

УДК 519.644+517.518.85

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕНАСЫЩАЕМЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

В. Н. Белых

Аннотация. Найдено достаточное условие хорошей обусловленности весовой ненасыщаемой квадратурной формулы; вычислена сумма модулей ее квадратурных коэффициентов для любой весовой функции, суммируемой на конечном отрезке со степенью $1 < p < \infty$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.504

Ключевые слова: ненасыщаемость, квадратурная формула, ошибка округления, хорошая обусловленность.

Введение. Одной из актуальных проблем вычислительной математики является проблема построения ненасыщаемых квадратурных формул [1]. Имеющиеся уже примеры применения таких формул в конкретных задачах [2, 3] немногочисленны, но убеждают в плодотворности их использования на практике.

В [4] автором построены весовые ненасыщаемые квадратурные формулы на конечном отрезке. Характерная черта этих формул — отсутствие главного члена погрешности, и как результат — способность автоматически с ростом числа узлов подстраиваться к имеющимся избыточным (экстраординарным) «запасам» гладкости подынтегральных функций. В [4] также анонсировано без доказательства условие «хорошей» обусловленности (или устойчивости) квадратурных формул к ошибкам округлений, возникающим всякий раз при осуществлении арифметических операций.

В настоящей работе дано доказательство этого просто формулируемого, но нетривиального, по сути, результата, основанного на глубоких фактах теории конструктивного приближения непрерывных функций многочленами.

Хорошая обусловленность квадратурных формул имеет фундаментальное для компьютерной практики значение, поскольку никакие технические устройства не позволяют точно выполнять арифметические действия над числами, заданными бесконечными дробями. Операция замены вещественного числа конечной дробью (округление) вынужденная и необходимая. При этом, какими бы малыми ни были ошибки округления, их появление сопровождается всегда потерей информации. Без учета этого определяющего ингредиента цифровых вычислений делать сколько-нибудь радикальные заключения о точности конструируемого числового ответа было бы преждевременно: не воздав должное ошибкам округлений, легко ошибиться и в оценке достоверности конструируемого числового компьютерного ответа.

Поэтому вопрос о том, что чем управляет (ошибки округления процессом вычислений или процесс вычислений ошибками округления), при хорошо поставленной вычислительной проблеме абсолютно надуман: цифровых вычислений без ошибок округления (в арифметике вещественных чисел) не существует, а ошибки округления без цифровых вычислений просто отсутствуют. Корректность (или хорошая обусловленность) компьютерной постановки задачи аттестуется характеристикой, называемой числом обусловленности. Если это число велико, то от такого способа вычисления интеграла следует отказаться, потому как конструируемый числовой ответ не может внушать доверия из-за плохой устойчивости численного метода [5, 6].

Что касается построенных в [4] квадратурных формул, то ненасыщаемость и хорошая обусловленность квадратур позволяют наилучшим образом оценивать потери информации, связанные с наличием ошибок округления, чем внесен определенный вклад в понимание роли и уровня влияния ошибок округления на особенности функционирования квадратурного процесса в условиях компьютерной арифметики. Так, к примеру, в случае C^∞ -гладких подынтегральных функций погрешность ненасыщаемых квадратурных формул убывает к нулю с ростом числа узлов n экспоненциально, обеспечивая ее неулучшаемость. Последняя гарантируется, в свою очередь, асимптотикой александровского n -поперечника компакта C^∞ -гладких функций, которая с ростом n также имеет вид убывающей к нулю экспоненты.

Постановка проблемы. Пусть $C \equiv C[I]$ и $C^k \equiv C^k[I]$ ($k > 0$ целое) — пространства вещественных непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $I = [-1, 1]$ функций f ; $\|f\| = \max_{t \in I} |f(t)|$ — чебышёвская норма. Пусть $\mathcal{P}^n \subset C$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше $n - 1$ ($n > 0$ целое), а $E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathcal{P}^n} \|f - P_n\|$ — наилучшее чебышёвское приближение функции f из C .

