Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 512.54

О $\mathscr{F}_h$–ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Н. Тан

Аннотация. Пусть $\mathscr{F}$ — формация конечных групп. Вводится понятие $\mathscr{F}_h$-дополняемых подгрупп и исследуется строение конечных групп с условием, что некоторые максимальные подгруппы силовских подгрупп, максимальные подгруппы, минимальные подгруппы или 2-максимальные подгруппы $\mathscr{F}_h$-дополняемы соответственно. Получены обобщения некоторых известных результатов.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.418

Ключевые слова: $\mathscr{F}_h$-дополняемая подгруппа; максимальная подгруппа; 2-максимальная подгруппа; минимальная подгруппа; подгруппа, порядок которой равен квадрату простого числа.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу. Используются стандартные понятия и обозначения из [1, 2].

Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Предположим, что (1) если $G \in \mathscr{F}$ и $H \trianglelefteq G$, то $G/H \in \mathscr{F}$; (2) если G/M и G/N лежат в $\mathscr{F}$, где M, N — произвольные нормальные подгруппы из G, то $G/(M \cap N) \in \mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F}$ называется *формацией.* Если класс $\mathscr{F}$ замкнут относительно взятия (нормальных) подгрупп, то $\mathscr{F}$ называется *S-замкнутым* (*S_n-замкнутым*). Главный фактор H/K группы G называется *$\mathscr{F}$-центральным*, если $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathscr{F}$ (см. [2, определение 2.4.3]). Символом $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ обозначим $\mathscr{F}$-гиперцентр группы G, т. е. произведение всех подгрупп группы G, G-главные факторы которых $\mathscr{F}$-центральны. Символами $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}$ и $\mathscr{N}$ обозначены формации всех разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно.

Напомним, что минимальная подгруппа группы G имеет простой порядок. Подгруппа N_2 называется 2-*минимальной подгруппой* G, если максимальная подгруппа N_2 является минимальной подгруппой G. Очевидно, подгруппы, порядок которых является квадратом простого числа, 2-минимальны. Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если M_1 — максимальная подгруппа M, то будем называть M_1 2-*максимальной подгруппой* G. Обозначим через $[A]B$ полупрямое произведение групп A и B.

Согласно [3] подгруппа H группы G называется *$\mathscr{F}_h$-нормальной*, если существует нормальная подгруппа K в G такая, что HK — нормальная холлова

This project is supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11471138) and University Natural Science Foundation of Jiangsu (Grant No. 15KJB110002).

подгруппа G и $(H \cap K)H_G/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. В этих терминах в [3] получены некоторые интересные результаты. В качестве обобщения откажемся от свойства нормальности холловых подгрупп и введем следующее понятие.

Определение 1.1. Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathscr{F}_h$-дополняемой* в G, если существует нормальная подгруппа T в G такая, что HT — холлова подгруппа в G и $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$.

Очевидно, все нормальные подгруппы, c-нормальные подгруппы и $\mathscr{F}_h$-нормальные подгруппы $\mathscr{F}_h$-дополняемы. Однако обратное неверно.

Пример 1.2. Пусть $G = Z_5 \wr S_3 = [B]S_3$ — регулярное сплетение, где $S_3 = [Z_3]Z_2$ — симметрическая группа степени 3, B — база регулярного сплетения G. Тогда Z_2B — холлова подгруппа G. Очевидно, $Z_2 \cap B = 1$. Поэтому Z_2 $\mathscr{F}_h$-дополняема в G для любой непустой насыщенной формации $\mathscr{F}$. При этом нетрудно заметить, что Z_2 не является нормальной, c-нормальной или $\mathscr{N}_h$-нормальной в G. На самом деле G — единственная нормальная подгруппа G такая, что $Z_2G = G$ и $(Z_2)_G = 1$. Более того, $Z_2 \cap G = Z_2 \nleq Z_\infty^{\mathscr{N}}(G) = Z_\infty(G)$. Поэтому Z_2 не $\mathscr{N}_h$-нормальна в G.

В данной работе исследуется строение конечных групп с условием, что некоторые максимальные подгруппы, 2-максимальные подгруппы, минимальные подгруппы или 2-минимальные подгруппы $\mathscr{F}_h$-дополняемы соответственно, и описывается строение разрешимых, сверхразрешимых и p-нильпотентных групп.

2. Предварительные результаты

В дальнейшем будут использоваться следующие известные результаты.

Лемма 2.1 [4, лемма 2.1]. *Пусть G — группа и $A \leq G$. Пусть $\mathscr{F}$ — непустая насыщенная формация и $Z = Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. Тогда*

(1) *если A нормальна в G, то $AZ/A \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/A)$;*

(2) *если $\mathscr{F}$ S-замкнута, то $Z \cap A \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(A)$;*

(3) *если $\mathscr{F}$ S_n-замкнута и A нормальна в G, то $Z \cap A \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(A)$;*

(4) *если $G \in \mathscr{F}$, то $Z = G$.*

Лемма 2.2 [4, лемма 2.3]. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такая, что $G/E \in \mathscr{F}$. Если E циклическая, то $G \in \mathscr{F}$.*

Лемма 2.3. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1) *H $\mathscr{F}_h$-дополняема в G тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу T_0 такую, что HT_0 — холлова подгруппа G, $H_G \leq T_0$ и $(H/H_G) \cap (T_0/H_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$.*

(2) *Предположим, что H нормальна в G. Если K $\mathscr{F}_h$-дополняема в G, то K/H $\mathscr{F}_h$-дополняема в G/H.*

(3) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда для любой $\mathscr{F}_h$-дополняемой подгруппы E в G такой, что $(|H|, |E|) = 1$, HE/H $\mathscr{F}_h$-дополняема в G/H.*

