w, x, y) \equiv w(xy),$$

$$y(wx) \equiv (yw)x = (wy + [yw])x \equiv w(yx) + [yw]x.$$

Кроме того, $WA^{\#} \subseteq U + U^2$. Тем самым п. (а) доказан.

(б) По лемме 3 верно равенство $[ux][xy] = 0$, из которого ввиду (1) следует $[ux][u'y] = 0$, где $u' \in U$, т. е. $W^2 = 0$. Отсюда легко вывести тривиальность идеала $\overline{W}$. Действительно, для элементов $w_1, w_2 \in W$ ввиду правой альтернативности и леммы 2 имеем

$$(xw_1)w_2 = x(w_1w_2) = 0, \quad w_1(w_2y) = (w_1w_2)y = 0,$$

$$(xw_1)(w_2 \circ y) = (xw_1 \cdot w_2)y + (xw_1 \cdot y)w_2 = (xw_1 \cdot y)w_2 = 0,$$

$$2(xw_1)(w_2y) = (xw_1)([w_2y] + w_2 \circ y) = 0.$$

П. (в) вытекает из п. (б) и лемм 2 и 4.

Лемма 6. *В алгебре A выполнены следующие свойства:*
(а) $2[x, y]^2 = [x^2, y, y] - x \circ [x, y, y]$;
(б) $[x, y]^2 \in Z(A)$, *в частности, верно тождество Холла* $[[x, y]^2, z] = 0$.

Доказательство. (а) Пусть $u = [x, y]$. В силу тождества (2) имеем

$$2[x, y]^2 = [x, y] \circ u = [x \circ u, y] - x \circ [u, y] = [x^2, y, y] - x \circ [x, y, y].$$

(б) Ввиду тождеств (2), (4), (5), (1) и леммы 3 получим

$$[[x, y]^2, z] = [x, y] \circ [x, y, z] = [x, y] \circ \{6(x, y, z) - [y, z, x] - [z, x, y]\} = 0.$$

Значит, $[x, y]^2 \in N_{\mathrm{Comm}}(A) = Z(A)$.

Замечание. В связи с леммой 6 становится более ясным происхождение элементов Холла в ассоциативных алгебрах с тождеством лиевой нильпотентности (см. [25, 29]).

Лемма 7. *В алгебре A справедливы следующие соотношения:*

$$[xyy][xz] = 0, \tag{9}$$

$$[Uxx][yz] = 0, \tag{10}$$

$$[xyyx][ab] = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Прежде всего имеем

$$2[x, y, y][x, z] = -[x, y, z] \circ [x, y] = -[[x, y]^2, z] = 0.$$

Из (9) и леммы 5(б) вытекает (10).

Далее, ввиду леммы 3 и тождеств (1), (2), (9)

$$2[xyyx][ab] = 2[xyya][bx] = [xyya] \circ [bx] = [[xyy] \circ [bx], a] = 0.$$

Лемма 8. *В алгебре A имеет место* $[u, x, x] \in \mathrm{Ann}(A')$.

Доказательство. Поскольку $A' = UA^{\#}$, то $[uxx] \in \mathrm{Ann}(A')$ ввиду (10) и леммы 2.

Лемма 9. *Множество $Q(A)$ обладает следующими свойствами:*
(а) $Q(A)$ — *идеал в* A;
(б) $Q(A) \subseteq E(A)$;
(в) $Q(A) \subseteq Z^*(A)$.

Доказательство. Заметим, что $[ab] \circ [ac] \in Q$. Пусть $u = [ab]$. Тогда, учитывая лемму 2, по модулю Q имеем

$$2u^2 \circ x = u \circ [a, b] \circ x = u \circ ([a \circ x, b] - a \circ [x, b]) \equiv -u \circ a \circ [x, b] \equiv -[a^2, b] \circ [x, b] \equiv 0.$$

Отсюда в силу леммы 6(б) получаем, что $Q(A)$ — идеал в A.

Далее, $Q(A) \subseteq E(A)$ и $Q(A) \subseteq Z^*(A)$ на основании леммы 6.

Следующая лемма является обобщением известной леммы Воличенко [13] на случай метабелевых алгебр.

Лемма 10. *В ассоциативной метабелевой алгебре верно тождество*

$$[xyz][ab] = 0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что в силу (9) $[xy][xaa] = 0$. Отсюда имеем

$$[xy]\{[xab] + [xba]\} = 0.$$

Поскольку по лемме 3 $[xy][xu] = 0$, где $u \in U$, то

$$0 = [xy][x[ab]] = [xy]\{[xab] - [xba]\}.$$

Сравнивая два последних равенства, получаем $[xy][xab] = 0$. Из последнего равенства и леммы 3 вытекает, что $[xyy][ab] = -[xya][yb] = 0$. Отсюда в силу тождества Якоби получаем требуемое утверждение.

Замечание. В § 3 будет показано, что в альтернативной алгебре A нет подходящего аналога леммы 10, поскольку $(\forall m, n)\, \underbrace{[A \dots A]}_{m} U^n \neq 0$.

Лемма 11. *Пусть $U = [AA]$, $V = (A, A, A)$. Тогда*
(а) $((U, x, y), x, z) = 0$;
(б) $[Vxx] = 0$.

Доказательство п. (а) разобьем на ряд шагов.

1^0. $(u, u', x) = 0$, $[u, (x, y, z)] = 0$ ввиду леммы 2 и тождества (7).

2^0. $[(u, x, y), x] = 0$. Применяя тождества Муфанг и п. 1^0, имеем

$$[(u, x, y), x] = (u, x, [x, y]) = 0.$$

3^0. $[[(u, x, y), z], x] = 0$. В силу тождества (6)

$$([uz], x, y) + 2(u, z, [xy]) = [u, (z, x, y)] + [(u, x, y), z],$$

откуда $([uz], x, y) = [(u, x, y), z]$ по п. 1^0. Используя это тождество и п. 2^0, приходим к соотношению

$$[(u, x, y), z, x] = [([uz], x, y), x] = 0.$$

4^0. $((u, x, y), x, z) = 0$. Согласно тождеству (4) и пп. 2^0, 3^0 получаем

$$6((u, x, y), x, z) = [(u, x, y), x, z] - [(u, x, y), [xz]] - [(u, x, y), z, x] = 0.$$

(б) Ввиду (7) имеем $[(a, b, c), x] \in (U, A, x)$. Поскольку $[(u, x, y), x] = 0$ в силу п. 2^0, то $[Vxx] = 0$.

Лемма 12. *Верно включение* $[abxx] \subseteq N^*_{\mathrm{Ass}}(A)$.

Доказательство. Покажем сначала, что $[uxx] \in N(A)$, где $u \in U = [AA]$. Учитывая лемму 2 и тождество (7), имеем

$$([ux], b, c) + ([bu], x, c) = 2[(u, x, b), c],$$

откуда ввиду $[([bu], x, c), x] \in (U, x, [cx]) = 0$ получаем

$$[([u, x], b, c), x] = 2[[(u, x, b), c], x].$$

Далее, по лемме 11(а) и п. 2^0, а также тождествам (4) и (1) приходим к равенствам

$$[[(u, x, b), c], x] = -[[x, (u, x, b)], c] = 0,$$

следовательно,

$$[([ux], b, c), x] = 0. \tag{12}$$

Наконец, учитывая (6), (12) и лемму 11, п. 1^0, получаем $[uxx] \in N(A)$.

Осталось заметить, что ввиду леммы 8 $[uxx] \in \mathrm{Ann}(A') \subseteq \mathrm{Ann}(D(A))$. Поскольку верно равенство $N^*_{\mathrm{Ass}}(A) = \{n \in N(A) \mid n \cdot D(A) = 0\}$, лемма доказана.

2.2. Квадрат коммутатора. Рассмотрим линеаризацию элемента $[ab]^2$:

$$q(a, b, c, d) = [ab] \circ [cd] + [ac] \circ [bd].$$

Лемма 13. *Справедливы следующие свойства:*

(а) *элемент* $q(a, b, c, d)$ *симметричен по переменным* a, d *и по* b, c*; кроме того,*

$$q(a, b, c, d) = q(c, d, a, b) = q(b, a, d, c);$$

(б) $\sum\limits_{a,b,c} q(a, b, c, d) = 0$;

(в) $q(a, b, c, d) = 0$, *если одна из букв* a, b, c, d *содержится в* $U^n + \overline{W}$ $(n \geq 1)$;

(г) $q(a, b, c, x) \in Z^*(A)$;

(д) $q(a, b, c, d)$ — *дифференцирование по всем переменным.*

Доказательство. Пп. (а) и (б) немедленно вытекают из определения.