Рассмотрим квадратурную сумму

$$\int_{-1}^{+1} r(t)f(t) dt \simeq \sum_{k=1}^n c_k f(t_k), \quad t_k \in I \equiv [-1, 1]. \quad (1)$$

Будем считать, что имеющаяся специфичность в поведении подынтегрального выражения в (1) заранее предопределена и зафиксирована условиями: вес r принадлежит $L_p[I]$, т. е. суммируем на I со степенью $1 < p < \infty$, а функция f принадлежит C .

Вещественные параметры t_k, c_k , $1 \leq k \leq n$, — узлы и коэффициенты (веса) квадратурной суммы (1) соответственно, а выражение

$$\wp_n(f) = \int_{-1}^{+1} r(t)f(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k f(t_k), \quad (2)$$

характеризующее точность представления интеграла конечной суммой, — функционал погрешности. Узлы и веса задаются обычно либо явно, либо как итог вполне определенной последовательности вычислений.

Если приближенное равенство (1) обращается в точное на элементе g из C , то сумма (1) точна на g и g принадлежит $\ker \wp_n = \{f \in C \mid \wp_n(f) = 0\}$.

Квадратурная сумма (1) называется *сходящейся* (или *допустимой*) на элементе f из C , если $\wp_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Порядок убывания $\wp_n(f)$ к нулю

при $n \rightarrow \infty$ зависит как от наличия информации о подынтегральном выражении, так и от конструктивных особенностей суммы (1). Хотя каждый выбор квадратурной суммы есть акт чистого произвола и случая, он детерминирован и прежде всего той частью информации о подынтегральном выражении в (1), на которую мы намерены безусловно опереться в оценке величины $|\wp_n(f)|$ функционала погрешности. Последствия любого выбора не бывают только положительными: всегда приходится амортизировать негативные и выбирать то, что предпочтительнее на практике.

При этом на практическое использование суммы (1) имеется запрет.

Теорема [1]. *Ни для какой системы узлов и коэффициентов функционал погрешности $\wp_n(f)$ не стремится сильно к нулю на C . Более того, всегда*

$$\|\wp_n\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt + \sum_{k=1}^n |c_k|. \quad (3)$$

Равенство (3) свидетельствует о том, что, не располагая никакой информацией о подынтегральной функции f (кроме ее непрерывности), никаким набором заданным набором узлов и коэффициентов нельзя обеспечить вычисление интеграла суммой (1). Впрочем, столь неутешительный в своей определенности результат не так уж и трагичен для практики. Справедлив другой, более ценный для приложений, факт [7], состоящий в том, что проблема (1) всегда разрешима в слабом смысле: существуют системы узлов и весов такие, что $\wp_n(f) \rightarrow 0$ поточно (слабо) в C при $n \rightarrow \infty$. Результат этот тем более важен, что обычно на практике приходится иметь дело как раз не со всем пространством C , а лишь с некоторой его частью $X \subset C$ — классом подынтегральных функций — и часто для элементов X уже можно указать эффективный порядок убывания $\wp_n(f)$ к нулю при $n \rightarrow \infty$. Акт объединения таких функций в класс X (подынтегральных функций) обычно завершается выяснением того характеристического свойства, которым обладают все элементы X в условиях допустимости квадратурной суммы (1), т. е. выполнением равенства

$$\sup_{f \in X} \wp_n(f) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть X — компакт в C . Тогда условие (4) выполнено и нет особой необходимости задавать элементы X точно: их вполне можно задавать приближенно элементами линейных конечномерных подпространств $\mathcal{P}^n \subset C$, но используя информацию об их принадлежности компактному X . При этом известно [8], что если последовательность $\{\mathcal{P}^n\}$ исчерпывает C , т. е. $\mathcal{P}^{n+1} \subseteq \mathcal{P}^n$ и $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}^n = C$, то для любого f из C верно $E(f, \mathcal{P}^{n+1}) \leq E(f, \mathcal{P}^n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f, \mathcal{P}^n) = 0$ (теорема Вейерштрасса). Вдобавок алгебраический многочлен как аппарат приближения гладких функций на конечном отрезке аппроксимативно универсален в C [9] и потому проблема приближенного вычисления интеграла (1) обретает следующую формулировку: построить квадратурную сумму (1), предполагая, что X — компакт в C и сумма (1) точна на элементах из подпространства $\mathcal{P}^n \subseteq \ker \wp_n$.