(4) *Если H $\mathscr{F}_h$-дополняема в G и $\mathscr{F}$ S-замкнута, то H $\mathscr{F}_h$-дополняема в K.*

(5) *Если H $\mathscr{F}_h$-дополняема в G, K нормальна в G и $\mathscr{F}$ S_n-замкнута, то H $\mathscr{F}_h$-дополняема в K.*

(6) *Если $G \in \mathscr{F}$, то любая подгруппа G $\mathscr{F}_h$-дополняема в G.*

Доказательство аналогично [4] по лемме 2.1. □

Лемма 2.4 [5, лемма 2.6]. *Пусть N — нетривиальная нормальная подгруппа группы G. Если $N \cap \Phi(G) = 1$, то подгруппа Фиттинга $F(N)$ группы N является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп G, лежащих в $F(N)$.*

Лемма 2.5 [6, теорема 2.2]. *Пусть G — группа, p и q — различные простые делители $|G|$, P — нециклическая силовская p-подгруппа G. Если любая максимальная подгруппа P (кроме одной) имеет q-замкнутое дополнение в G, то G q-замкнута.*

Лемма 2.6 [7, лемма 3.12]. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы H и P — силовская p-подгруппа H. Если $|P| \leq p^2$ и H A_4-свободна, то H p-нильпотентна.*

3. Основные результаты и некоторые приложения

Ниже приводятся основные результаты и приложения при условии, что некоторые максимальные подгруппы силовских подгрупп, максимальные подгруппы, минимальные подгруппы или 2-максимальные подгруппы $\mathscr{F}_h$-дополняемы.

3.1. Максимальная подгруппа силовской подгруппы.

Теорема 3.1. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая максимальная подгруппа всякой нециклической силовской подгруппы G $\mathscr{U}_h$-дополняема в G.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2.3(6). Докажем достаточность. Предположим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка.

(1) Если N — нетривиальная нормальная p-подгруппа G для некоторого простого p, то G/N сверхразрешима.

Пусть T/N — некоторая нециклическая силовская q-подгруппа G/N и T_1/N — максимальная подгруппа T/N, где q — простой делитель $|G/N|$. Если $q = p$, то T — нециклическая силовская p-подгруппа G и T_1 — максимальная подгруппа T. По условию T_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Таким образом, по лемме 2.3(2) T_1/N $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/N. Пусть $q \neq p$, тогда найдется силовская q-подгруппа Q в G такая, что $T = QN$. Пусть $Q_1 = Q \cap T_1$. Сравнение порядков показывает, что Q_1 — максимальная подгруппа Q и $T_1 = Q_1N$. По условию Q_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Поэтому по лемме 2.3(3) T_1/N $\mathscr{U}_h$-дополняемая в G/N. Это показывает, что G/N удовлетворяет условию теоремы. Следовательно, G/N сверхразрешима в силу минимальности выбора G.

(2) G разрешима.

Пусть p — наименьший простой делитель $|G|$ и P — силовская p-подгруппа G. Если $p > 2$, то G разрешима по теореме Фейта — Томпсона. Поэтому считаем $p = 2$. Если P циклическая, то G 2-нильпотентна по [8, 10.1.9]. Таким образом, G разрешима. Рассмотрим случай, когда P нециклическая. Пусть P_1 — максимальная подгруппа P. По условию P_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Найдется нормальная подгруппа T в G такая, что P_1T — холлова подгруппа G и $(P_1 \cap T)(P_1)_G/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/(P_1)_G)$. Если $(P_1)_G \neq 1$, то по (1) $G/(P_1)_G$ сверхразрешима и, таким образом, G разрешима. Если $(P_1)_G = 1$, то $P_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Если $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \neq 1$, то найдется минимальная нормальная подгруппа L в G, лежащая в $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Очевидно, что L является элементарной абелевой r-подгруппой для некоторого простого r. По (1) G/L сверхразрешима. Отсюда следует, что G разрешима. Рассмотрим случай $Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) = 1$. В этом случае $P_1 \cap T = 1$. Поскольку T — нормальная подгруппа в G порядка $2m$, где m нечетно, найдется нетривиальная нормальная r-подгруппа N в G такая, что $N \leq T$, для любого простого r. Более того, по (1) G/N сверхразрешима. Стало быть, G разрешима.

(3) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, $L = O_p(G) = F(G) = C_G(L)$ и $\Phi(G) = 1$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа G. По (2) L — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого p. По (1) G/L сверхразрешима. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Более того, $L = O_p(G) = F(G) = C_G(L)$.

(4) L — силовская p-подгруппа G.

Пусть q — наибольший простой делитель $|G|$ и Q — силовская q-подгруппа G. Тогда QL/L — силовская q-подгруппа G/L. Так как G/L сверхразрешима по (1), то $QL/L \trianglelefteq G/L$. Отсюда следует, что $QL \trianglelefteq G$. Пусть P — силовская p-подгруппа G. Если $p = q$, то $P/L \trianglelefteq G/L$, поэтому $P \trianglelefteq G$. По (3) $L = O_p(G) = P$ — силовская p-подгруппа G. Предположим, что $p < q$. Тогда $QP = QLP$ является подгруппой G. Если $QP < G$, то по лемме 2.3(4) QP удовлетворяет условиям теоремы. В силу минимальности выбора G группа QP сверхразрешима. Поэтому $Q \trianglelefteq QP$ и $QL = Q \times L$. Следовательно, $Q \leq C_G(L) = L$; противоречие.