(в) Пусть $u \in U$. Тогда в силу леммы 3 $q(u, b, c, d) = [ub] \circ [cd] + [uc] \circ [bd] = 0$.

П. (г) вытекает из леммы 9.

(д) Преобразуем

$$\begin{aligned} &q(a^2, b, c, d) - q(a, b, c, d) \circ a \\ &\quad = [a^2, b] \circ [c, d] + [a^2, c] \circ [b, d] - ([a, b] \circ [c, d]) \circ a - ([a, c] \circ [b, d]) \circ a \\ &= \{[a^2, b] \circ [c, d] - ([a, b] \circ [c, d]) \circ a\} + \{[a^2, c] \circ [b, d] - ([a, c] \circ [b, d]) \circ a\} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку выражения, стоящие в фигурных скобках, на основании тождества (2) и леммы 2 равны 0, $q(a, b, c, d)$ является йордановым дифференцированием по каждой переменной. Отсюда и из пп. (в) и (г) получаем требуемое.

Лемма 14. *Верно включение* $D \subseteq N_{\mathrm{Eng}}(A)$.

Доказательство. Применяя дважды коммутаторное тождество (2), имеем

$$[v \circ a, x, x] = [[v, x] \circ a, x] + [v \circ [a, x], x] = 2[vx] \circ [ax] + v \circ [axx].$$

Первое слагаемое равно 0 в силу тождества (4) и леммы 3, второе — по лемме 5(б).

2.3. Базис свободной метабелевой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ass}_2[X]$.

Определение. *Регулярными элементами* над X_n назовем полилинейные многочлены следующих типов:

1) $q(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $q(x_1, x_2, x_4, x_3)$, если $n = 4$;
2) $[x_1 x_i x_{j_1} \dots x_{j_{n-2}}]$, где $j_1 < \dots < j_{n-2}$, $X_n = \{x_1, x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-2}}\}$, $n \geq 3$;
3) $[x_1 x_2] \dots [x_{2k-1} x_{2k}]$, где $n = 2k$.

Одночлен $u = x_1 x_2 \dots x_n$ над X_n назовем *правильным.*

Термины «регулярные элементы» и «правильные одночлены» сохраним и для их образов при гомоморфизмах $x_i \to x_{\varphi(i)}$, где $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — монотонное отображение натурального ряда.

Заметим, что регулярные элементы типа 2 образуют аддитивный базис свободной метабелевой алгебры Ли $\mathrm{Lie}_2[X]$ над полем характеристики 0 (см. [30]). Поскольку всякое собственное подмногообразие многообразия Lie_2 нильпотентно, Lie_2 неразложимо в объединение. Отметим также, что Lie_2 порождается 2-мерной неабелевой алгеброй Ли. Из [28] следует также разложение $\mathrm{Malc}_2 = \mathrm{Lie}_2 + \mathrm{var}(D^-)$, где D — алгебра Дорофеева.

Теорема 1. *Всякий полилинейный многочлен f алгебры $A = \mathrm{Ass}_2[X]$ однозначно представим в виде линейной комбинации элементов вида $f_0 \cdot u$, где f_0 — регулярный элемент, u — правильный одночлен.*

Доказательство. Из тождества (1) и лемм 5, 9, 10 и 13 легко следует, что всякий полилинейный многочлен f алгебры A является линейной комбинацией элементов $f_0 \cdot u$ (возможно, что $f_0 = 1$ или $u = 1$) (см. также [31]). Поскольку многообразие Ass_2 унитарно замкнуто, если в алгебре A линейно зависимы элементы вида $f_0 \cdot u$, то линейно зависимы и регулярные элементы. Итак, пусть

$$\sum_{i=1,2} \alpha_i f_i^{(1)} + \sum_{2 \leq i \leq n} \beta_i f_i^{(2)} + \gamma f^{(3)} = 0,$$

где $f_i^{(j)}$ — регулярные элементы типа $j = 1, 2, 3$. Заметим, что $f^{(3)} \neq 0$ в алгебре Грассмана. Элементы типа 1 и 2 являются тождествами алгебры Грассмана, следовательно, в алгебре A справедливо тождество

$$\sum_{i=1,2} \alpha_i f_i^{(1)} + \sum_{2 \leq i \leq n} \beta_i f_i^{(2)} = 0.$$

Подставляя вместо переменной x_i (при фиксированном значении i) элемент a, а вместо всех остальных переменных x_j $(j \neq i)$ — элемент b, получим

$$\beta_i [ab \dots b] = 0.$$

Далее, алгебра T_2 треугольных матриц 2-го порядка удовлетворяет тождеству $[ab][cd] = 0$, в частности, метабелева, но не энгелева, так как $[e_{12} e_{22}] = e_{12}$. Следовательно, $\beta_i = 0$.

Значит, в алгебре A линейно зависимы регулярные элементы типа 1, т. е.

$$\{[ab][cd] + [ac][bd]\} + \gamma\{[ab][dc] + [ad][bc]\} = 0. \tag{13}$$

Назовем *алгеброй Воличенко* V_2 свободную унитальную алгебру с тождеством $[abcd] = 0$ от двух свободных порождающих a, b. Заметим, что $[ab]^2 \neq 0$ в алгебре Воличенко V_2; действительно, в силу теоремы Пуанкаре — Бирхгофа — Витта элемент $[ab]^2$ не является линейной комбинацией коммутаторов степени 4.

Полагая $a = b$ в равенстве (13), имеем $[ac][ad] + \gamma[ad][ac] = 0$, откуда $\gamma = -1$. Если положить $b = c$ в равенстве (13), то получим $3[ab][bd] = 0$; противоречие.

В оставшейся части этого параграфа все рассматриваемые многообразия предполагаются унитарно замкнутыми.

Следствие 1. *Многообразие* Ass_2 *метабелевых ассоциативных алгебр является объединением многообразий, порожденных алгебрами* T_2 *треугольных матриц 2-го порядка, алгеброй Воличенко* V_2 *и алгеброй Грассмана* G.

Можно показать, что указанные компоненты разложения унитарно неприводимы, т. е. не разлагаются в объединение собственных унитарно замкнутых подмногообразий.

Следствие 2. *Пусть* $\{f\}^T$ — T*-пространство, порожденное* f. *Тогда*

$$Z^*(\mathrm{Ass}_2[X]) = \{[xy]^2\}^T, \quad Z(\mathrm{Ass}_2[X]) = \{[xy]\cdot[zt]\}^T.$$

Доказательство. Нетривиальная линейная комбинация

$$\sum_i \beta_i f_i^{(2)} v_i + \sum_i \gamma_i f_i^{(3)} v_i',$$

содержащая элементы $f_i^{(2)}$ типа 2, не является центральным элементом. Элемент $\sum\limits_i \gamma_i f_i^{(3)} v_i'$ централен тогда и только тогда, когда он является собственным (т. е. в этом представлении отсутствуют правильные одночлены v_i') и регулярные элементы $f_i^{(3)}$ типа 3 имеют степень ≥ 4. Наконец, если z централен, то $[a,b][c,d]z = [a,b][cz,d]$. Отсюда ввиду леммы 9 получается указанное равенство для ядра.

Утверждение о центре нетрудно вывести из [32], где доказано, что все центральные многочлены алгебры Грассмана представимы в виде суммы коммутаторов.

2.4. Последовательность коразмерностей $c_n(\mathrm{Ass}_2)$ метабелевости. Если P_n — полилинейная компонента свободной ассоциативной алгебры $\mathrm{Ass}[X]$, T — ее T-идеал (или вербальный идеал), то положим $T_n = P_n \cap T$. Важной числовой характеристикой T-идеала T является последовательность коразмерностей $c_n(T)$. Известно, что $c_n(T^{(3)}) = 2^{n-1}$ (см. [11]) и $c_n(T^{(4)}) = 2^{n-1} + 2\mathrm{C}_n^4 + 2\mathrm{C}_n^3$ (см. [13]).