Квадратурную сумму (1), точную на подпространстве $\mathcal{P}^n$ алгебраических многочленов степени не выше $n-1$, $n > 0$, построим следующим способом. По фиксированным и несовпадающим узлам $t_1, \dots, t_n$ на I определим многочлен $\omega_n(t) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n)$, а затем по значениям $Jf = (f(t_1), \dots, f(t_n))$

функции f в этих узлах построим интерполяционный многочлен в форме Лагранжа:

$$p_n(t) \equiv p_n(t; Jf) = \sum_{k=1}^n f(t_k) l_{nk}(t), \quad l_{nk}(t) = \frac{\omega_n(t)}{\omega'_n(t_k)(t - t_k)}. \quad (5)$$

Здесь $l_{nk}(t)$ – фундаментальные многочлены лагранжевой интерполяции, образующие базис в $\mathcal{P}^n$, и $l_{nk}(t_j) = \delta_{kj}$, $k, j = 1, 2, \dots, n$.

Известно [1], что практическая ценность разбиений отрезка I определяется порядком роста при $n \rightarrow \infty$ констант Лебега $\|p_n\| = \max_{t \in I} \sum_{k=1}^n |l_{nk}(t)|$. При этом разбиения, наиболее стесняющие рост $\|p_n\|$, характеризуются близостью констант Лебега к абсолютной нижней границе $(1/8\sqrt{\pi}) \ln n$ (Лозинский – Харпиладзе [8]). Последняя реализуется, к примеру, на разбиениях I нулями классических многочленов $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ и $(t^2 - 1)U_{n-1}(t)$ (здесь $U_{n-1}(t) = \sin(n \arccos t)/\sqrt{1 - t^2}$) [1].

Вычисляя весовые коэффициенты в (1) по формулам

$$c_k = \int_{-1}^{+1} r(t) l_{nk}(t) dt = \frac{1}{\omega'_n(t_k)} \int_{-1}^{+1} r(t) \frac{\omega_n(t)}{t - t_k} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

построим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{+1} r(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) + \wp_n(f). \quad (7)$$

Формулу (7) с коэффициентами (6), т. е. точную на многочленах степени не выше $n - 1$ ($n > 0$), назовем *интерполяционной квадратурной формулой*.

При этом оценка ее функционала погрешности (2) будет выглядеть так:

$$|\wp_n(f)| \leq \|\wp_n\| E_n(f), \quad \|\wp_n\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt + \sum_{k=1}^n |c_k|, \quad f \in X. \quad (8)$$

Оценка (8) в целом правильно отражает все особенности функционирования интерполяционного квадратурного процесса (7). Замечательность ее — это факторизуемость в произведение двух фактически независимых сомножителей $\|\wp_n\|$ и $E_n(f)$. При этом если первый $\|\wp_n\|$ напрямую связан с выбором разбиения отрезка I (или базиса в $\mathcal{P}^n$), то второй $E_n(f)$ от выбора базиса в $\mathcal{P}^n$ не зависит и характеризуется исключительно свойствами гладкости подынтегральной функции f из X .

Квадратурный процесс (7) как метод приближенного вычисления интеграла должен быть устойчив к ошибкам округлений. Под этим обычно подразумевается то, что с ростом числа узлов n результат осуществляемых вычислений должен слабо зависеть как от вариации узлов, так и значений в них непрерывной функции f . В литературе результаты о распространении ошибок округления в задании весовых коэффициентов в квадратурных формулах представлены очень фрагментарно и скупо. По традиции и мы остановимся только на вариации значений функции $f(t)$ в узлах [6].

Поэтому, приняв сумму (7) в качестве метода приближенного вычисления интеграла (1), значение числа ее узлов n следует выбирать в зависимости от той

точности $\varepsilon > 0$, с которой желаем получить ответ. Учитывая это и то, что вычисления всегда производятся с конечным числом значащих цифр, с определенной точностью $\delta > 0$ следует задавать и значения функции f в узлах. Оценку снизу допускаемой при этом ошибки получим, исходя из следующих соображений. Поскольку принятый способ вычисления интеграла состоит в его замене квадратурной суммой (7), минимально допускаемая ошибка подынтегральной функции f в узлах не может быть меньше $E_n(f)$, так как это свидетельствовало бы о том, что принятый способ приближения непрерывной функции f многочленами «плох». Следовательно, задавать в узлах функцию f с точностью, меньшей $E_n(f)$, нецелесообразно. Поэтому стоит принять $\delta = E_n(f)$, но тогда $\varepsilon \geq E_n(f) \sum_{k=1}^n |c_k|$.