Предположим, что $QP = G$. Очевидно, $Q \ntrianglelefteq G$. Допустим, что $L < P$. Поскольку L не циклическая, то и P не циклическая. Докажем, что любая максимальная подгруппа P имеет q-замкнутое дополнение в G. Пусть P_1 — произвольная максимальная подгруппа P. Если $(P_1)_G \neq 1$, то по (3) $L \leq (P_1)_G \leq P_1$ и $G = LM = P_1M$, где $M \simeq G/L$ сверхразрешима и потому M q-замкнута. Предположим, что $(P_1)_G = 1$. Если $Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$, то по (3) $L \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)$. По (1) G/L сверхразрешима, значит, $G/Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \simeq (G/L)/\big(Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)/L\big)$ сверхразрешима, а стало быть, и G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, $Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) = 1$. По условию найдется нормальная подгруппа T в G такая, что P_1T — холлова подгруппа G и $P_1 \cap T \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) = 1$. Предположим, что $P_1T < G$. Тогда $P_1T = P$. Так как $|P| = |P_1||T|/|P_1 \cap T| = |P_1||T|$, то T — циклическая группа порядка p. Минимальная нормальность L влечет $L = T$. По (1) G/L сверхразрешима, что влечет сверхразрешимость G; противоречие. Таким образом, $G = P_1T$ и $P_1 \cap T = 1$. Но $G = T$; противоречие. Следовательно, T q-замкнута. Тем самым доказываемое утверждение верно. По лемме 2.5 $Q \trianglelefteq G$. Полученное противоречие доказывает, что $L = P$. Итак, получаем (4).

(5) Финальное противоречие.

Пусть L_1 — максимальная подгруппа в L. Очевидно, $(L_1)_G = 1$. По условию найдется нормальная подгруппа T в G такая, что L_1T — холлова подгруппа G и $L_1 \cap T \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)$. Поскольку $L \cap T \trianglelefteq G$, то $L \cap T = 1$ или L. Если $L \cap T = 1$, то $L_1T = LT$, ибо L_1T — холлова подгруппа G. Поэтому $L = L \cap L_1T = L_1(L \cap T) = L_1$; противоречие. Таким образом, $L \cap T = L$, т. е. $L_1 \leq L \leq T$. Это показывает, что $1 \neq L_1 \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \cap L$. Но $Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \cap L \trianglelefteq G$, поэтому $Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \cap L = L$, т. е. $L \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)$. Из (1) следует, что G/L сверхразрешима. Поскольку $G/Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G) \simeq (G/L)/\big(Z_{\infty}^{\mathfrak{U}}(G)/L\big)$ сверхразрешима, G сверхразрешима; противоречие. Финальное противоречие заканчивает доказательство. $\square$

Теорема 3.2. *Группа G сверхразрешима, если и только если найдется нормальная подгруппа E в G такая, что G/E сверхразрешима и любая максимальная подгруппа всякой нециклической силовской подгруппы E $\mathscr{U}_h$-дополняема в G.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим противное, и пусть G — контрпример, для которого $|G||E|$ минимально. Дальнейшее доказательство разбито на несколько шагов. Можно считать, что E нециклическая.

(1) Если L — нетривиальная нормальная p-подгруппа G, лежащая в E, где p простое, то G/L сверхразрешима.

Если E/L циклическая, то поскольку $(G/L)/(E/L) \cong G/E$, получаем $G/L \in \mathscr{U}$. Будем считать, что E/L не циклическая. Пусть T/L — некоторая нециклическая силовская q-подгруппа E/L и T_1/L — максимальная подгруппа T/L, где q — некоторый простой делитель $|E/L|$. Если $q = p$, то T — нециклическая силовская p-подгруппа E и T_1 — максимальная подгруппа T. По условию T_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Таким образом, по лемме 2.3(2) T_1/L $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/L. Пусть $q \neq p$, тогда найдется силовская q-подгруппа Q в E такая, что $T = QL$. Пусть $Q_1 = Q \cap T_1$. Нетрудно заметить, что Q_1 — максимальная подгруппа Q и $T_1 = Q_1L$. По условию Q_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Стало быть, по лемме 2.3(3) T_1/L $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/L. Отсюда следует, что $(G/L, E/L)$ удовлетворяет условию теоремы. В силу минимальности выбора G получаем, что G/L сверхразрешима.

(2) E сверхразрешима.

Поскольку класс $\mathscr{U}$ всех сверхразрешимых групп S-замкнут, по лемме 2.3(4) получаем, что условие теоремы выполнено для (E, E). Если $E = G$, то по теореме 3.1 G сверхразрешима; противоречие. Поэтому будем считать, что $E < G$. Тогда E сверхразрешима в силу минимальности выбора G. Таким образом, (2) выполнено.

(3) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, содержащуюся в E, и $L = O_p(E) = F(E) = C_E(L)$ для некоторого простого $p \in \pi(G)$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа G, лежащая в E. По (2) L — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого p. Рассуждая, как в доказательстве (3) теоремы 3.1, получаем (3).

(4) Финальное противоречие.