Предложение 1. *Пусть* $A = \mathrm{Ass}_2[X]$ *и* $c_n = \dim_\Phi P_n(A)$. *Тогда* $c_n = (n-1)2^{n-1} + 2\mathrm{C}_n^4 - \mathrm{C}_n^2 + 1$ *при* $n \geq 4$. *В частности,* $c_n \approx n\cdot 2^{n-1}$, *т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n\cdot 2^{n-1}} = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что $c_n = n!$ $(n \leq 3)$, $c_4 = 21$. Далее, при $n \geq 4$ имеется один правильный одночлен, $2\mathrm{C}_n^4$ регулярных элементов типа 1, $\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)\mathrm{C}_n^k$ регулярных элементов типа 2 и $\sum\limits_{4\leq 2k\leq n} \mathrm{C}_n^{2k}$ регулярных элементов типа 3. Значит,

$$c_n = 1 + 2\mathrm{C}_n^4 + \sum_{k=2}^{n}(k-1)\mathrm{C}_n^k + \sum_{2k=4}^{n} \mathrm{C}_n^{2k}.$$

Используя хорошо известные равенства

$$k\mathrm{C}_n^k = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}, \tag{14}$$

$$\sum_k \mathrm{C}_n^{2k} = \sum_k \mathrm{C}_n^{2k+1} = 2^{n-1}, \tag{15}$$

получаем

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)\mathrm{C}_n^k=\sum_{k=2}^{n}k\mathrm{C}_n^k-\sum_{k=2}^{n}\mathrm{C}_n^k=n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^k-1\right)-(2^n-n-1)$$
$$=n(2^{n-1}-1)-(2^n-n-1)=(n-2)2^{n-1}+1.$$

Следовательно,

$$c_n=1+2\mathrm{C}_n^4+(n-2)2^{n-1}+1+\big(2^{n-1}-\mathrm{C}_n^2-1\big)=1+2\mathrm{C}_n^4-\mathrm{C}_n^2+(n-1)2^{n-1}.$$

§ 3. Свободная супералгебра $\mathbf{Alt}_2^s[\varnothing;x]$

3.1. Аддитивный базис супералгебры $\mathrm{Alt}_2^s[\varnothing;x]$**.** *Супералгеброй* $A=A_0\oplus A_1$ называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, т. е. ее компоненты A_i $(i=0,1)$ удовлетворяют соотношению $A_iA_j\subseteq A_{i+j\ (\mathrm{mod}\ 2)}$.

Важный пример супералгебры представляет собой алгебра Грассмана $G=G_0\oplus G_1$ с единицей 1 и порождающими e_i $(i=1,2,\dots)$, удовлетворяющими определяющим соотношениям $e_i\circ e_j=0$. Четная часть G_0 линейно порождается 1 и *правильными словами* $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_{2n}}$, где $i_1<i_2<\dots<i_{2n}$, четной длины; нечетная часть G_1 линейно порождается *правильными словами* $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_{2n+1}}$, где $i_1<i_2<\dots<i_{2n+1}$, нечетной длины.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие алгебр. Супералгебра $A=A_0\oplus A_1$ называется $\mathfrak{M}$-*супералгеброй*, если ее грассманова оболочка $G(A)=A_0\otimes G_0\oplus A_1\otimes G_1$ является $\mathfrak{M}$-алгеброй, т. е. лежит в многообразии $\mathfrak{M}$. Обозначим через $F^s_{\mathfrak{M}}[X_0;X_1]=F_0\oplus F_1$ свободную $\mathfrak{M}$-супералгебру, порожденную множеством $X_0\cup X_1$, где $X_i\subseteq F_i$ $(i=0,1)$, причем F_0 — линейная оболочка одночленов от элементов из $X_0\cup X_1$, содержащих элементы из X_1 четное число раз, а F_1 — линейная оболочка аналогичных одночленов, содержащих нечетное число элементов из X_1. Элемент p называется *однородным*, если он лежит либо в F_0 (в этом случае будем писать $|p|=0$ и называть p *четным*), либо в F_1 (в этом случае будем писать $|p|=1$ и называть p *нечетным*).

Пусть, как и прежде, Alt_2 — многообразие метабелевых альтернативных алгебр. Рассмотрим в супералгебре $F=\mathrm{Alt}_2^s[\varnothing;x]=F_0\oplus F_1$ элементы

$$x_{(2)}=x^2,\quad x_{(3)}=(x,x,x),\quad x_{(n+1)}=[x_{(n)},x]_s,$$

где $[p,q]_s=pq-(-1)^{|p||q|}qp$ — суперкоммутатор элементов $p,q\in F_0\cup F_1$, $|p|$ — четность p.

Заметим, что в силу тождеств (1) и (4)

$$(x_{(n)},x,x)=\frac{1}{3}x_{(n+2)}\quad(n\geq 2).$$

Предложение 2. *Элементы вида*

$$x_{(n)}x_{(2)}^k x^{\varepsilon},\quad x_{(2)}^k x^{\varepsilon},$$

где $k\geq 0$, $n\geq 3$, $\varepsilon=0,1$, *образуют аддитивный базис супералгебры* $\mathrm{Alt}_2^s[\varnothing;x]$.

3.2. Вспомогательная супералгебра B**.** Для доказательства линейной независимости элементов, указанных в предложении 2, потребуется вспомогательная супералгебра B с базисом $a^{(2k)},b_{2n+2}^{(2k)},c_{2n+2}^{(2k)}$, $x^{(2k+1)},y_{2n+1}^{(2k)},z_{2n+3}^{(2k)}$, где $k\geq 0$, $n\geq 1$.

Градуировка на B задается пространствами

$$B_0 = \operatorname{span}\left\langle a^{(2k)}, b^{(2k)}_{2n+2}, c^{(2k)}_{2n+2} \right\rangle, \quad B_1 = \operatorname{span}\left\langle x^{(2k+1)}, y^{(2k)}_{2n+1}, z^{(2k)}_{2n+3} \right\rangle.$$

Опишем умножение на B. Пространство B_0 является ассоциативно-коммутативной алгеброй, в которой $\operatorname{alg}(a^{(2)})$ изоморфна алгебре многочленов $\Phi[w]$, а подпространство $R = \operatorname{span}\left\langle b^{(2k)}_{2n+2}, c^{(2k)}_{2n+2} \mid n \geq 1 \right\rangle$ совпадает с ее радикалом, причем $R^2 = 0$:

$$a^{(2k)} \cdot a^{(2m)} = a^{(2k+2m)}, \quad a^{(2k)} \cdot b^{(2m)}_{2n+2} = b^{(2k+2m)}_{2n+2}, \quad a^{(2k)} \cdot c^{(2m)}_{2n+2} = c^{(2k+2m)}_{2n+2}.$$

В дальнейшем алгебры $\operatorname{alg}(a^{(2)})$ и $\Phi[w]$ отождествляются. Пространство B является свободным ассоциативным левым $\Phi[w]$-модулем с базисом

$$\left\{1, b^{(0)}_{2n+2}, c^{(0)}_{2n+2} \mid n \geq 1\right\} \cup \left\{x = x_1, y^{(0)}_{2n+1}, z^{(0)}_{2n+3} \mid n \geq 1\right\}$$

относительно действия

$$a^{(2k)} \cdot x^{(2m+1)} = x^{(2k+2m+1)}, \quad a^{(2k)} \cdot y^{(2m)}_{2n+1} = y^{(2k+2m)}_{2n+1}, \quad a^{(2k)} \cdot z^{(2m)}_{2n+3} = z^{(2k+2m)}_{2n+3}.$$

Заметим, что $B_1 = B_0 x + Rx$ и определим недостающие произведения $f_1 \cdot f_0$ и $f_0 \cdot f_1$ базисных элементов $f_1 \in B_1$, $f_0 \in B_0$, считая $Rx \cdot R = R \cdot Rx = 0$:

$$x^{(2k+1)} \cdot a^{(2m)} = x^{(2k+2m+1)} - m y^{(2m+2k-2)}_3,$$

$$y^{(2k)}_{2n+1} \cdot a^{(2m)} = y^{(2k+2m)}_{2n+1}, \quad z^{(2k)}_{2n+1} \cdot a^{(2m)} = z^{(2k+2m)}_{2n+1},$$

$$b^{(2m)}_{2n} \cdot x^{(2k+1)} = z^{(2m+2k)}_{2n+1}, \quad x^{(2k+1)} \cdot b^{(2m)}_{2n} = z^{(2m+2k)}_{2n+1} - y^{(2m+2k)}_{2n+1},$$

$$c^{(2m)}_{2n+2} \cdot x^{(2k+1)} = y^{(2m+2k+2)}_{2n+1} + \frac{1}{3} y^{(2m+2k)}_{2n+3},$$

$$x^{(2k+1)} \cdot c^{(2m)}_{2n+2} = -y^{(2m+2k+2)}_{2n+1} - \frac{2}{3} y^{(2m+2k)}_{2n+3} + z^{(2m+2k)}_{2n+3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что справедлива