Из проведенного анализа совершенно ясно, что накопление ошибок округления при вычислении интеграла по формулам (7) существенно зависит от весовых коэффициентов $|c_k|$, $1 \leq k \leq n$. Так, если сумма $\sum_{k=1}^n |c_k|$ велика, то даже малые погрешности в значениях $f(t_k)$ могут вызвать большую погрешность в приближенном значении интеграла. Вследствие этого наиболее благоприятными для вычислений окажутся как раз те из формул (7), для которых $\sum_{k=1}^n |c_k| \leq A$ (A — абсолютная постоянная). Вдобавок ограниченность сумм $\sum_{k=1}^n |c_k|$ определяет и границы практической применимости формул (7). Поэтому, вычисляя эту сумму заранее, мы стремимся как бы предвидеть качество будущих вычислений, прежде чем они будут совершены фактически, т. е. величина сумм $\sum_{k=1}^n |c_k|$ может служить эффективным средством испытания пригодности формул (7) для реальных вычислений.

Впрочем, если ограниченности суммы $\sum_{k=1}^n |c_k|$ вполне достаточно для намерений чисто теоретических, то для реальных цифровых вычислений вопрос нахождения нижней ее границы имеет принципиальное значение. Кроме того, на практике целесообразно отдавать предпочтение тем квадратурным формулам, у которых величина $\sum_{k=1}^n |c_k|$ имеет наименьшее значение. В одном частном случае это значение легко вычисляется. Так, если $r(t) > 0$, то в силу условия $1 \in \ker \wp_n$ минимальное значение суммы достигается тогда, когда все c_k в (7) положительны. В итоге $\sum_{k=1}^n |c_k| = \int_{-1}^{+1} r(t) dt$ и квадратурные формулы с положительными коэффициентами имеют особо важное значение для приложений.

Напротив, наличие в сумме (7) отрицательных квадратурных коэффициентов служит серьезным предупреждением о том, что существует опасность нарушения правильности работы квадратурной формулы. Так, из условия $1 \in \ker \wp_n$ следует, что если среди коэффициентов c_k имеются отрицательные, то при всех n будет заведомо выполняться неравенство $\sum_{k=1}^n |c_k| \geq \int_{-1}^{+1} r(t) dt$. Вследствие этого величина $\sum_{k=1}^n |c_k|$ может оказаться значительной (и даже зависящей от n), что является большим дефектом квадратурной суммы [10]. В силу этой особен-

ности лучшей среди интерполяционных квадратурных формул (7) следует признать ту формулу, которая точна на максимально широком из подпространств $\mathcal{P}^m \subseteq \ker \wp_n$ ($m < n$) и для которой выполняется $\sum_{k=1}^n |c_k| \leq A$ ($A > 0$ — абсолютная константа).

Постановка проблемы в такую плоскость отвечает насущным потребностям вычислительной практики и, как показано в [1], кардинально меняет взгляд на роль избыточной (экстраординарной) информации об элементах компакта X .

Возникают, однако, вопросы. Насколько следует быть осмотрительным в отборе узлов (или базиса в $\mathcal{P}^n$), если изменяется сам вес $r(t)$ в (1)? Можно ли узлы подобрать так, чтобы выполнение оценки $\|\wp_n\| \leq A$ обеспечивалось с достаточно произвольным весом $r(t)$ и наименьшей постоянной A ?

Основной результат. Следующий результат, оставляя сравнительно мало возможностей для конкретного выбора узлов на отрезке I , выстраивает разрешения этих вопросов.

Теорема 1. Если $r(t)$ — суммируемая на отрезке I функция и, кроме того, $r(t)$ из L_p ($1 < p < \infty$), то интерполяционная квадратурная формула (7), построенная по нулям многочлена $T_n(t)$ или $U_{n-1}(t)(t^2 - 1)$ ($n > 1$), ненасыщаема и хорошо обусловлена, т. е. существует абсолютная, не зависящая от n , константа A и $\|\wp_n\| \leq A$.