Пусть q — наибольший простой делитель $|E|$ и Q — силовская q-подгруппа E. По (2) $Q \trianglelefteq E$. Тогда $Q = F(E) = L$ — силовская q-подгруппа E. Заметим, что L_1 — максимальная подгруппа L. Очевидно, $(L_1)_G = 1$. По условию L_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Тогда найдется нормальная подгруппа T в G такая, что L_1T — холлова подгруппа G и $L_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Поскольку $LT = L_1T$ — холлова подгруппа G, то $L = L \cap L_1T = L_1(L \cap T)$. Отсюда следует, что $L \cap T \neq 1$. Очевидно, $L \cap T \trianglelefteq G$. Стало быть, $L \cap T = L$, т. е. $L \leq T$. Поэтому $1 \neq L_1 \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \cap L \leq L$. Так как $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \cap L \trianglelefteq G$, то $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \cap L = L$ и, таким образом, $L \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Из (1) следует, что G/L сверхразрешима. Поскольку $G/Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \simeq (G/L)/\big(Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)/L\big)$ сверхразрешима, G сверхразрешима; противоречие. Финальное противоречие заканчивает доказательство. □

Следствие 3.3 [1, VI, теорема 10.3]. *Группа G сверхразрешима, если все силовские подгруппы G циклические.*

Следствие 3.4 [9]. *Пусть G — группа с нормальной подгруппой E такой, что G/E сверхразрешима. Если любая максимальная подгруппа всякой силовской подгруппы E нормальна в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 3.5 [3, теорема 3.1]. *Группа G сверхразрешима, если и только если найдется нормальная подгруппа E в G такая, что G/E сверхразрешима и любая максимальная подгруппа всякой нециклической силовской подгруппы E $\mathscr{U}_h$-нормальна в G.*

Теорема 3.6. *Пусть $\mathscr{F}$ — S-замкнутая насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, класс всех сверхразрешимых групп, и G — группа. Тогда G принадлежит $\mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathscr{F}$ и любая максимальная подгруппа всякой нециклической силовской подгруппы E $\mathscr{U}_h$-дополняема в G.*

Доказательство. Очевидно, что необходимость следует из леммы 2.3(6). Докажем достаточность. Предположим противное, и пусть G — контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

По теореме 3.2 и лемме 2.3(4) $E \in \mathscr{U}$. Пусть p — наибольший простой делитель $|E|$ и E_p — силовская p-подгруппа E. Тогда E_p char $E \trianglelefteq G$, поэтому $E_p \trianglelefteq G$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G, лежащая в E_p. По лемме 2.3(2),(3) нетрудно заметить, что условие теоремы выполнено для $(G/N, E/N)$. В силу выбора G имеем $G/N \in \mathscr{F}$. Поскольку $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G, лежащей в E_p, и $N \not\leq \Phi(G)$. Таким образом, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = [N]M$. Отсюда следует, что $N = O_p(E) = E_p$ по рассуждениям, аналогичным доказательству (3) теоремы 3.1. Следовательно, N нециклическая по лемме 2.2. Аналогично доказательству теоремы 3.1(5), получаем $N \leq Z_{\infty}^{\mathscr{U}}(G)$, что невозможно. □

Следствие 3.7 [10]. *Пусть $\mathscr{F}$ — S-замкнутая насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$. Пусть G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Если любая максимальная подгруппа всякой силовской подгруппы E c-нормальна в G, то $G \in \mathscr{F}$.*

3.2. Максимальные подгруппы и минимальные подгруппы.

Теорема 3.8. *Пусть $\mathscr{F}$ — S-замкнутая насыщенная формация, содержащая класс $\mathscr{U}$ всех сверхразрешимых групп, и G — группа. Тогда G принадлежит $\mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathscr{F}$, и любая циклическая подгруппа E простого порядка или порядка 4 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим противное, и пусть G — контрпример, для которого $|G||E|$ минимально. Нетрудно заметить, что $E = G^{\mathscr{F}}$. По лемме 2.3(4) для любой подгруппы H в E условия теоремы выполнены для (H, H). В силу минимальности выбора G любая подгруппа H из E сверхразрешима. Из [1, VI, теорема 9.6] следует, что E разрешима.

Пусть M — максимальная подгруппа G, не содержащая E. Имеем $M/M \cap E \simeq ME/E = G/E \in \mathscr{F}$. По лемме 2.3(4) любая циклическая подгруппа $M \cap E$ простого порядка или порядка 4 $\mathscr{U}_h$-дополняема в M. Поэтому условия теоремы выполнены для $(M, M \cap E)$. Следовательно, $M \in \mathscr{F}$ по выбору G. Тогда по

[2, теорема 3.4.2] $E = G^{\mathscr{F}}$ является p-группой для некоторого простого p и выполнены следующие утверждения:

(1) $E/\Phi(E)$ — G-главный фактор и элементарная абелева p-группа;

(2) $\Phi(E) = E \cap \Phi(G) \leq Z(E)$;

(3) E — группа экспоненты p или 4 (если $p = 2$ и E неабелева).

Докажем, что $|E/\Phi(E)| = p$. Предположим противное. Пусть $\Phi = \Phi(E)$, F/Φ — подгруппа E/Φ простого порядка, $x \in F \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда по (3) $|L| = p$ или 4. По условию L $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Стало быть, найдется нормальная подгруппа T в G такая, что LT — холлова подгруппа G и $(L \cap T)L_G/L_G \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/L_G)$. Так как $L \leq E$ — p-группа и LT — холлова подгруппа G, то $E \leq LT$.

Предположим, что $|L| = 4$. Пусть H — максимальная подгруппа L. Поскольку $F/\Phi = L\Phi/\Phi \simeq L/L \cap \Phi$ имеет простой порядок, $L \cap \Phi \neq 1$. Так как L циклическая, отсюда следует, что $H = L \cap \Phi \leq \Phi$. Докажем, что L нормальная в G. Если нет, то $L_G = 1$ или H.

Случай 1. $L_G = H$. Если $L \leq \Phi(G)$, то $L \leq E \cap \Phi(G) = \Phi$ по (2); противоречие. Таким образом, $L \nleq \Phi(G)$. Тогда найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $G = LM$. Так как $L_G = H \leq \Phi \leq \Phi(G) \leq M$, имеем $|G : M| = |LM : M| = |L : M \cap L| = 2$. Поэтому $M \trianglelefteq G$ и $G/M = LM/M \simeq L/M \cap L$ циклическая. Отсюда следует, что $L \leq E = G^{\mathscr{F}} \leq M$; противоречие.