Лемма 15. *Супералгебра B имеет абелев тип, т. е.*

$$(B, B_0, B_0) = (B_0, B, B_0) = (B_0, B_0, B) = 0.$$

Наконец, определим недостающие произведения нечетных базисных элементов, считая, что $(Rx)^2 = 0$ и $N = 2k + 2m$:

$$x^{(2k+1)} \cdot x^{(2m+1)} = a^{(N+2)} + \frac{k+2m}{3} b^{(N-2)}_4 - m c^{(N-2)}_4,$$

$$x^{(2k+1)} \cdot y^{(2m)}_{2n+1} = -c^{(N)}_{2n+2} + b^{(N)}_{2n+2}, \quad y^{(2m)}_{2n+1} \cdot x^{(2k+1)} = c^{(N)}_{2n+2},$$

$$x^{(2k+1)} \cdot z^{(2m)}_{2n+1} = b^{(N+2)}_{2n} - c^{(N)}_{2n+2} + \frac{2}{3} b^{(N)}_{2n+2}, \quad z^{(2m)}_{2n+1} \cdot x^{(2k+1)} = b^{(N+2)}_{2n} + \frac{1}{3} b^{(N)}_{2n+2}.$$

Положим $W = R + Rx$. Заметим, что W – идеал в F и $W^2 = 0$. Кроме того,

$$[A, A]_s \subseteq \operatorname{span}(a^{(2k)} \mid k \geq 1) + W.$$

Поскольку $[a^{(2k)}, a^{(2l)}] = [a^{(2k+2l)}, W] = [W, W]_s = 0$, супералгебра F метабелева.

3.3. Проверка альтернативности супералгебры B. Проверка альтернативности тривиальна. Для этого достаточно вычислить ассоциаторы от базисных элементов. Если тройка содержит не менее двух четных элементов, то она ассоциативна. Кроме того, ассоциативны все тройки, которые не содержат два элемента вида $x_p := x^{(2p+1)}$, $x_q := x^{(2q+1)}$. Осталось вычислить ассоциаторы от элементов: x_p, x_q, v, где v — произвольный базисный элемент.

Пусть $N = 2p + 2q + 2k$. Имеем

$$(x_p, x_q, a^{(2k)}) = -(x_p, a^{(2k)}, x_q) = (a^{(2k)}, x_p, x_q) = \frac{1}{3} k b_4^{(N-2)},$$

$$\big(x_p, x_q, b_{2r}^{(2k)}\big) = -\big(x_p, b_{2r}^{(2k)}, x_q\big) = \big(b_{2r}^{(2k)}, x_p, x_q\big) = \frac{1}{3} b_{2r+2}^{(N)},$$

$$\big(x_p, x_q, c_{2r}^{(2k)}\big) = -\big(x_p, c_{2r}^{(2k)}, x_q\big) = \big(c_{2r}^{(2k)}, x_p, x_q\big) = \frac{1}{3} c_{2r+2}^{(N)},$$

$$(x_p, x_q, x_k) = \frac{1}{3}(p + q + k) z_5^{(N-2)},$$

$$\big(x_p, x_q, y_{2r+1}^{(2k)}\big) = \big(x_p, y_{2r+1}^{(2k)}, x_q\big) = \big(y_{2r+1}^{(2k)}, x_p, x_q\big) = \frac{1}{3} y_{2r+3}^{(N)},$$

$$\big(x_p, x_q, z_{2r+1}^{(2k)}\big) = \big(x_p, z_{2r+1}^{(2k)}, x_q\big) = \big(z_{2r+1}^{(2k)}, x_p, x_q\big) = \frac{1}{3} y_{2r+3}^{(N)}.$$

Легко видеть, что $\mathrm{Alt}_2^s[\varnothing; x]$ изоморфна B.

Замечание. Супералгебра $\mathrm{Alt}_2^s[\varnothing; x]$ является гомоморфным образом свободной альтернативной супералгебры $\mathrm{Alt}^s[\varnothing; x]$, порожденной одним нечетным элементом. Аддитивный базис $\mathrm{Alt}^s[\varnothing; x]$ и ее таблица умножения получены в [21]. Конечно, используя [21], можно получить результаты § 3, но вряд ли целесообразно «стрелять из пушки по воробьям».

§ 4. Аддитивный базис свободной алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$

Всюду в этом параграфе считаем, что $y_1, z_1, \dots, y_k, z_k \in X_n$ $(k \geq 1)$ и $\xi = [z_1 t_1] \dots [z_k t_k]$. Степень элемента ξ обозначается через $|\xi|$, значит, $|\xi| = 2k$.

4.1. Линейные порождающие ассоциаторного идеала. Пусть $n = 3 + 2k$ и $X_n = \{p, q, r, y_1, z_1, \dots, y_k, z_k\}$. Положим

$$a_{3,k}(p, q, r) = (p, q, r)\xi.$$

Докажем сначала, что пространство $A_{3,k} = \mathrm{span}(a_{3,k}(p, q, r))$ порождается элементами

$$a_{3,k} = (x_1, x_2, x_3)[x_4 x_5] \dots [x_{n-1} x_n], \quad a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(2,i)}, \ a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(3,i)} \quad (i = \overline{4, n}).$$

Заметим, что элемент $a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(2,i)}$ является симметризацией элемента $a_{3,k}$ по переменным x_2, x_i. Пусть P — линейная оболочка указанных элементов. В силу леммы 5(б) и тождеств (1) и (5) $a_{3,k}(p, q, r) = (p, q, r)\xi$ кососимметричен по переменным $y_1, z_1, \dots, y_k, z_k$, а $a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(2,i)}$ кососимметричен по переменным, отличным от x_2, x_i.

Поскольку ввиду тождеств (1), (4) и (5) верно

$$(x, a, b)[ab] = 0, \tag{16}$$

можно считать, что $a_{3,k}(p,q,r)$ содержит ассоциатор (p,q,r), в состав которого входит одна из переменных x_1, x_2.

Если $p = x_1$ и $q = x_2$, то элемент $a_{3,k}(x_1, x_2, r)$ линейно выражается через $a_{3,k}$ и $a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(3,i)}$, т. е. содержится в P. Если $p = x_1$, то можно считать, что хотя бы один из элементов q, r совпадает с x_2 или x_3. В силу предыдущего можно считать, что $r = x_3$. Тогда $a_{3,k}(x_1, q, x_3)$ линейно выражается через $a_{3,k}$ и $a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(2,i)}$, где $i = \overline{4,n}$.

Докажем лемму, которая позволит существенно сократить число линейных порождающих пространства $A_{3,k}$.

Лемма 16. *Пусть $a = (x_1, x_2, x_3)[x_4x_5]$. Тогда верно тождество*

$$a^{\mathrm{Id}+(2,4)} - a^{\mathrm{Id}+(2,5)} = a^{\mathrm{Id}+(3,4)} - a^{\mathrm{Id}+(3,5)}.$$

Доказательство. Разобьем выражение $\Sigma = a^{\mathrm{Id}+(2,4)} - a^{\mathrm{Id}+(2,5)} - a^{\mathrm{Id}+(3,4)} + a^{\mathrm{Id}+(3,5)}$ на сумму двух слагаемых $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, каждое из которых преобразуем с помощью тождества (16):

$$\Sigma_1 = (x_1, x_2, x_3)[x_4x_5]^{\mathrm{Id}+(24)} + (x_1, x_2, x_5)[x_4x_3] = -(x_1, x_4, x_5)[x_2x_3],$$

$$\Sigma_2 = -(x_1, x_2, x_3)[x_4x_5]^{\mathrm{Id}+(34)} - (x_1, x_5, x_3)[x_4x_2] = (x_1, x_5, x_4)[x_3x_2].$$

Отсюда ввиду правой альтернативности вытекает требуемое.

Следовательно, пространство $A_{3,k}$ порождается элементами

$$a_{3,k}, a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(2,4)}, \quad a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(3,i)}, \quad i = \overline{4,n}. \tag{17}$$

Замечание. Количество слов вида (17) над множеством X_n равно n, если $n \geq 5$.