Доказательство. Ненасыщаемость квадратурных формул (7) доказана в [4].

Докажем их хорошую обусловленность. Действительно, для любой непрерывной функции f последовательно имеем

$$\begin{aligned} \wp_n(f) &= \int_{-1}^{+1} r(t)f(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) = \int_{-1}^{+1} r(t)[f(t) - p_n(t, Jf)] dt \\ &= \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{1/2} r(t)[f(t) - p_n(t, Jf)](1-t^2)^{-1/2} dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись весовым неравенством Гёльдера, теоремами Эрдеша — Фельдхайма [11] и Варма — Вертези [12], при $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ($p, q > 1$) получаем

$$\begin{aligned} |\wp_n(f)| &\leq \left(\int_{-1}^{+1} \frac{|r(t)|^p (1-t^2)^{p/2}}{(1-t^2)^{1/2}} dt \right)^{1/p} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{|f(t) - p_n(t, Jf)|^q}{(1-t^2)^{1/2}} dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{-1}^{+1} |r(t)|^p (1-t^2)^{(p-1)/2} dt \right)^{1/p} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{|f(t) - p_n(t, Jf)|^q}{(1-t^2)^{1/2}} dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-1}^{+1} |r(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{|f(t) - p_n(t, Jf)|^q}{(1-t^2)^{1/2}} dt \right)^{1/q} \rightarrow 0 \quad \forall f \in C, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью теоремы Банаха — Штейнгауза приходим к требуемому результату. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Квадратурный процесс (7) допустим для всех f из C . При этом

$$|\wp_n(f)| \leq \|\wp_n\| E_n(f), \quad \|\wp_n\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt + \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Доказательство вытекает из равенства

$$\wp_n(f) \equiv \int_{-1}^{+1} r(t)f(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) = \int_{-1}^{+1} r(t)[f(t) - p_n(t)] dt - \sum_{k=1}^n c_k[f(t_k) - p_n(t_k)],$$

справедливого для любого полинома $p_n(t)$ из $\mathcal{P}^n$, и определения наилучшего чебышёвского приближения $E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathcal{P}^n} \|f - P_n\|$ непрерывной функции f .

Замечание 1. Согласно следствию 1 с ростом числа узлов n скорость убывания к нулю погрешности $\wp_n(f)$ ненасыщаемой квадратурной формулы (7) с увеличением запаса гладкости подынтегральной функции f только возрастает и достижение нужной точности может происходить при небольших n . Кроме того, если функция f принадлежит $C^\infty[I]$, то погрешность $\wp_n(f)$ убывает к нулю с ростом числа узлов n экспоненциально быстро [4]. Это принципиально отличает ненасыщаемые формулы (7) от квадратурных формул с главным членом погрешности, т. е. насыщаемых.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 справедливо следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |c_k| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt. \quad (9)$$

Доказательство. Полагая $\omega_n(t) = T_n(t)$ в формулах (6), получим

$$c_k = \frac{1}{T'_n(t_{n,k})} \int_{-1}^{+1} r(t) \frac{T_n(t)}{t - t_{n,k}} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Здесь

$$t_{n,k} = \cos \theta_{n,k}, \quad \theta_{n,k} = \frac{\pi(2k-1)}{2n}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (11)$$

— нули многочлена Чебышёва $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ первого рода.

Далее, положив $y \equiv t_{n,k}$ в формуле Кристоффеля — Дарбу [13, п. 10.11, формула 17]

$$2 \sum_{j=0}^n {}' T_j(t) T_j(y) = \frac{T_{n+1}(t) T_n(y) - T_n(t) T_{n+1}(y)}{t - y},$$

найдем

$$2 \sum_{j=0}^n {}' T_j(t) T_j(t_{n,k}) = - \frac{T_n(t) T_{n+1}(t_{n,k})}{t - t_{n,k}}$$

(здесь и далее штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом $j = 0$ присутствует в сумме с коэффициентом $1/2$).