Случай 2. $L_G = 1$. Тогда $L \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Рассмотрим две возможности: $L \cap T = L$ и $L \cap T \neq L$. Если $L \cap T = L$, то $L \leq T$ и $L \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. По лемме 2.1(1) $1 \neq L\Phi/\Phi \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)\Phi/\Phi \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/\Phi)$, поэтому $1 \neq L\Phi/\Phi \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/\Phi) \cap E/\Phi$. Но E/Φ является G-главным фактором, $E/\Phi \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/\Phi)$ и поэтому $|E/\Phi| = 2$; противоречие. Таким образом, $L \cap T \neq L$. Поскольку $E \leq LT$, то $LT = ET$ нормальна в G. Если $LT = G$, то $G/T = LT/T \simeq L/L \cap T$ циклическая и, стало быть, $G/T \in \mathscr{F}$, откуда $L \leq E = G^{\mathscr{F}} \leq T$. Тем самым $G = T$; противоречие. Таким образом, $LT < G$. Так как $LT/T \trianglelefteq G/T$, то LT/T $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/T. Более того, $(G/T)/(LT/T) \simeq G/LT \simeq (G/E)/(LT/E) \in \mathscr{F}$. Следовательно, $(G/T, LT/T)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому $G/T \in \mathscr{F}$ по выбору G. Отсюда следует, что $L \leq E = G^{\mathscr{F}} \leq T$ вопреки предположению, что $L \cap T \neq L$. Полученные противоречия доказывают, что L нормальна в G, когда $|L| = 4$. Поскольку E/Φ — главный фактор, $|E/\Phi| = |L\Phi/\Phi| = |L/L \cap \Phi| = |L/H| = 2$, когда $|L| = 4$.

Предположим, что $|L|$ просто. Если L не нормальна в G, то $L_G = 1$ и поэтому $L \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Очевидно, что $L \cap T = L$ или $L \cap T = 1$. Если $L \cap T = L$, то $L \leq T$ и $L \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. По лемме 2.1(1) $1 \neq L\Phi/\Phi \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/\Phi) \cap E/\Phi$. Аналогично предыдущему $|E/\Phi| = p$; противоречие. Предположим, что $L \cap T = 1$. Если $LT = G$, то $G/T \simeq L \in \mathscr{F}$. Отсюда следует, что $L \leq E = G^{\mathscr{F}} \leq T$; противоречие. Предположим, что $LT < G$ и $LT = ET$ нормальна в G. Очевидно, $(G/T)/(LT/T) \simeq G/LT \simeq (G/E)/(LT/E) \in \mathscr{F}$. Аналогично рассуждениям выше LT/T $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/T. Таким образом, условия теоремы верны для $(G/T, LT/T)$. Отсюда $G/T \in \mathscr{F}$ по выбору G. Таким образом, $L \leq E = G^{\mathscr{F}} \leq T$; противоречие. Эти противоречия показывают, что $|E/\Phi| = p$, когда $|L| = p$.

Итак, утверждение справедливо во всех случаях, т. е. $E/\Phi = L\Phi/\Phi$ — циклическая группа простого порядка. С другой стороны, $(G/\Phi)/(E/\Phi) \simeq G/E \in \mathscr{F}$ по лемме 2.2, поэтому $G \in \mathscr{F}$. Финальное противоречие завершает доказательство. $\square$

Следствие 3.9. *Группа G сверхразрешима, если и только если любая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G.*

Следствие 3.10 [3, теорема 3.2]. *Пусть $\mathscr{F}$ — S-замкнутая насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа. Тогда G принадлежит $\mathscr{F}$ в том и только в том случае, когда G содержит нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathscr{F}$, и любая циклическая подгруппа E простого порядка или порядка 4 $\mathscr{U}_h$-нормальна в G.*

Теорема 3.11. *Пусть G — группа и N — неединичная нормальная подгруппа G. Тогда N разрешима, если и только если любая максимальная подгруппа G, не содержащая N, $\mathscr{S}_h$-дополняема в G.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Предположим, что любая максимальная подгруппа M в G такая, что $N \nleq M$, $\mathscr{S}_h$-дополняема в G. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G. Предположим, что M/R — максимальная подгруппа G/R такая, что $NR/R \nleq M/R$. По условию M $\mathscr{S}_h$-дополняема в G. Тогда M/R $\mathscr{S}_h$-дополняема в G/R по лемме 2.3(2). Таким образом, по индукции NR/R разрешима. Если $N \cap R = 1$, то $N = N/(N \cap R) \simeq NR/R$ разрешима. Стало быть, можно считать, что любая минимальная нормальная подгруппа G содержится в N. Поскольку класс всех разрешимых групп замкнут относительно подпрямых произведений, R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Докажем, что R разрешима. Действительно, предположим, что R неразрешима. Пусть P — силовская p-подгруппа R, где p — простой делитель $|R|$. По аргументу Фраттини $G = RN_G(P)$. Если $G = N_G(P)$, то P нормальна в G. Отсюда следует, что $R \leq P$; противоречие. Стало быть, $N_G(P) < G$. Пусть M — максимальная подгруппа G такая, что $N_G(P) \leq M$. Тогда $R \nleq M$, поэтому $N \nleq M$. Пусть G_p — силовская p-подгруппа G такая, что $P = R \cap G_p$. Очевидно, $P \trianglelefteq G_p$. Таким образом, $G_p \leq N_G(P)$. Это показывает, что $p \nmid |G : M|$.