Пусть $n = m + 2k$, $m \geq 4$ и $X_n = \{a, b, y_3, \dots, y_m, z_1, t_1, \dots, z_k, t_k\}$. Пусть сначала $d = ([aby_3 \dots y_{m-2}], y_{m-1}, y_m)\xi$. В силу тождеств (4) и (13) имеем $3d = [aby_1y_2 \dots y_m]\xi$. Кроме того, ясно, что d кососимметричен по переменным $y_3, \dots, y_m, z_1, t_1, \dots, z_k, t_k$. Из тождества Сейгла (8) следует, что $[aby_3y_4]$ представим в виде линейной комбинации коммутаторов, в которых на первом месте стоит или y_3, или y_4. Таким образом, можно считать, что $x_1, x_2, x_3 \in \{a, b, y_3, y_4\}$. Тогда элемент d является линейной комбинацией элементов вида

$$[x_1x_2x_3y]\xi, \quad [x_1x_3x_2y]\xi, \quad [x_1yx_2x_3]\xi, \quad [x_2x_3x_1y]\xi, \quad [x_2yx_1x_3]\xi.$$

Элементы $[x_1x_2x_3y]\xi$, $[x_1x_3x_2y]\xi$, $[x_2x_3x_1y]\xi$ назовем *правильными D-словами.* Оставшиеся элементы $[x_1yx_2x_3]\xi$, $[x_2yx_1x_3]\xi$ линейно выражаются через правильные D-слова и элементы вида $[x_1\overline{yx_2}x_3]\xi$, где $[x\overline{aby}] = [xaby] + [xbay]$.

Поскольку в силу равенств (9) и (11)

$$[x_2\overline{yx_3}x_1]\xi = -[x_1\overline{yx_3}x_2]\xi = [x_1\overline{x_2x_3}y]\xi + [x_1\overline{x_2}x_3]\xi,$$

элемент d линейно выражается через правильные D-слова и элементы вида $[x_1\overline{yx_2}x_3]\xi$. Значит, элемент d линейно выражается через элементы

$$d_1 = [x_1x_2x_3x_4x_5]\xi, \quad d_2 = [x_1[x_2x_3]x_4x_5]\xi, \quad d_i = d_1^{\mathrm{Id}+(2,i)}, \quad i = 3, \dots, n.$$

Пусть $n = m + 2k$, $m \geq 4$ и $X_n = \{y_1, \ldots, y_m, z_1, t_1, \ldots, z_k, t_k\}$. Тогда аналогично предыдущему проверяется, что элемент $d_{m,k} = [y_1 y_2 \ldots y_m]\xi$ линейно выражается через элементы

$$\begin{gathered} d^{(1)}_{m,k} = [x_1 x_2 \ldots x_m]\xi, \quad d^{(2)}_{m,k} = [x_1[x_2 x_3]x_4 \ldots x_m]\xi, \\ d^{(i)}_{m,k} = \bigl(d^{1}_{m,k}\bigr)^{\mathrm{Id}+(2,i)}, \quad i = 3, \ldots, n. \end{gathered} \tag{18}$$

Замечание. Количество элементов вида (18) над множеством X_n, $n \geq 6$, равно n.

4.2. Базис собственных многочленов ассоциаторного идеала. Если $\mathfrak{M}$ — унитарно замкнутое многообразие алгебр, то обозначим через $G(\mathfrak{M})$ подалгебру в грассмановой оболочке супералгебры $F^s_{\mathfrak{M}}[1, x] = \bigl(F^s_{\mathfrak{M}}[\varnothing, x]\bigr)^{\#}$, порожденной единицей 1 и элементами $x_i = x \otimes e_i$, где e_i — стандартные порождающие ассоциативной алгебры Грассмана G. Элементы $x_1, x_2, \ldots$, как обычно, называются *антикоммутативными* переменными. Алгебра $G(\mathfrak{M})$ называется *алгеброй Грассмана многообразия* $\mathfrak{M}$.

Докажем, что построенная система линейных порождающих (17), (18) собственных многочленов из пространства $\sum\limits_{k \geq 1} VU^k$ линейно независима в алгебре Грассмана $\overline{G} = G(\mathrm{Alt}_2)$. На самом деле справедлив более сильный результат, который потребуется в дальнейшем.

Основная лемма. *Пусть*

$$A = \mathrm{Alt}_2[X], \quad L_m(A) = \mathrm{span}\langle [a_1, \ldots, a_m],\ a_i \in A\rangle.$$

Тогда всякое нетривиальное линейное соотношение f степени $n \geq 3$ в алгебре A между следующими элементами:

(а) $a_{3,k} = (x_1, x_2, x_3)\xi$, $a^{\mathrm{Id}+(2,4)}_{3,k}$, $a^{\mathrm{Id}+(3,i)}_{3,k}$, *где* $k \geq 1$, $4 \leq i \leq n$, $|\xi| = 2k$, $n = 3 + 2k$,

(б) $d^{(1)}_{m,p} = [x_1 x_2 \ldots x_m]\xi$, $d^{(2)}_{m,p} = [x_1[x_2 x_3]x_4 \ldots x_m]\xi$, $d^{(i)}_{m,p} = (d^{(1)}_{m,p})^{\mathrm{Id}+(2,i)}$, *где* $m \geq 4$, $p \geq 1$, $3 \leq i \leq n$, $|\xi| = 2p, m + 2p = n$,
влечет включение

$$L_m U^k \subseteq L_{m+2} U^{k-1} + L_{m+4} U^{k-2} + \ldots \tag{19}$$

при некоторых m, k таких, что $m + 2k = n + 1$.

Доказательство. Допустим от противного, что не существует включений типа (19), в частности, отсюда следует, что не могут быть линейно зависимы элементы

$$[x_1 x_2 \ldots x_l][y_1 z_1] \ldots [y_N z_N], \tag{20}$$

где $x_i, y_i, z_i \in X$ и $x_1 < x_2 < \cdots < x_l < y_1 < z_1 < \cdots < y_N < z_N$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $n = 2\nu + 1$. Тогда в линейную комбинацию f входят элементы типа (а) и (б) только при нечетном $m \geq 5$. Элементы $a_{3,k}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{Id}+(2,4)}$, $a_{3,k}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{Id}+(3,i)}$, $d^{(2)}_{m,p} = [x_1[x_2 x_3]x_4 \ldots x_m]\xi$, $d^{(i)}_{m,p} = \bigl(d^{(1)}_{m,p}\bigr)^{\mathrm{Id}+(2,i)}$ при специализации $x_1 = u \in U$ переходят в нуль, значит, равенство $f = 0$ при этой специализации принимает вид

$$\alpha_1 a_{3,\nu-1}(x_1, x_2, x_3) + \alpha_5 d^{(1)}_{5,\nu-2} + \alpha_7 d^{(1)}_{7,\nu-3} + \cdots |_{x_1 = u} = 0.$$

Откуда в силу (20), вытекающего из сделанного предположения, получаем $\alpha_i = 0$ при всех i. Тем самым доказано, что в f входят только элементы

$$b = a_{3,k}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{Id}+(2,4)}, \quad c_i = a_{3,k}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{Id}+(3,i)},$$

$$d^{(2)}_{m,p} = [x_1[x_2x_3]x_4 \dots x_m]\xi, \quad d^{(i)}_{m,p} = \big(d^{(1)}_{m,p}\big)^{\mathrm{Id}+(2,i)},$$

т. е. верно равенство

$$f = \beta b + \sum_{i\ge 4}\gamma_i c_i + \sum_{m\ge 5}\lambda_m d^{(2)}_{m,p} + \sum_{i\ge 3,\, m\ge 5}\mu_{i,m} d^{(i)}_{m,p} = 0.$$

Считая фиксированным $i \ge 5$ и подставляя $x_i = u \in U$, получаем $\gamma_i = 0$ и $\mu_{i,m} = 0$. Значит,

$$f = \beta b + \gamma_4 c_4 + \sum_{m\ge 5}\lambda_m d^{(2)}_{m,p} + \sum_{i=3,4,\, m\ge 5}\mu_{i,m} d^{(i)}_{m,p} = 0.$$

Подставим в $f = 0$ вместо x_2 элемент $u \in U$. Тогда $\beta = 0$ и

$$f = \gamma_4 c_4 + \sum_{m\ge 5}\lambda_m d^{(2)}_{m,p} + \sum_{i=3,4,\, m\ge 5}\mu_{i,m} d^{(i)}_{m,p} = 0.$$

Подставляя вместо x_3 элемент $u \in U$, имеем $\gamma_4 = 0$ и, стало быть, верно

$$f = \sum_{m\ge 5}\lambda_m d^{(2)}_{m,p} + \sum_{i=3,4,\, m\ge 5}\mu_{i,m} d^{(i)}_{m,p} = 0.$$

Рассуждая аналогично, получаем $\lambda_m = \mu_{i,m} = 0$ для любых i, m.