В результате квадратурные коэффициенты (10) будут иметь вид

$$c_k = -\frac{2}{T'_n(t_{n,k})T_{n+1}(t_{n,k})} \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{j=0}^n T_j(t_{n,k})T_j(t) \right) r(t) dt.$$

Используя определения

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad T'_n(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

и равенства (11), найдем

$$T'_n(t_{n,k}) = T'_n(\cos \theta_{n,k}) = \frac{n(-1)^{k-1}}{\sin \theta_{n,k}},$$

$$T_{n+1}(t_{n,k}) = \cos(n+1)\theta_{n,k} = (-1)^{k-1} \sin \theta_{n,k}.$$

В итоге коэффициенты (10) перепишутся в таком виде:

$$c_k = -\frac{2}{n} \sum_{j=0}^n T_j(t_{n,k}) \int_{-1}^{+1} r(t)T_j(t) dt = -\frac{2}{n} \sum_{j=0}^n a_j T_j(t_{n,k}).$$

Здесь обозначено

$$a_j = \int_{-1}^{+1} r(t)T_j(t) dt, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (12)$$

Полагая в (12) $t = \cos \theta$ и переходя от промежутка интегрирования $I \equiv [-1, 1]$ к окружности $S \equiv [0, 2\pi]$, выразим a_j через коэффициенты Фурье четной 2π -периодической функции $R(\theta) = (\pi/2)r(\cos \theta)|\sin(\theta)|$ из $L_p[S]$ ($1 < p < \infty$):

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(\theta) \cos j\theta d\theta, \quad 0 \leq j \leq n.$$

В результате коэффициенты c_k в формуле (7) по узлам (11) перепишутся так:

$$c_k = -\frac{2}{n} V_n^R(\theta_{n,k}), \quad V_n^R(\theta) = \sum_{j=0}^n a_j \cos j\theta.$$

Отсюда получим следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^n |c_k| = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n |V_n^R(\theta_{n,k})|. \quad (13)$$

Поскольку $V_n^R(\theta)$ — четная периодическая функция, правую часть равенства (13) распространим на весь промежуток $[-\pi, \pi]$, условившись надлежащим образом о смысле обозначений: $\theta_{n,-k} = \theta_{n,k}$. Окончательно равенство (13) предстанет в виде

$$\sum_{k=1}^n |c_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |V_n^R(\theta_{n,\pm k})|,$$

где правая часть вычисляется уже в $2n$ узлах равномерного разбиения S .

Установим (9) или, что то же самое, справедливость равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |c_k| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |R(\theta)| d\theta. \quad (14)$$

Доказательство (14) основано на неравенстве Марцинкевича [14, гл. X, п. 7, теорема 7.5] для тригонометрического полинома $V_n^R(\theta)$ степени не выше n и теореме сходимости в $L_p[S]$ ($1 < p < \infty$) ряда Фурье четной периодической функции $R(\theta)$.

Действительно, пусть n и m — любые целые положительные числа. Тогда справедлива цепочка следующих элементарных неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |V_n^R(\theta_{n,\pm k})| - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |R(\theta)| d\theta \right| &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |V_n^R(\theta_{n,\pm k}) - V_m^R(\theta_{n,\pm k})| \\ &+ \left| \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |V_m^R(\theta_{n,\pm k})| - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_m^R(\theta)| d\theta \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_m^R(\theta) - R(\theta)| d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — малое наперед заданное число. Покажем, что m можно подобрать так, что для любого $n \geq m$ каждое слагаемое в правой части (15) можно сделать меньше ε .

Первое слагаемое правой части неравенства (15) оценивается с помощью неравенства Марцинкевича [15, гл. II, § 2, формула 47]:

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N \left| V\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right| \leq 3 \int_{-\pi}^{\pi} |V(\theta)| d\theta, \quad N \geq 2n, \quad (16)$$

которое справедливо для всякого тригонометрического полинома $V(\theta)$ порядка не выше n , вычисленного в узлах равномерной решетки разбиения окружности S .