По условию M $\mathscr{S}_h$-дополняема в G, найдется нормальная подгруппа T в G такая, что MT — холлова подгруппа G и $(M \cap T)M_G/M_G \leq Z_\infty^{\mathscr{S}}(G/M_G)$. Поскольку R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $M_G = 1$. Если $MT < G$, то $R \leq T \leq MT = M$; противоречие. Таким образом, $MT = G$. Предположим, что $M \cap T = 1$. Тогда $R \cap M = 1$, поскольку $R \leq T$ и $G = RM = TM$. Очевидно, $|R| = |T|$, и тем самым $R = T$. Отсюда следует, что p делит $|R| = |G : M|$; снова противоречие. Поэтому $T \cap M \neq 1$ и, стало быть, $Z_\infty^{\mathscr{S}}(G) \neq 1$. Таким образом, $R \leq Z_\infty^{\mathscr{S}}(G)$ и тем самым R разрешима, откуда следует, что N разрешима.

($\Rightarrow$) Предположим, что N разрешима. Пусть M — максимальная подгруппа G такая, что $N \nleq M$, и пусть $1 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_{t-1} \leq N_t = N$, где N_i/N_{i-1} — главный фактор G ($i = 1, 2, \dots, t$). Поскольку N разрешима, N_i/N_{i-1} элементарная абелева. Найдется индекс i такой, что $N_{i-1} \leq M$, $N_i \nleq M$. Тогда $N_i/N_{i-1} \cap M/N_{i-1} \trianglelefteq (N_i/N_{i-1})(M/N_{i-1}) = G/N_{i-1}$, поэтому $N_i \cap M = N_{i-1} \leq M_G$. Пусть $MN_i = G$ и $(M \cap N_i)M_G/M_G = 1 \leq Z_\infty^{\mathscr{S}}(G/M_G)$, значит, M $\mathscr{S}_h$-дополняема в G. Теорема доказана. $\square$

3.3. 2-Максимальная подгруппа.

Теорема 3.12. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа G. Если любая 2-максимальная подгруппа P $\mathscr{U}_h$-дополняема в G и G A_4-свободна, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Справедливые следующие утверждения.

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то по лемме 2.3(3) нетрудно доказать, что любая 2-максимальная подгруппа силовской подгруппы $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ $\mathscr{U}_h$-дополняема в $G/O_{p'}(G)$. Минимальность G влечет p-нильпотентность $G/O_{p'}(G)$, стало быть, G p-нильпотентна; противоречие. Таким образом, выполнено утверждение (1).

(2) $|P| \geq p^3$.

Нетрудно доказать по лемме 2.6.

(3) G разрешима.

Предположим, что G неразрешима. Тогда по теореме Фейта — Томпсона $p = 2$. Допустим, что $O_2(G) \neq 1$. Пусть $P_1/O_2(G)$ — 2-максимальная подгруппа $P/O_2(G)$. По условию и лемме 2.3(2) $P_1/O_2(G)$ $\mathscr{U}_h$-дополняема в $G/O_2(G)$. Минимальность при выборе G влечет 2-нильпотентность $G/O_2(G)$, поэтому G разрешима; противоречие. Таким образом, можно считать, что $O_2(G) = 1$. Пусть P_1 — 2-максимальная подгруппа P. Тогда $(P_1)_G = 1$. По условию P_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Поэтому найдется $T \trianglelefteq G$ такая, что P_1T — холлова подгруппа G и $P_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Очевидно, $T \neq 1$. Если $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \neq 1$, то найдется минимальная нормальная подгруппа H в G, лежащая в $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$, простого порядка. Но в силу (1) и $O_2(G) = 1$ получаем $H = 1$; противоречие. Если $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) = 1$, то $P_1 \cap T = 1$ и $2^2 \parallel |T|$. Более того, T A_4-свободна. Стало быть, по лемме 2.6 T имеет нормальную холлову $2'$-подгруппу K. Так как $K \operatorname{char} T \trianglelefteq G$, то $K \trianglelefteq G$. Отсюда следует по (1), что $K = 1$. Таким образом, $T \leq O_2(G) = 1$; снова противоречие. Итак, условие (3) выполнено.

(4) N — единственная минимальная нормальная подгруппа G, G/N p-нильпотентна и N — элементарная абелева q-группа для некоторого простого q.

Пусть M_1/N — максимальная подгруппа PN/N и M_2/N — 2-максимальная подгруппа PN/N. Тогда $M_1 = N(P \cap M_1)$. Предположим, что P_1 — максимальная подгруппа P, содержащая $P \cap M_1$, тогда $M_1 \leq P_1N$. Поскольку $P \cap M_1 = P_1 \cap M_1$, то $M_1 = N(P \cap M_1) = N(P_1 \cap M_1)$, тогда $P_1 \cap N = P \cap N$, поэтому P_1N — максимальная подгруппа PN. Таким образом, $M_1 = P_1N$. Рассуждая аналогично, можно выбрать 2-максимальную подгруппу P_2 в P такую, что $M_2 = P_2N$. Допустим, что $p \neq q$, тогда по лемме 2.3(3) P_2N/N $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/N. Предположим, что $p = q$. Очевидно, любая 2-максимальная подгруппа P_2/N в P/N $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/N по лемме 2.3(2). Таким образом, G/N удовлетворяет условию теоремы. Минимальность при выборе G влечет p-нильпотентность G/N. Поскольку класс всех p-нильпотентных групп является насыщенной формацией, N — единственная минимальная нормальная подгрупп в G. По (3) N — элементарная абелева q-группа для некоторого простого q.

(5) Финальное противоречие.

Если $O_p(G) \neq 1$, то $N \leq O_p(G)$. По (4) G/N p-нильпотентна. Пусть T/N — нормальное p-дополнение G/N. По теореме Шура — Цассенхауза найдется холлова p'-подгруппа H в T такая, что $T = HN$. По аргументу Фраттини $G = TN_G(H) = NHN_G(H) = NN_G(H)$ и $O_p(G) = N(O_p(G) \cap N_G(H))$. Если $\Phi(O_p(G)) \neq 1$, то $N \leq \Phi(O_p(G))$. Поскольку $\Phi(O_p(G)) \leq \Phi(G)$, из $G = NN_G(H)$ следует, что $G = N_G(H)$ и, таким образом, G p-нильпотентна; противоречие. Итак, $\Phi(O_p(G)) = 1$, т. е. $O_p(G)$ элементарная абелева. Если $N < O_p(G)$, то $O_p(G) \cap N_G(H) \neq 1$. Так как $O_p(G) \cap N_G(H) \trianglelefteq O_p(G)N_G(H) = G$, получаем противоречие с (4). Стало быть, $O_p(G) = N$ минимальная нормальная в G.

Поскольку $N \not\leq \Phi(G)$, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $G = O_p(G)M$, $O_p(G) \cap M = 1$, M p-нильпотентна и $N_G(M_{p'}) = M$, где $M_{p'}$ — холлова p'-подгруппа M. Выберем силовскую p-подгруппу M_p в M, тогда $P = O_p(G)M_p$. Если $|P : M_p| \leq p$, то $|G : M| \leq p$. Следовательно, M нормальна в G, поскольку p — наименьший простой делитель $|G|$. Тогда $N \leq M$. Отсюда следует, что $G = NM = M$; противоречие. Таким образом, $|P : M_p| \geq p^2$. В этом случае выберем максимальную 2-подгруппу P_1 в P такую, что P_1 содержит M_p. По условию P_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G. Так как $O_p(G) \nsubseteq P_1$ и $O_p(G) = N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа G, то $(P_1)_G = 1$. Таким образом, найдется нормальная подгруппа T в G такая, что P_1T — холлова подгруппа G и $P_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Если $P_1 \cap T = 1$, то $|T|_p = p^2$. По лемме 2.6 T p-нильпотентна и, таким образом, нормальное p-дополнение K в T является нормальной подгруппой в G. Из (1) следует, что $K = 1$ и $|T| = p^2$. Минимальная нормальность N влечет $O_p(G) = N = T$. Таким образом, N элементарная абелева порядка p^2. Заметим, что $|\operatorname{Aut}(N)| = (p+1)p(p-1)^2$, поэтому если найдется q-элемент x в G, действующий нетривиально на N, то $p = 2$ и $q = 3$. В этом случае $[N]\langle x\rangle$. Таким образом, G имеет секцию, изоморфную A_4, вопреки условию. Предположим, что $P_1 \cap T \neq 1$, тогда $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \neq 1$. Поскольку $O_p(G)$ — единственная нормальная подгруппа в G, то $O_p(G) \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$, таким образом, $|O_p(G)| = p$. Далее, $C_G(O_p(G)) = C_G(O_p(G)) \cap O_p(G)M = O_p(G)(C_G(O_p(G)) \cap M)$ и $C_G(O_p(G)) \cap M \trianglelefteq G$. Поэтому $C_G(O_p(G)) \cap M = 1$ и, следовательно, $C_G(O_p(G)) = O_p(G)$. Отсюда получаем, что $M \simeq G/O_p(G) = N_G(O_p(G))/C_G(O_p(G))$ является циклической группой порядка $p-1$. С другой стороны, p — наименьший простой делитель порядка G. Стало быть, $M = 1$. Поэтому $G = O_p(G)$; противоречие. Таким образом, $O_p(G) = 1$. По (1) и (3) получаем $O_p(G) \neq 1$; противоречие. Теорема 3.12 доказана. $\square$

Следствие 3.13. *Пусть G — группа. Если для любого простого p, делящего порядок G, и для $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$ любая 2-максимальная подгруппа P $\mathscr{U}_h$-дополняема в G и G A_4-свободна, то G — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа.*

Теорема 3.14. *Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп с силовским рядом сверхразрешимого типа и G A_4-свободна. Если для любого простого p, делящего порядок нормальной подгруппы N из G, и для $P \in \operatorname{Syl}_p(N)$ любая 2-максимальная подгруппа P $\mathscr{U}_h$-дополняема в G, то G принадлежит $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что N — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа по лемме 2.3(4) и следствию 3.13. Пусть q — наибольший простой из $\pi(N)$ и $Q \in \operatorname{Syl}_q(N)$. Тогда Q нормальна в G. Пусть $\overline{P} = QP/Q$ — силовская p-подгруппа N/Q с $q \neq p$. Можно считать, что P — силовская p-подгруппа N. Если $\overline{P_1}$ — 2-максимальная подгруппа $\overline{P}$, то без ограничения общности можно считать, что $\overline{P_1} = P_1Q/Q$, где P_1 — 2-максимальная подгруппа P. По условию и лемме 2.3(3) $\overline{P_1}$ $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/Q. По индукции G/Q — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа.

Предположим, что q также является наибольшим простым делителем порядка G. Пусть Q_1/Q — силовская q-подгруппа G/Q, где $Q_1 \in \operatorname{Syl}_q(G)$. Поскольку G/Q — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа, $Q_1/Q \trianglelefteq G/Q$, поэтому $Q_1 \trianglelefteq G$. Применяя аналогичные рассуждения для пары $(G/Q_1, NQ_1/Q_1)$, получим, что G/Q_1 удовлетворяет условиям теоремы. В силу минимальности выбора G группа G/Q_1, стало быть, и G являются группами с силовским рядом сверхразрешимого типа. Поэтому можно считать, что r — наибольший простой делитель порядка G и $r > q$. Пусть R — силовская r-

подгруппа G. Поскольку G/Q — группа с силовским рядом, RQ нормальна в G.

Если $QR < G$, то QR — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа по индукции относительно $|G|$. Таким образом, $R \trianglelefteq RQ$ и $G = N_G(R)$, т. е. R нормальна в G. Рассмотрим фактор-группу G/R и ее нормальную подгруппу NR/R. Для любого простого p, делящего порядок NR/R, выполнено $p < r$. Если $\overline{P_2}$ — произвольная 2-максимальная подгруппа силовской p-подгруппы $\overline{P}$ в NR/R, то $\overline{P_2} = P_2R/R$, где P_2 — 2-максимальная подгруппа некоторой силовской подгруппы P в N. По условию P_2 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G, тогда по лемме 2.3(3) $\overline{P_2}$ $\mathscr{U}_h$-дополняема в G/R. Таким образом, группа G/R и ее нормальная подгруппа NR/R удовлетворяют условию теоремы. По индукции G/R, а стало быть, и G являются группами с силовским рядом сверхразрешимого типа. Таким образом, можно считать, что $G = RQ$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа G, лежащая в Q. Нетрудно заметить, что фактор-группа G/L с нормальной подгруппой Q/L удовлетворяют условию теоремы. По индукции G/L группа с силовским рядом сверхразрешимого типа. Поскольку $\mathscr{F}$ является насыщенной формацией, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, лежащая в Q. Более того, $Q \cap \Phi(G) = 1$, поэтому по лемме 2.4 $L = F(Q) = Q$ — абелева минимальная нормальная подгруппа G.

Если Q циклическая порядка q, то, поскольку $G/C_G(Q) \lesssim \mathrm{Aut}(Q)$ и $\mathrm{Aut}(Q)$ циклическая порядка $q-1$, имеем $G = C_G(Q)$. Тогда $G = Q \times R$ и, очевидно, G — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа. Предположим, что $|Q| \geq q^2$ и Q_1 — 2-максимальная подгруппа Q. По условию Q_1 $\mathscr{U}_h$-дополняема в G, найдется нормальная подгруппа T в G такая, что Q_1T — холлова подгруппа G и $(Q_1 \cap T)/(Q_1)_G \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G/(Q_1)_G)$. Если $(Q_1)_G \neq 1$, то $L \leq (Q_1)_G < Q = L$; противоречие. Это противоречие показывает, что $(Q_1)_G = 1$. Таким образом, $Q_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. С другой стороны, поскольку Q_1T — холлова подгруппа G и $G = QR$, то $Q_1T = Q$ или G. Минимальная нормальность Q влечет $Q \leq T$. Это показывает, что T равно Q или G. Таким образом, $Q_1 \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Если $Q_1 = 1$, то Q элементарная абелева порядка q^2. Поскольку Q нормальная в G, любой элемент x из R индуцирует на Q автоморфизм σ. Пусть $q = 2$. Так как $|\mathrm{Aut}(Q)| = (q+1)q(q-1)^2$, порядок $\sigma \neq 1$ должен быть равен 3 ($r = q + 1 = 3$), ибо $r > q$. Тогда $[Q]\langle\sigma\rangle \simeq A_4$ вопреки условию, что G A_4-свободна. Поэтому предположим, что $q > 2$. Заметим, что $q + 1$ не простое, тем самым $\sigma = 1$ и, стало быть, $G = R \times Q$, следовательно, G — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа. Если $Q_1 \neq 1$, то $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G) \neq 1$. Отсюда следует, что $Q \leq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$ и $|Q| = q$. Рассуждая аналогично, получим, что G — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа. Теорема доказана. □

Следствие 3.15. *Пусть G A_4-свободна и N — нормальная подгруппа G. Если для любого простого p, делящего порядок N, и для $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ всякая 2-максимальная подгруппа P $\mathscr{U}_h$-дополняема в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 3.16. *Пусть G — группа нечетного порядка и N — нормальная подгруппа G. Если для любого простого p, делящего порядок N, и для $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$ всякая 2-максимальная подгруппа P $\mathscr{U}_h$-дополняема в G, то G — группа с силовским рядом сверхразрешимого типа.*

Автор благодарен рецензенту за ценные предложения, которые помогли улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967. (Grundlehren Math. Wiss.; Band 134).
2. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press, Kluwer Acad. Publ., 2000.
3. *Guo W., Feng X. Huang J.* New characterizations of some classes of finite groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). 2011. V. 34, N 3. P. 575–589.
4. *Guo W.* On $\mathscr{F}$-supplemented subgroups of finite groups // Manuscripta Math. 2000. V. 127, N 2. P. 139–150.
5. *Li Y., Wang Y., Wei H.* The influence of π-quasinormality of maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group // Arch. Math. 2003. V. 81. P. 245–252.
6. *Skiba A. N.* On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
7. *Guo X., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.
8. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1982. (Grad. Texts Math.; V. 80).
9. *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35, N 3. P. 210–214.
10. *Li D., Guo X.* The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups. II // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 6. P. 1913–1922.

Статья поступила 26 апреля 2016 г.

Na Tang (Тан На)
School of Mathematical Sciences,
Huaiyin Normal University,
Huaian, Jiangsu 223300, P. R. China
hytn999@126.com