2. Пусть $n = 2\nu$. Тогда в линейную комбинацию f входят только элементы типа (б) при четном $m \ge 6$:

$$f = \sum_{m,p,i}\big\{\alpha^{(1)}_{m,p}[x_1x_2\dots x_m]\xi + \alpha^{(2)}_{m,p}[x_1[x_2x_3]x_4\dots x_m]\xi + \alpha^{(i)}_{m,p}[x_1x_2\dots x_m]\xi^{\mathrm{Id}+(2,i)}\big\}.$$

Если подставить $x_1 = u \in U$ в равенство $f = 0$, то в силу (1), лемм 1 и 5(б) получим равенство

$$\sum_{m,p,i}\big(\alpha^{(1)}_{m,p}[ux_2\dots x_m]\xi\big) = 0,$$

откуда ввиду (20) следует, что $\alpha^{(1)}_{m,p} = 0$. Значит, равенство $f = 0$ принимает вид

$$f = \sum_{m,p,i}\big(\alpha^{(2)}_{m,p}[x_1[x_2x_3]x_4\dots x_m]\xi + \alpha^{(i)}_{m,p}[x_1x_2\dots x_m]\xi^{\mathrm{Id}+(2,i)}\big) = 0.$$

Полагая $x_i = u \in U$ при фиксированном $i \ge 4$, получаем

$$f = \sum_{m,p,i}\big(\alpha^{(i)}_{m,p}[x_1ux_3\dots x_m]\xi\big) = 0.$$

Отсюда в силу (20) вытекает, что $\alpha^{(i)}_{m,p} = 0$ при $i \ge 4$. Тогда

$$f = \sum_{m,p}\big(\alpha^{(2)}_{m,p}[x_1[x_2x_3]x_4\dots x_m]\xi + \alpha^{(3)}_{m,p}[x_1x_2\dots x_m]\xi^{\mathrm{Id}+(2,3)}\big) = 0.$$

Полагая $x_2 = x_3 = a$, имеем $\sum\limits_m \big(\alpha^{(3)}_{m,p}[x_1aax_4\dots x_m]\xi\big) = 0$ и после линеаризации $\Delta^1_a(u)$, $u \in U$, получаем $\alpha^{(3)}_{m,p} = 0$ и

$$f = \sum_{m,p} \big(\alpha^{(2)}_{m,p}[x_1[x_2x_3]x_4\dots x_m]\xi\big) = 0.$$

Точно так же получаем $\alpha^{(2)}_{m,p} = 0$, что и завершает доказательство основной леммы.

Замечание. Новые результаты о собственных многочленах можно найти в [29, 31].

4.3. Аддитивный базис алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$. Пусть $A = \mathrm{Alt}_2[X]$. Тогда из теоремы 1 и предыдущих результатов этого параграфа вытекает, что следующие элементы образуют аддитивный базис пространства полилинейных собственных многочленов от переменных из X_n:

1) $q(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $q(x_1, x_2, x_4, x_3)$, если $n = 4$;

2) $[x_1x_ix_{j_1}\dots x_{j_{n-2}}]$, где $j_1 < \dots < j_{n-2}$, $n \geq 3$;

3) $[x_1x_2]\dots[x_{2k-1}x_{2k}]$, если $n = 2k$;

4) (x_1, x_2, x_3), если $n = 3$;

5) $d^{(n)}_0 = ([x_1x_2\dots x_{n-2}], x_{n-1}, x_n)$, $d^{(n)}_1 = ([x_1[x_2x_3]\dots x_{n-2}], x_{n-1}, x_n)$, $d^{(n)}_i = \big(d^{(n)}_0\big)^{\mathrm{Id}+(2,i)}$, где $3 \leq i \leq n$, $n \geq 4$;

6) $a_{3,k} = (x_1, x_2, x_3)\xi$, $a^{\mathrm{Id}+(2,4)}_{3,k}$, $a^{\mathrm{Id}+(3,i)}_{3,k}$, где $4 \leq i \leq n$, $n = 3 + 2k$;

7) $d^{(1)}_{m,p} = [x_1x_2\dots x_m]\xi$, $d^{(2)}_{m,p} = [x_1[x_2x_3]x_4\dots x_m]\xi$, $d^{(i)}_{m,p} = \big(d^{(1)}_{m,p}\big)^{\mathrm{Id}+(2,i)}$, где $m \geq 4$, $p \geq 1$, $3 \leq i \leq n$, $|\xi| = 2p$, $m + 2p = n$.

4.4. Последовательность размерностей d_n идеала $D(\mathrm{Alt}_2[X])$. Сравним теперь функции роста метабелевых многообразий Alt_2 и Ass_2.

Предложение 3. *Пусть* $A = \mathrm{Alt}_2[X]$,

$$c_n = \dim_\Phi P_n(\mathrm{Ass}_2[X]), \quad d_n = \dim_\Phi D(A) \cap P_n(A).$$

Тогда $d_n = n(n-2)2^{n-3} - 2\mathrm{C}^3_n + 2\mathrm{C}^2_n - 2\mathrm{C}^1_n$ *при* $n \geq 5$. *В частности,* $4d_n \approx nc_n$.

Доказательство. Сначала подсчитаем число γ_m базисных собственных полилинейных многочленов степени m, содержащихся в ассоциаторном идеале $D(A)$, т. е. $\gamma_m = \dim_\Phi D(A) \cap \Gamma_m(A)$. Заметим, что $\gamma_3 = 1$, и докажем, что выполнены равенства $\gamma_{2k} = 2k(k-1)$, $\gamma_{2k+1} = (2k+1)k$ при $k \geq 2$.

Пусть $n \geq 4$. Базисные элементы содержатся в $D(A)$ тогда и только тогда, когда они типов 5–7. Рассмотрим случай $n = 2k$. Базисных элементов типа 5 ровно $2k$. Столько же базисных элементов типа 7 при фиксированном значении $p \geq 1$. Значит, при подсчете числа γ_{2k} можно считать, что все базисные элементы имеют тип 7 и p меняется от 0 до $k-2$, следовательно, $\gamma_{2k} = 2k(k-1)$. Точно так же проверяется, что $\gamma_{2k+1} = (2k+1)k$. Для числа d_n получаем значение $d_n = \sum\limits_{m\geq 3} \gamma_m \mathrm{C}^m_n$. Следовательно, учитывая только что доказанные равенства, имеем

$$d_n = \sum_{k\geq 2}\gamma_{2k}\mathrm{C}_n^{2k} + \sum_{k\geq 1}\gamma_{2k+1}\mathrm{C}_n^{2k+1}$$
$$= \sum_{k\geq 2}2k^2\mathrm{C}_n^{2k} - \sum_{k\geq 2}2k\mathrm{C}_n^{2k} + \mathrm{C}_n^3 + \sum_{k\geq 2}2k^2\mathrm{C}_n^{2k+1} + \sum_{k\geq 2}k\mathrm{C}_n^{2k+1}$$
$$= \sum_{k\geq 1}2k^2\mathrm{C}_n^{2k} - 2\mathrm{C}_n^1 - \sum_{k\geq 1}2k\mathrm{C}_n^{2k} + 2\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 + \sum_{k\geq 1}2k^2\mathrm{C}_n^{2k+1} - 2\mathrm{C}_n^3 + \sum_{k\geq 1}k\mathrm{C}_n^{2k+1} - \mathrm{C}_n^3$$
$$= \sum_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k} - \sum_k 2k\mathrm{C}_n^{2k} + \sum_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k+1} + \sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} - 2\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 2\mathrm{C}_n^3.$$

Используя равенства (14) и (15), последовательно получаем

1^0. $\sum\limits_k 2k\mathrm{C}_n^{2k} = n\sum\limits_k \mathrm{C}_{n-1}^{2k-1} = n\cdot 2^{n-2}$.

Отсюда вытекает

2^0. $\sum\limits_k k\mathrm{C}_n^{2k} = n\cdot 2^{n-3}$.

3^0. $\sum\limits_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} = (n-2)2^{n-3}$. В самом деле,

$$\sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} = \frac{1}{2}\Big\{\sum_k (2k+1)\mathrm{C}_n^{2k+1} - \sum_k \mathrm{C}_n^{2k+1}\Big\} = \frac{n}{2}\sum_k \mathrm{C}_{n-1}^{2k} - \frac{1}{2}\sum_k \mathrm{C}_n^{2k+1}$$
$$= \frac{n}{2}2^{n-2} - \frac{1}{2}2^{n-1} = n\cdot 2^{n-3} - 2^{n-2} = (n-2)2^{n-3}.$$

4^0. $\sum\limits_k k\mathrm{C}_{n-1}^{2k-1} = (n+1)2^{n-4}$. Действительно,

$$\sum_k k\mathrm{C}_{n-1}^{2k-1} = \frac{1}{2}\Big\{\sum_{k\geq 1}(2k-1)\mathrm{C}_{n-1}^{2k-1} + \sum_{k\geq 1}\mathrm{C}_{n-1}^{2k-1}\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{(n-1)\sum_{k\geq 1}\mathrm{C}_{n-2}^{2k-2} + \sum_{k\geq 1}\mathrm{C}_{n-1}^{2k-1}\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(n-1)2^{n-3} + 2^{n-2}\} = (n-1)2^{n-4} + 2^{n-3} = (n+1)2^{n-4}.$$

5^0. $\sum\limits_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k} = n\sum\limits_k k\mathrm{C}_{n-1}^{2k-1} = n(n+1)2^{n-4}$ в силу п. 4^0.

6^0. $\sum\limits_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} = (n-2)2^{n-3}$. В самом деле, ввиду п. 4^0 имеем

$$(n+2)2^{n-3} = \sum_k (k+1)\mathrm{C}_n^{2k+1} = \sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} + \sum_k \mathrm{C}_n^{2k+1},$$

откуда

$$\sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} = (n+2)2^{n-3} - \sum_k \mathrm{C}_n^{2k+1} = (n+2)2^{n-3} - 2^{n-1}$$
$$= (n+2)2^{n-3} - 4\cdot 2^{n-3} = (n-2)2^{n-3}.$$

7^0. $\sum\limits_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k+1} = (n^2-3n+4)2^{n-4}$. Действительно, в силу пп. 2^0, 6^0 имеем

$$\sum_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k+1} = \sum_k k(2k+1)\mathrm{C}_n^{2k+1} - \sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} = n\sum_k k\mathrm{C}_{n-1}^{2k} - \sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1}$$
$$= n(n-1)2^{n-4} - (n-2)2^{n-3} = (n^2-n-2n+4)2^{n-4} = (n^2-3n+4)2^{n-4}.$$

Используя пп. 5^0, 1^0, 7^0, 6^0, получаем

$$
\begin{aligned}
d_n &= \sum_{k\geq 2}\gamma_{2k}\mathrm{C}_n^{2k} + \sum_{k\geq 1}\gamma_{2k+1}\mathrm{C}_n^{2k+1}\\
&= \sum_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k} - \sum_k 2k\mathrm{C}_n^{2k} + \sum_k 2k^2\mathrm{C}_n^{2k+1} + \sum_k k\mathrm{C}_n^{2k+1} - 2\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 2\mathrm{C}_n^3\\
&= n(n+1)2^{n-4} - n\cdot 2^{n-2} + (n^2-3n+4)2^{n-4} + (n-2)2^{n-3} - 2\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 2\mathrm{C}_n^3\\
&= (n^2+n-4n+n^2-3n+4+2n-4)2^{n-4} - 2\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 2\mathrm{C}_n^3\\
&= n(n-2)2^{n-3} - 2\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 - 2\mathrm{C}_n^3.
\end{aligned}
$$

Наконец, $d_n \approx n^2 2^{n-3}$. Поскольку $c_n \approx n\cdot 2^{n-1}$ в силу предложения 1, то $4d_n \approx n^2 2^{n-1} \approx nc_n$, что и требовалось.

Замечание. В [33] отмечены равенства $\sum\limits_k k\mathrm{C}_n^k = n\cdot 2^{n-1}$ и $\sum\limits_k k^2\mathrm{C}_n^k = n(n+1)\cdot 2^{n-2}$ под номерами (5.16) и (5.17); про них, в частности, написано, что они «часто встречаются в литературе и могут быть доказаны элементарными средствами». Других необходимых нам комбинаторных равенств в [33] нет.

§ 5. Следствия

5.1. Центры алгебры $\mathrm{Alt}_2[X]$.

Теорема 2. *Пусть* $A = \mathrm{Alt}_2[X]$. *Тогда справедливы равенства*
(а) $Z(A) = ([xy]^2)^T$;
(б) $N_{\mathrm{Ass}}(A) = ([xy]^2, [xyzz])^T$.
В частности, указанные центры являются идеалами.

Доказательство. (а) По модулю T-идеала $Q = ([xy]^2)^T$ полилинейные собственные многочлены алгебры A линейно порождаются базисными элементами типа 2–7. Используя стандартную процедуру сведения к собственным многочленам, достаточно понять, что нетривиальные линейные комбинации таких элементов не могут лежать в центре. Разложим по базису центральный элемент f, зависящий от переменных из X_n:

$$
f = \sum_{i,\nu}\beta_i^{(\nu)}b_i^{(\nu)} \in Z(A),
$$

где $b_i^{(\nu)}$ — базисные элементы типа ν. Поскольку центр свободной метабелевой алгебры Ли равен нулю: $Z(\mathrm{Lie}_2[X]) = 0$, скаляры $\beta_i^{(2)}$, отвечающие базисным словами типа 2, нулевые. Значит, $f = \sum\limits_{i\geq 1,\,\nu\geq 3}\beta_i^{(\nu)}b_i^{(\nu)}$. Учитывая, что $f \in N_{\mathrm{Ass}}(A)$, остается проверить справедливость п. (б).

(б) По модулю T-идеала $E = ([xy]^2, [xyzz])^T$ полилинейные собственные многочлены алгебры A линейно порождаются базисными элементами типа 2 при $n = 3$ и элементами типа 3–7. Докажем, что нетривиальные линейные комбинации f таких элементов не могут лежать в ассоциативном центре алгебры Грассмана $\overline{G} = G(\mathrm{Alt}_2)$. Если $f \in N_{\mathrm{Ass}}(\overline{G})$, то, учитывая включение $D \subseteq N_{\mathrm{Eng}}(\overline{G})$ (лемма 14), получаем $[fyz] = 0$. Считая, что $y, z \in X$ и $x_n < y < z$, имеем (при условии, что $f \neq 0$) линейную зависимость элементов типа 4–7, что невозможно.

5.2. Тождества алгебры $G(\mathrm{Alt}_2)$.

Теорема 3. *Два тождества*

$$T_1: \ [xy]^2 = 0, \quad T_2: \ [xyzz] = 0$$

образуют базис тождеств алгебры Грассмана $\overline{G} = G(\mathrm{Alt}_2)$ *в многообразии метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики* 0.

Доказательство теоремы представим в виде последовательности шагов.

1^0. Докажем, что алгебра Мальцева M с тождеством ослабленной 2-энгелевости $abc^2 = 0$ является метабелевой и удовлетворяет тождеству $abab = 0$.

В силу тождества Сейгла (8) имеем

$$abab + baba + abab + baba = 0,$$

откуда $abab + baba = 0$. В левой части оба слагаемых одинаковы в силу антикоммутативности и тождества $abc^2 = 0$, значит, $abab = 0$. Это означает, что функция $xyxz$ кососимметрична по y, z. Тогда по тождеству Сейгла (8)

$$(xy)(xz) = xxyz + xyzx + yzxx + zxxy = -yxzx - zxyx = 0.$$

Следовательно, элемент $(xy)(zt)$ кососимметричен по всем переменным, значит, $(xy)(zt) = -(zy)(xt) = (zt)(xy) = -(xy)(zt)$, откуда $2(xy)(zt) = 0$, и тем самым алгебра M метабелева.

2^0. Покажем, что алгебра $\overline{G}$ удовлетворяет тождествам T_1, T_2.

Если $u \in U = [A, A]$ и $f_{a,b}(c, d) = [ab\overline{cd}]$, то $f_{a,b}(c, u) = 0$ в силу (1). Далее, $f_{a,b}(c, x^2) - f_{a,b}(c, x) \circ x = [a, b, x^2, c] - [a, b, x, c] \circ x = [abx] \circ [xc] = 0$ по лемме 3.

На основании леммы 13(д) элемент $q(a, b, c, d)$ является дифференцированием по переменным c, d. Тогда переменные c, d можно считать антикоммутативными, значит, $[ab\overline{cd}] = q(a, b, c, d) = 0$. Тем самым доказано, что в $\overline{G}$ выполнены тождества T_1, T_2.

3^0. Пусть A — свободная алгебра над множеством X в многообразии, определенном тождествами T_1, T_2. Докажем, что $[uab] = 3(u, a, b)$, где $u \in U = [AA]$.

В самом деле, в силу тождеств (4) и T_2 имеем

$$6(u, a, b) = [uab] + [abu] + [bua] = 2[uab].$$

4^0. На основании п. 3^0, разд. 3.3 и § 4 всякое полилинейное собственное тождество f алгебры $\overline{G}$ является линейной комбинацией базисных элементов:

$1')$ $[x_{i_1} x_{j_1}] \dots [x_{i_k} x_{j_k}]$, где $i_1 < j_1 < \dots < j_k$;

$2')$ $a_{3,k} = (x_1, x_2, x_3)\xi$, $a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(2,4)}$, $a_{3,k}^{\mathrm{Id}+(3,i)}$, где $4 \le i \le n$, $|\xi| = 2k \ge 0$, $n = 3 + 2k$;

$3')$ $d_{m,k}^{(1)} = [x_1 x_2 \dots x_m]\xi$, $d_{m,k}^{(2)} = [x_1 [x_2, x_3] x_4 \dots x_m]\xi$, $d_{m,k}^{(i)} = \left(d_{m,k}^{(1)}\right)^{\mathrm{Id}+(2,i)}$, где $m \ge 4$, $3 \le i \le n$, $|\xi| = 2k \ge 0$, $m + 2k = n$.

Поскольку элемент типа $1'$ отличен от нуля в ассоциативной алгебре Грассмана, f является линейной комбинацией элементов типа $2'$, $3'$. Однако в силу основной леммы эти элементы линейно независимы на алгебре $\overline{G}$. Теорема доказана.

5.3. Ассоциативные центры алгебр $\mathrm{Alt}_2[X]$ **и** $F_{\overline{G}}[X]$**.** Из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть* $\overline{G} = G(\mathrm{Alt}_2)$ *и* $\mathrm{char}(\Phi) = 0$. *Ассоциативный центр свободной метабелевой альтернативной алгебры совпадает с идеалом тождеств алгебры* $\overline{G}$. *Ассоциативный центр свободной алгебры* $F_{\overline{G}}[X]$ *многообразия* $\mathrm{var}(\overline{G})$ *равен нулю.*

В случае конечной характеристики основного поля справедливо

Предложение 4. *Пусть* $p = \mathrm{char}(\Phi) \geq 5$. *Если* $A \in \mathrm{Alt}_2$ *и* $N_{\mathrm{Ass}}(A) = 0$, *то* A *локально нильпотентна.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [30]), что в каждой ассоциативной Φ-алгебре верно равенство $[x^p, y] = [yx \dots x]$. Значит, оно верно в альтернативной алгебре, и $[x^p, y] \in N_{\mathrm{Ass}}(A) = 0$ в силу леммы 1 в алгебре A, откуда $x^p \in N_{\mathrm{Comm}}(A) \subseteq N_{\mathrm{Ass}}(A) = 0$. Осталось заметить, что альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса по теореме Ширшова локально нильпотентна [27].

5.4. Разложение многообразия Alt_2 в объединение.

Теорема 5. *Многообразие* Alt_2 *метабелевых альтернативных алгебр является объединением трех многообразий, порожденных алгебрами* T_2 *треугольных матриц 2-го порядка, алгеброй Воличенко* V_2 *и алгеброй Грассмана* $\overline{G} = G(\mathrm{Alt}_2)$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Alt}_2 = \mathrm{Ass}_2 + \mathrm{var}(\overline{G})$, ввиду следствия 1 из теоремы 1 получаем разложение $\mathrm{Alt}_2 = \mathrm{var}(T_2) + \mathrm{var}(V_2) + \mathrm{var}(\overline{G})$.

Докажем, что многообразие $\mathrm{var}\,\overline{G}$ неразложимо в объединение. В соответствии с основной леммой относительно свободную алгебру A назовем *выделенной*, если в ней для некоторых чисел m, k выполнено условие линейной зависимости элементов вида (20). Многообразие назовем *выделенным*, если его свободная алгебра является выделенной. Легко видеть, что объединение выделенных многообразий является выделенным. Поэтому достаточно заметить, что всякое собственное подмногообразие в многообразии $\mathrm{var}\overline{G}$ является выделенным; доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пчелинцев С. В.* О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 6. С. 674–695.
2. *Пчелинцев С. В.* Исключительные первичные альтернативные алгебры // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1322–1337.
3. *Пчелинцев С. В.* О кручении свободного альтернативного кольца // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 142–149.
4. *Пчелинцев С. В.* Об одном почти шпехтовом многообразии альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 6. С. 127–144.
5. *Бадеев А. В.* О шпехтовости коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 и коммутативных луп Муфанг // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1252–1268.
6. *Гришин А. В.* Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5. С. 101–118.
7. *Белов А. Я.* Контрпримеры к проблеме Шпехта // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 3. С. 13–24.
8. *Щиголев В. В.* Примеры бесконечно базируемых T-пространств // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 3. С. 143–160.
9. *Латышев В. Н.* О выборе базы в одном T-идеале // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 5. С. 1122–1127.
10. *Латышев В. Н.* О конечной порожденности T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 6. С. 1432–1434.
11. *Krakowski D., Regev A.* The polynomial identities of the Grassmann algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 429–438.

12. *Пчелинцев С. В.* Свободная $(-1,1)$-алгебра с двумя порождающими // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 4. С. 425–449.

13. *Воличенко И. Б.* T-идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Минск, 1978. 13 с. (Препринт/Институт математики АН БССР; № 22).

14. *Бокуть Л. А., Макар-Лиманов Л. Г.* База свободной метабелевой ассоциативной алгебры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 12–18.

15. *Дорофеев Г. В.* О многообразиях обобщенно стандартных и обобщенно достижимых алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 2. С. 143–167.

16. *Дорофеев Г. В., Пчелинцев С. В.* О многообразиях стандартных и достижимых алгебр // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 995–1001.

17. *Шестаков И. П.* Альтернативные алгебры с тождеством $[x, y]^m = 0$ // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, № 5. С. 575–596.

18. *Пчелинцев С. В.* О многообразии алгебр типа $(-1,1)$ // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 154–171.

19. *Пчелинцев С. В.* Структура слабых тождеств на грассмановых оболочках центрально метабелевых альтернативных супералгебр супер-ранга 1 над полем характеристики 3 // Фунд. и прикл. математика. 2001. Т. 7, № 3. С. 849–871.

20. *Shestakov I. P.* Free Malcev superalgebra on one odd generator // J. Algebra Appl. 2003. V. 2, N 4. P. 451–461.

21. *Shestakov I. P., Zhukavets N.* The free alternative superalgebra on one odd generator // Int. J. Algebra Comput. 2007. V. 17, N 5/6. P. 1215–1247.

22. *Пчелинцев С. В.* О тождествах правоальтернативных метабелевых алгебр Грассмана // Фунд. и прикл. математика. 2007. Т. 13, № 2. С. 157–183.

23. *Ваулин А. Н.* Многообразия альтернативных алгебр с тождеством $[x_1, x_2, \ldots, x_5] = 0$: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2005.

24. *Pchelintsev S. V., Shestakov I. P.* Prime $(-1,1)$ and Jordan monsters and superalgebras vector type // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 54–86.

25. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 113–130.

26. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; V. 39).

27. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

28. *Пчелинцев С. В.* Специальность метабелевых алгебр Мальцева // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 2. С. 257–266.

29. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 12. С. 54–72.

30. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

31. *Пчелинцев С. В., Шестаков И. П.* Константы частных дифференцирований и примитивные операции // Алгебра и логика. 2016 (в печати).

32. *Гришин А. В.* О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, № 4. С. 191–192.

33. *Райзер Г. Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.

Статья поступила 1 октября 2016 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва 123468;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pchelinzev@mail.ru