Полагая в (16) $V(\theta) \equiv V_n^R(\theta) - V_m^R(\theta)$ и выбирая $n \geq m$, в силу неравенства Гёльдера и сходимости в $L_p[S]$ ($1 < p < \infty$) ряда Фурье функции $R(\theta)$ получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |V_n^R(\theta_{n,\pm k}) - V_m^R(\theta_{n,\pm k})| d\theta &\leq \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n^R(\theta) - V_m^R(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n^R(\theta) - R(\theta)| d\theta + \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_m^R(\theta) - R(\theta)| d\theta \\ &\leq 3 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n^R(\theta) - R(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p} + 3 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_m^R(\theta) - R(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p} \leq 6\varepsilon. \end{aligned}$$

Также легко оценивается и последнее слагаемое правой части (15):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n^R(\theta) - R(\theta)| d\theta \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_n^R(\theta) - R(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad n \geq m.$$

Наконец, второе слагаемое правой части (15) можно сделать произвольно малым, выбирая $n \geq m$ достаточно большим, поскольку сумма $\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n |V_m^R(\theta_{n,\pm k})|$ является суммой Римана интеграла $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_m^R(\theta)| d\theta$ от непрерывной функции (полинома) $|V_m^R(\theta)|$.

Собирая все предыдущие неравенства, для достаточно больших $n \geq m$ получим

$$\left| \sum_{k=1}^n |c_k| - \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n |c_k| - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |R(\theta)| d\theta \right| \leq 6\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 8\varepsilon.$$

Что касается другого указанного в теореме 1 выбора узлов, то для него доказательство теоремы 2 осуществляется аналогичным способом.

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие принадлежности веса $r(t)$ пространству $L_p[I]$ ($1 < p < \infty$) несколько сильнее абсолютной интегрируемости, но на практике оно обычно удовлетворяется с некоторым $p > 1$. К примеру, если $r(t) = |t|^\alpha$, $\alpha > -1$, то $r(t)$ будет из $L_p[I]$ для $1 < p < 1/|\alpha|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Основная трудность при построении ненасыщаемых квадратурных формул (7) возникает при отыскании их квадратурных коэффициентов c_k . Особый интерес представляют методы точного вычисления c_k . Идея одного такого метода принадлежит Г. Н. Пыхтееву [16] и состоит в эффективном сведении интегралов типа Коши по разомкнутому контуру (6) к интегралам Коши мероморфных в единичном круге функций. На этом пути были построены ненасыщаемые квадратурные формулы с весовыми функциями $r(t) \equiv -\ln |t|$ и $r(t) \equiv 1$, имеющими важные приложения в вычислительной гидродинамике [3].

В заключение отметим, что полученные результаты свидетельствуют о том, что без высококачественной (ненасыщаемой) конструкции квадратурной формулы, учитывающей как имеющиеся запасы гладкости подынтегральной функции, так и специфику ее компьютерной реализации, рассчитывать в приближенном вычислении интеграла можно лишь на удачу, а не на гарантированный успех.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. (2-е изд.: М.; Ижевск: РХД, 2002).
2. Белых В. Н. Ненасыщаемый численный метод решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1234–1252.
3. Белых В. Н. К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // Прикл. математика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 56–67.
4. Белых В. Н. Ненасыщаемые квадратурные формулы на отрезке (к проблеме К. И. Бабенко) // Докл. АН. 2016. Т. 467, № 5. С. 509–513.
5. Годунов С. К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
6. Васкевич В. Л. Гарантированная точность вычисления многомерных интегралов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2003. 243 с. (РГБ ОД, 71:04-1/275).

7. Вейль Г. О равномерном распределении чисел по модулю один // Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 58–93.
8. Даугавет И. К. Введение в классическую теорию приближения функций. СПб: СПбГУ, 2011.
9. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
10. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
11. Erdős P., Feldheim E. Sur le mode de convergence pour l'interpolation de Lagrange // C. R. Acad. Sci. Paris. 1936. V. 203. P. 913–915.
12. Varma A. K., Vértesi P. Some Erdős–Feldheim type theorems on mean convergence of Lagrange interpolation // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. P. 68–79.
13. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 2.
15. Lozinski S. On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes // Мат. сб. 1944. Т. 14, № 3. С. 175–268.
16. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру // Appl. Math. 1965. V. 10, N 4. P. 351–372.

Статья поступила 18 мая 2017 г.

Бельх Владимир Никитич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru