Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 512.55

АЛГЕБРЫ ЛИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ НЕНУЛЕВЫМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ ПОЛЯ

А. Г. Гейн

Аннотация. На конечномерной ассоциативно-коммутативной алгебре A над полем F посредством ненулевого дифференцирования D определена структура алгебры Ли. Если A является полем, а $\operatorname{char} F > 3$, то соответствующая алгебра проста и является аналогом алгебры Цассенхауза $W_1(m)$, но ей не изоморфна.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.505

Ключевые слова: простая алгебра Ли, дифференцирование поля, алгебра Цассенхауза, A-алгебра.

В 1990 г. на IV Всесоюзной школе по алгебрам Ли А. И. Кострикин в своем докладе обратил внимание слушателей на конструкцию, позволяющую получать алгебру Ли из ассоциативно-коммутативной алгебры с помощью нетривиального дифференцирования этой алгебры. Опишем эту конструкцию.

Пусть A — ассоциативно-коммутативная алгебра над полем F, D — ее ненулевое дифференцирование (т. е. линейное отображение $A \to A$, удовлетворяющее условию $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для любых элементов a, b из A). Через $A^{(D)}$ обозначим линейную алгебру над тем же полем, в которой операция умножения заменена операцией $\circ$, определяемой формулой $a \circ b = D(a)b - aD(b)$. Легко убедиться, что относительно операции $\circ$ алгебра $A^{(D)}$ является алгеброй Ли. Будем говорить, что эта *алгебра индуцирована дифференцированием* D. Первые результаты исследования алгебр, получаемых посредством такой конструкции, были анонсированы в [1], однако развернутой публикации не последовало. Что касается собственно результатов, то они относились к алгебрам над полем нулевой характеристики. Если же обратиться к полям простой характеристики, то в работе [2] 1941 г. Чанг фактически использовал эту конструкцию, взяв в качестве алгебры A алгебру срезанных многочленов $F[x]/x^pF[x]$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики p и вычисление формальной производной в качестве дифференцирования D. Получившаяся алгебра оказалась первой простой неклассической алгеброй Ли (так называемой *алгеброй Витта* $W(1:1)$ или, в других обозначениях, *алгеброй Цассенхауза* $W_1(1)$).

Отметим, что для ассоциативно-коммутативной алгебры A и ее дифференцирования D имеется схожая конструкция, которая позволяет построить алгебру Ли, являющуюся подалгеброй алгебры дифференцирований алгебры A. Опишем ее, следуя [3]. Пусть $a \in A$, через $a * D$ обозначим линейное отображение алгебры A в себя, определенное формулой $(a * D)(x) = aD(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

Легко проверить, что $a * D$ — дифференцирование алгебры A. Кроме того, $[a*D, b*D] = (aD(b) - D(a)b) * D$, где через $[\,,]$ обозначена стандартная операция коммутирования элементов ассоциативной алгебры. Тем самым $\{a * D \mid a \in A\}$ является подалгеброй Ли в алгебре дифференцирований ассоциативной алгебры A. Эту подалгебру обозначим через $A*D$. Очевидно также, что отображение $a \to (-a)*D$ является гомоморфизмом алгебры $A^{(D)}$ на алгебру $A*D$. Его ядро совпадает с аннулятором пространства $D(A)$ в ассоциативной алгебре A, который является D-инвариантным идеалом ассоциативной алгебры A и, конечно, лиевым идеалом алгебры $A^{(D)}$. В [3], как и в [2], в качестве алгебры A рассматривается алгебра разделенных степеней переменной x над полем F характеристики $p > 2$, а в роли D выступает вычисление формальной производной. В этом случае алгебра $A * D$ оказывается изоморфной алгебре Цассенхауза [3, теорема 4.6]. Отметим, что единица алгебры A содержится в $D(A)$, поэтому аннулятор пространства $D(A)$ равен 0 и, следовательно, алгебра $A * D$ изоморфна алгебре $A^{(D)}$. Рассмотрение общего случая ассоциативно-коммутативной алгебры A в [3] проводится в основном в предположении, что поле F совершенно.

В настоящей работе исследуется случай, когда алгебра A является несепарабельным расширением поля F положительной характеристики p. Поскольку поле не имеет собственных идеалов, алгебра $A^{(D)}$ и в этом случае изоморфна алгебре $A * D$.

Напомним, что каждое несепарабельное расширение A поля F содержит в себе наибольшее сепарабельное подрасширение (следуя [4], будем обозначать его через A_0), над которым расширение A, заведомо не совпадающее с A_0, радикально. На A_0 нулевое дифференцирование поля F (а другим ограничение на F дифференцирования алгебры A как алгебры над F быть и не может) продолжается единственным образом, т. е. тоже нулевое. В свою очередь, это дифференцирование допускает ненулевое продолжение до дифференцирования расширения A (см. [4, гл. 5, § 9, предложение 6]). Более того, если A является простым расширением поля A_0, полученного присоединением элемента a, то нулевое дифференцирование D поля A_0 может быть продолжено на A так, что $D(a)$ — любой наперед заданный элемент поля A.

Хотя поле F является подполем поля A, при рассмотрении A как линейного пространства над F будет удобно использовать для единичного элемента поля A специальное обозначение u. Поскольку $D(u) = 0$, то $x \circ u = D(x)$, т. е. D является внутренним дифференцированием алгебры $A^{(D)}$. Это также означает, что алгебра $A^{(D)}$ не может быть абелевой, если $D \neq 0$.

Везде ниже D — ненулевое дифференцирование поля A как ассоциативной алгебры над полем F. Ядро отображения D будем обозначать через $\operatorname{Ker} D$. Оно является подполем поля A (см. [4, гл. 5, § 9, предложение 1]) и содержит в себе подполе A^p (напомним, что через A^p обозначают множество элементов вида x^p, когда x пробегает A). Отметим также, что $A_0 \subseteq A^p$, поскольку отображение $x \to x^p$ является автоморфизмом поля A_0. Через $\operatorname{Nil} D$ будем обозначать нилькомпоненту Фиттинга дифференцирования D. Это пространство так же, как и $\operatorname{Ker} D$, является D-инвариантной подалгеброй в A и подалгеброй в $A^{(D)}$. Поскольку $u \in \operatorname{Ker} D \subseteq \operatorname{Nil} D$, ассоциативная алгебра $\operatorname{Nil} D$ является подполем поля A.

Если L — некоторая алгебра Ли, то через L' обозначен ее коммутант, а через $L^{(k)}$ — k-й член ряда коммутантов. Для элемента x из L через $Z_L(x)$ обозначен централизатор этого элемента в алгебре L.

1. Структура алгебры $A^{(D)}$

Везде ниже A — несепарабельное расширение поля F простой характеристики p.

Лемма 1. *Пусть a — произвольный ненулевой элемент из A, тогда $Z_{A^{(D)}}(a) = a \operatorname{Ker} D$ и $Z_{A^{(D)}}(a)$ — максимальная абелева подалгебра в $A^{(D)}$.*

Доказательство. Пусть x и y — элементы из $\operatorname{Ker} D$. Тогда $ax \circ ay = D(ax)ay - axD(ay) = D(a)xay - axD(a)y = 0$ ввиду коммутативности поля A. Следовательно, $a \operatorname{Ker} D$ — абелева алгебра. Поскольку $u \in \operatorname{Ker} D$, имеем $a \in a \operatorname{Ker} D$, но $a \operatorname{Ker} D$ абелева, так что $a \operatorname{Ker} D \subseteq ZA^{(D)}(a)$.

Так как $0 = D(u) = D(aa^{-1}) = D(a)a^{-1} + aD(a^{-1})$, имеем $D(a^{-1}) = -D(a)a^{-2}$. Пусть $x \in Z_{A^{(D)}}(a)$, т. е. $x \circ a = 0$. Тогда $D(xa^{-1}) = D(x)a^{-1} + xD(a^{-1}) = D(x)a^{-1} - xD(a)a^{-2} = (x \circ a)a^{-2} = 0$. Следовательно, $xa^{-1} \in \operatorname{Ker} D$. Это означает, что $Z_{A^{(D)}}(a) \subseteq a \operatorname{Ker} D$. Полученное равенство подалгебр $a \operatorname{Ker} D$ и $Z_{A^{(D)}}(a)$ означает, что $Z_{A^{(D)}}(a)$ абелева. Тогда она является максимальной абелевой подалгеброй в $A^{(D)}$.

Пусть M — нильпотентная подалгебра в $A^{(D)}$. Выберем элемент a из центра алгебры M. Тогда алгебра M содержится в $Z_{A^{(D)}}(a)$ и, следовательно, по лемме 1 абелева. Это означает, что $A^{(D)}$ является так называемой A-алгеброй. Лиевы A-алгебры активно изучались многими авторами, но преимущественно над совершенными полями.

Наша ближайшая цель — установить простоту алгебры $A^{(D)}$. Нам будут полезны следующие непосредственно проверяемые формулы, которые имеют место, если $p \neq 2$:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ D(y))z - (x \circ D(z))y, \tag{1}$$

$$(x \circ y)z = \frac{1}{2}(x \circ (yz) - y \circ (xz)). \tag{2}$$

Формула (2), в частности, показывает, что $(A^{(D)})'$ является ассоциативным идеалом в A и, следовательно, совпадает с $A^{(D)}$. Значит, лиева алгебра $A^{(D)}$ неразрешима.

Лемма 2. *Если $p > 2$, то любой собственный идеал лиевой алгебры $A^{(D)}$ разрешим.*

Доказательство. Допустим, что $A^{(D)}$ содержит неразрешимый собственный идеал J. Ввиду конечномерности алгебры A найдется такое число k, для которого $(J^{(k)})' = J^{(k)}$. Обозначим $J^{(k)}$ через I. Ясно, что I — ненулевой идеал алгебры $A^{(D)}$.

Пусть x и y — произвольные элементы из I. Тогда по формуле (2) получаем, что $(x \circ y)z \in I$ для любого элемента z из A. Это означает, что $I'A \subseteq I$. Поскольку $I' = I$, полученное включение показывает, что $IA \subseteq I$, т. е. I — ассоциативный идеал алгебры A. Так как поле не имеет собственных идеалов, $I = 0$; противоречие.

Теорема 1. *Пусть A — несепарабельное расширение поля F характеристики $p > 2$, D — его ненулевое дифференцирование. Тогда лиева алгебра $A^{(D)}$ проста.*

Доказательство. Допустим, что $A^{(D)}$ содержит собственный ненулевой идеал J. По лемме 2 он разрешим, т. е. найдется такое n, для которого $J^{(n)} = 0$, а $J^{(n-1)} \neq 0$. Выберем произвольный ненулевой x из $J^{(n-1)}$. Поскольку $J^{(n-1)}$ — идеал в $A^{(D)}$, то $(x \circ z) \in J^{(n-1)}$ для любого элемента z из A. Тогда $x \circ (x \circ z) \in J^{(n)}$, т. е. $x \circ (x \circ z) = 0$. По формуле (1) имеем $x \circ (x \circ z) = (x \circ D(x))z - (x \circ D(z))x$. В свою очередь, $x \circ D(x) = x \circ (x \circ u) = 0$. Следовательно, $(x \circ D(z))x = 0$. Так как x обратим, $x \circ D(z) = 0$ для любого z из A. Формула (1) показывает, что для любых y и z из A выполняется $x \circ (y \circ z) = (x \circ D(y))z - (x \circ D(z))y = 0$. Значит, $x \circ (A^{(D)})' = 0$, т. е. $(A^{(D)})' \subseteq Z_{A^{(D)}}(x)$. По лемме 1 $(A^{(D)})'$ абелев, что противоречит неразрешимости алгебры $A^{(D)}$.

В дальнейшем важную роль играет соотношение между $\operatorname{Ker} D$ и $\operatorname{Nil} D$.

Лемма 3. $\operatorname{Nil} D \neq \operatorname{Ker} D$ *тогда и только тогда, когда существует такой элемент w, для которого $D(w) = u$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Nil} D \neq \operatorname{Ker} D$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \operatorname{Ker} D^2 \setminus \operatorname{Ker} D$. Обозначим $D(x)$ через a. В доказательстве леммы 1 получено соотношение $D(a^{-1}) = -D(a)a^{-2}$, но $D(a) = D^2(x) = 0$, так что $D(xa^{-1}) = D(x)a^{-1} + xD(a^{-1}) = u$. Поэтому на роль w можно взять элемент xa^{-1}.

Обратное утверждение очевидно, ибо $w \in \operatorname{Ker} D^2 \setminus \operatorname{Ker} D$.

Ниже более детально изучим строение алгебры $A^{(D)}$ для простого несепарабельного расширения A поля F.

Лемма 4. *Если A — простое несепарабельное расширение поля F, то* $\operatorname{Ker} D = A^p$.

Доказательство. Пусть v такой элемент, присоединением которого к полю F получено расширение A. Несепарабельность расширения означает, что минимальный многочлен $f(\lambda)$ элемента v является p-многочленом, т. е. содержит переменную только в степенях, кратных p. Пусть $f(\lambda) = \lambda^{kp} + a_1\lambda^{(k-1)p} + \dots + a_{k-1}\lambda^p + a_k$, где $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k \in F$, а $kp = \dim A$ над F. Отметим, что $a_k \neq 0$, поскольку в противном случае элемент v был бы делителем нуля. Ясно также, что система $\{u, v^p, v^{2p}, \dots, v^{(k-1)p}\}$ является базисом линейного пространства A^p. Она линейно независима в силу минимальности многочлена $f(\lambda)$ и, очевидно, служит системой образующих для A^p. Тем самым $\dim_F A^p = k$. Так как $\operatorname{Ker} D$ является собственным подрасширением поля A, содержащим поле A^p, имеем $[A : A^p] = [A : \operatorname{Ker} D][\operatorname{Ker} D : A^p]$. Однако $[A : A^p] = p$ — простое число, так что $\operatorname{Ker} D = A^p$.

Следствие 1. *Если D не нильпотентно, то* $\operatorname{Nil} D = \operatorname{Ker} D$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Nil} D$ — подрасширение поля A, имеем $[A : \operatorname{Ker} D] = [A : \operatorname{Nil} D][\operatorname{Nil} D : \operatorname{Ker} D]$. Однако $[A : \operatorname{Ker} D] = p$ — простое число, так что либо $A = \operatorname{Nil} D$, т. е. D нильпотентно, либо $\operatorname{Nil} D = \operatorname{Ker} D$.

Сочетание следствия 1 и леммы 3 позволяет получить

Следствие 2. *Дифференцирование D нильпотентно на A тогда и только тогда, когда существует $w \in A$, для которого $D(w) = u$. При этом $D^p = 0$.*

В случае нильпотентного дифференцирования нетрудно указать структурный тензор алгебры $A^{(D)}$. Пусть элемент w такой, что $D(w) = u$. Покажем индукцией по i, что система векторов

$$\begin{array}{rccccc} W_i = & \{u, & v^p, & v^{2p}, & \dots, & v^{(k-1)p}, \\ & w, & wv^p, & v^{2p}, & \dots, & wv^{(k-1)p}, \\ & w^2, & w^2v^p, & w^2v^{2p}, & \dots, & w^2v^{(k-1)p}, \\ & & & \dots & & \\ & w^i, & w^iv^p, & w^iv^{2p}, & \dots, & w^iv^{(k-1)p}\} \end{array}$$

линейно независима при всех $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Для $i = 0$ утверждение вытекает из минимальности многочлена $f(\lambda)$. Шаг индукции при $i \geq 1$ легко следует из простого наблюдения, что $D(w^iv^{mp}) = D(w^i)v^{mp} + w^iD(v^{mp}) = iw^{i-1}v^{mp}$, и обратимости i, поскольку оно заключено в пределах от 1 до $p-1$. Заметим, что W_{p-1} содержит ровно kp элементов и, следовательно, является базисом пространства A над F. Соотношение

$$w^iv^{mp} \circ w^jv^{lp} = D(w^iv^{mp})w^jv^{lp} - w^iv^{mp}D(w^jv^{lp}) = (i-j)w^i + jv^{(m+l)p}$$

фактически задает структурный тензор алгебры $A^{(D)}$ с учетом того, что $w^p \in \operatorname{Ker} D$, и потому w^p записывается как значение некоторого p-многочлена $g(\lambda)$ при $\lambda = v$, тем самым $w^{i+j} = g(v)w^{i+j-p}$, если $i+j \geq p$. Аналогично $v^{(m+l)p}$ с помощью многочлена $f(\lambda)$ заменяется линейной комбинацией элементов $u, v^p, v^{2p}, \dots, v^{(k-1)p}$, как только $m + l$ оказывается больше или равным k.

Из указанного соотношения видно, что структурный тензор алгебры $A^{(D)}$ весьма близок к структурному тензору алгебры Витта. Отличие фактически связано с минимальным многочленом $f(\lambda)$, позволяющим выразить v^{kp} через базис пространства $\operatorname{Ker} D$, и p-многочленом $g(\lambda)$, степень которого не превосходит $(k-1)p$, позволяющим, в свою очередь, выразить элемент w^p через базис пространства $\operatorname{Ker} D$. Тем самым структура лиевой алгебры полностью и однозначно определяется p-многочленом $f(\lambda)$, неприводимым над F, и произвольным p-многочленом $g(\lambda)$, степень которого не превосходит степени многочлена $f(\lambda)$.

Схожесть алгебры $A^{(D)}$ с алгеброй Витта особенно видна, если на алгебру $A^{(D)}$ посмотреть со следующей точки зрения. Как было отмечено, $\operatorname{Ker} D$ является подрасширением поля F в поле A. Для краткости обозначим $\operatorname{Ker} D$ через E. Ясно, что алгебру A можно рассматривать как ассоциативную алгебру над E. Полученную алгебру будем обозначать через A_E. Кроме того, поскольку оператор D на множестве E равен 0, имеем

$$ax \circ y = D(ax)y - axD(y) = aD(x)y - axD(y) = a(D(x)y - xD(y)) = a(x \circ y)$$

для любых элементов x и y из A и любого элемента a из E. Поэтому $A^{(D)}$ также можно рассматривать как алгебру Ли над E. Ясно, что при таком рассмотрении эта алгебра представляет собой алгебру $A_E^{(D)}$. Ее размерность над E равна p, и как поле она автоматически является простым радикальным расширением, полученным присоединением к E некоторого элемента b с неприводимым минимальным многочленом $f(\lambda) = \lambda^p - c$, где $c \in E$. Ясно, что базисом линейного пространства A над E является множество $u, b, b^2, \dots, b^{p-1}$. Как и выше, порождающий элемент b можно выбрать так, что $D(b) = u$. Тогда структурный тензор алгебры $A_E^{(D)}$ определяется соотношениями (b^0 обозначает u)

$$b^i \circ b^j = \begin{cases} (i-j)b^{i+j-1}, & \text{если } i+j \leq p, \\ (i-j)cb^{i+j-1}, & \text{если } i+j > p, \end{cases} \tag{3}$$

при всех $0 \le i < p$, $0 \le j < p$. Этот структурный тензор отличается от тензора алгебры Витта только наличием ненулевой константы c из поля E, над которым рассматривается данная алгебра. Особенно легко видеть схожесть построенной алгебры с алгеброй Витта, если переобозначить базисные векторы этой алгебры: $y_{-1} = u$, $y_i = b^{i+1}$ для $0 \le i \le p-2$. В этом случае структурный тензор запишется в виде

$$y_i \circ y_j = \begin{cases} (i-j)y_{i+j}, & \text{если } i+j \le p-2, \\ (i-j)cy_{i+j-p}, & \text{если } i+j > p-2, \end{cases} \tag{4}$$

при всех $-1 \le i < p-1$, $-1 \le j < p-1$. Отметим, что в случае $p = 3$ алгебра $A_E^{(D)}$ является классической простой трехмерной расщепляемой алгеброй.

Пусть дифференцирование D не нильпотентно на A. В этом случае также можно рассматривать алгебру $A_E^{(D)}$. Выберем $w \notin E$. Тогда элементы $u, w, w^2, \dots, w^{p-1}$ образуют базис пространства A над полем E, ибо $\dim_E A = p$ и, значит, A не имеет собственных подрасширений поля E. Кроме того, минимальным многочленом элемента w служит неприводимый многочлен $\lambda^p - e$, где $e \in E$. Обозначим через z элемент $D(w)^{-1}$. Положим $y_i = w^i z$, где $0 \le i < p-1$. Тогда

$$\begin{aligned} y_i \circ z = D(y_i)z - y_i D(z) = (D(w^i)z + w^i D(z))z - y_j D(z) \\ = iw^{i-1}z^{-1}z^2 + y_i D(z) - y_i D(z) = y_{i-1}. \end{aligned}$$

Поскольку элементы $u, w, w^2, \dots, w^{p-1}$ образуют базис пространства A над полем E, элементы $z = y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$ также образуют базис пространства A над полем E. Кроме того,

$$\begin{aligned} y_i \circ y_j = D(y_i)y_j - y_i D(y_j) = (D(w^i)z + w^i D(z))w^j z - w^i z(D(w^j)z + w^j D(z)) \\ = iw^{i-1}z^{-1}zw^j z - jw^i zw^{j-1}z^{-1}z + w^{i+j}zD(z) - w^{i+j}zD(z) = (i-j)w^{i+j-1}z. \end{aligned}$$

Следовательно, в базисе $y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$ структурный тензор алгебры $A_E^{(D)}$ имеет вид

$$y_i \circ y_j = \begin{cases} (i-j)y_{i+j-1}, & \text{если } i+j \le p, \\ (i-j)ey_{i+j-1-p}, & \text{если } i+j > p, \end{cases} \tag{5}$$

при всех $0 \le i < p$, $0 \le j < p$. Это означает, что алгебра $A_E^{(D)}$ изоморфна алгебре $A_E^{(\overline{D})}$ для нильпотентного дифференцирования $\overline{D}$ поля A, у которого $\overline{D}(w) = u$. Нетрудно видеть, что в этом случае алгебра $A^{(D)}$ изоморфна алгебре $A^{(\overline{D})}$.

Отметим, что последнее утверждение дает ответ на сформулированный в [5] вопрос, изоморфны ли алгебры Ли, полученные посредством ненильпотентного и нильпотентного дифференцирований.

2. Подалгебры и s.c.a.n-элементы алгебры $A^{(D)}$

Пусть A — несепарабельное расширение степени p над некоторым полем F характеристики $p > 2$, т. е. $\dim_F A = p$ и, в частности, A не содержит собственных подрасширений поля F.

Пусть D — ненулевое нильпотентное дифференцирование поля A, рассматриваемое как алгебра над F. Из результатов разд. 1 следует, что $A^{(D)}$ — простая алгебра, а $\operatorname{Ker} D = Fu$. Согласно следствию 2 существует такой элемент $w \in A$, для которого $D(w) = u$. В этом случае элемент w является порождающим для поля A как ассоциативной алгебры над F, а его минимальный многочлен имеет вид $\lambda^p - c$, где $c \in F$. Как показано в разд. 1, беря в качестве базиса линейного пространства A элементы $y_{-1} = u$, $y_i = w^{i+1}$ для $0 \le i \le p-2$, имеем для алгебры $A^{(D)}$ структурный тензор, описываемый формулами (4).

Ввиду леммы 1 элемент u в такой алгебре $A^{(D)}$ самоцентрализуем, а оператор $\operatorname{ad} u$, совпадающий с оператором D, нильпотентен. Элементы с такими свойствами в [3] названы s.c.a.n.-*элементами* (сокращение от self-centralising ad-nilpotent element). Там же была предложена конструкция алгебр Ли, содержащих s.c.a.n.-элемент. В случае, когда размерность алгебры совпадает с характеристикой поля, такая конструкция дает алгебру Цассенхауза $W_1(1)$. Важным свойством алгебр Цассенхауза является наличие в ней подалгебры коразмерности 1. Как показано в [6], над совершенным полем наличие в простой алгебре подалгебры коразмерности 1 означает, что сама алгебра является либо классической трехмерной простой расщепляемой алгеброй, либо алгеброй Цассенхауза. Доказываемая ниже теорема показывает, что алгебра $A^{(D)}$ не изоморфна никакой алгебре Цассенхауза.

Теорема 2. *Алгебра $A^{(D)}$ при $p > 3$ и нильпотентном дифференцировании D не содержит подалгебр коразмерности* 1.

Доказательство. Предположим, что алгебра $A^{(D)}$ содержит подалгебру H коразмерности 1. Выберем вектор $x \in H \setminus (Fy_0 + Fy_{-1})$. Тогда вектор x запишется как $\beta y_{-1} + \gamma y_0 + \sum \alpha_i y_i$, где $0 < i < p-2$ и хотя бы один из коэффициентов α_i ненулевой. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $y_0 \in H$. Тогда для каждого ненулевого коэффициента α_i в указанном представлении элемента x соответствующий элемент y_i принадлежит H, поскольку является собственным вектором оператора $\operatorname{ad} y_0$ с собственным числом i. Если при этом β также не равен 0, то $y_{-1} \in H$. Так как в H содержится элемент y_i для некоторого положительного i, применение оператора $\operatorname{ad} y_{-1}$ нужное число раз позволяет сделать вывод, что $y_1 \in H$. Однако при $p > 3$ пространство $Fy_1 + Fy_0 + Fy_{-1}$ не может исчерпывать пространство H, поэтому аналогичными рассуждениями легко показать, что y_2 также содержится в H. Но тогда $H = A^{(D)}$, что противоречит выбору H. Если для любого элемента $x \in H \setminus (Fy_0 + Fy_{-1})$ коэффициент β равен 0, то H содержится в линейной оболочке векторов $y_0, y_1, \ldots, y_{p-2}$ и, значит, совпадает с ней. Тогда $y_{p-2} \circ y_1 = (p-3)cy_{-1}$, поэтому $y_{-1} \in H$ и снова $H = A^{(D)}$, что противоречит выбору H.

2. Пусть $y_{-1} \in H$, а $y_0 \notin H$. Пусть k — наибольшее положительное число, для которого $\alpha_k \ne 0$. Тогда

$$x \operatorname{ad} y_{-1} = \gamma y_{-1} + 2\alpha_1 y_0 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i (i+1) y_{i-1} \in H.$$

Поскольку $k+1 < p$, элемент x можно заменить на $\frac{1}{k+1}x$ и к этому элементу снова применить $\operatorname{ad} y_{-1}$. «Последним» слагаемым в полученной сумме будет y_{k-2}. Повторяя эту процедуру, получим элемент $\mu y_{-1} + \nu y_0 + \alpha_k y_1$, принадлежащий H (через μ и ν обозначены коэффициенты, появившиеся в результате применения указанной процедуры). Применяя к этому элементу $\operatorname{ad} y_{-1}$, получим $\nu y_{-1} + 2\alpha_k y_0$. Но тогда $y_0 \in H$, что противоречит п. 1.

3. Поскольку коразмерность пространства H равна 1, $H \cap (Fy_0 + Fy_{-1}) \ne 0$. Из рассмотрений в пп. 1 и 2 следует, что H содержит элемент $y_0 + \alpha y_{-1}$, где

$\alpha \in F$, причем $\alpha \neq 0$. Более того, $H \cap (Fy_0 + Fy_{-1}) = F(y_0 + Fy_{-1})$. Так как $\dim(H \cap (Fy_1 + Fy_0 + Fy_{-1})) = 2$, пространство H содержит элемент $y_1 + \gamma y_0$ для некоторого $\gamma \in F$. Тогда $(y_1 + \gamma y_0) \circ (y_0 + \alpha y_{-1}) \in H$. В то же время

$$(y_1 + \gamma y_0) \circ (y_0 + \alpha y_{-1}) = y_1 + 2\alpha y_0 + \gamma\alpha y_{-1} \in H \cap (Fy_1 + Fy_0 + Fy_{-1}).$$

Следовательно,

$$(y_1 + 2\alpha y_0 + \gamma\alpha y_{-1}) - (y_1 + \gamma y_0) - \gamma(y_0 + \alpha y_{-1}) = 2(\alpha - \gamma)y_0 \in H.$$

В силу п. 1 $\gamma - \alpha = 0$. Тем самым $y_1 + \alpha y_0 \in H$. Покажем индукцией по i, что $y_i + \alpha y_{i-1} \in H$ для всех $i < p-1$. Поскольку $\sum\limits_{k=-1}^{i} Fy_k$ не содержится в H, имеем $\dim\left(H \cap \sum\limits_{k=-1}^{i} Fy_k\right) = i+1$. В силу предположения индукции это означает, что H содержит вектор $y_i + \gamma y_{i-1}$ для некоторого γ. Тогда $(y_i + \alpha y_{i-1}) \circ (y_0 + \alpha y_{-1}) \in H$. Поскольку

$$(y_i + \gamma y_{i-1}) \circ (y_0 + \alpha y_{-1}) = iy_i + (i-1)\gamma y_{i-1} + (i+1)\alpha y_{i-1} + i\gamma\alpha y_{i-2} \in H,$$

элемент

$$\begin{aligned}(iy_i + (i-1)\gamma y_{i-1} + (i+1)\alpha y_{i-1} + i\gamma\alpha y_{i-2}) - i(y_i + \gamma y_{i-1}) - i\gamma(y_{i-1} + \alpha y_{i-2}) \\ = (i+1)(\alpha - \gamma)y_{i-1}\end{aligned}$$

также содержится в H. Если $\alpha - \gamma \neq 0$, то $y_{i-1} \in H$, а вместе с ним подпространству H принадлежат все векторы $y_i, y_{i-2}, \dots, y_1, y_0$, что противоречит п. 1. Значит, $\alpha = \gamma$. Наконец, рассмотрим

$$(y_{p-2} + \alpha y_{p-3}) \circ (y_1 + \alpha y_0) = (p-3)cy_{-1} + 2(p-3)\alpha y_{p-2} + (p-3)\alpha^2 y_{p-3} \in H.$$

Имеем

$$(cy_{-1} + 2\alpha y_{p-2} + \alpha^2 y_{p-3}) - \alpha(y_{p-2} + \alpha y_{p-3}) = cy_{-1} + \alpha y_{p-2} \in H.$$

Векторы $y_0 + \alpha y_{-1}, y_1 + \alpha y_0, \dots, y_{p-2} + \alpha y_{p-3}, cy_{-1} + \alpha y_{p-2}$ линейно зависимы, ибо $\dim H = p-1$. Тем самым

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = 0.$$

В то же время этот определитель равен $\alpha^p - c$, что противоречит неприводимости многочлена $\lambda^p - c$.

Для построения конкретного примера такой алгебры $A^{(D)}$ в качестве F можно взять поле рациональных функций $P(t)$ от переменной t над произвольным полем P простой характеристики, большей 3. Тогда в роли A может выступать простое расширение поля F, полученное присоединением корня многочлена $\lambda^p - t$.

Как показано в разд. 1, алгебра $A^{(D)}$, полученная применением ненильпотентного дифференцирования D поля A, изоморфна алгебре $A^{(\overline{D})}$ для подходящего нильпотентного дифференцирования $\overline{D}$. Это означает, что теорема 2 справедлива для произвольного ненулевого дифференцирования D поля A.

В [7, теорема 2.2] показано, что над совершенным полем любая простая алгебра Ли, содержащая подалгебру коразмерности 1, обладает s.c.a.n.-элементом. В свою очередь, из теоремы 7.1 в [3] следует, что над совершенным полем алгебра Ли, обладающая s.c.a.n.-элементом, содержит подалгебру коразмерности 1. Пример алгебры $A^{(D)}$ показывает, что над полем, допускающим несепарабельные расширения, теорема 7.1 не имеет места. Вопрос, существенно ли предположение о совершенности поля в теореме 2.2 в [7], пока открыт.

Пусть A — несепарабельное расширение степени p над некоторым полем F характеристики $p>3$. Изучим строение подалгебр алгебры $A^{(D)}$, полученной применением ненулевого дифференцирования D.

Лемма 5. *Разрешимая подалгебра алгебры $A^{(D)}$ либо одномерна, либо двумерная неабелева.*

Доказательство. Пусть S — разрешимая подалгебра в $A^{(D)}$, x — ненулевой элемент последнего члена ряда коммутантов алгебры S. Тогда $\operatorname{ad} x$ — нильпотентный оператор на S. По лемме 1 x является s.c.a.n.-элементом в S. По теореме 2.8 в [3] $\dim S\le 2$.

Эта же теорема показывает, что любая собственная подалгебра алгебры $A^{(D)}$, содержащая s.c.a.n.-элемент, либо одномерна, либо двумерная неабелева, либо трехмерная простая расщепляемая.

Пусть x — элемент, не являющийся s.c.a.n.-элементом в алгебре $A^{(D)}$. Рассмотрим нилькомпоненту Фиттинга оператора $\operatorname{ad} x$. Это собственная подалгебра алгебры $A^{(D)}$. Обозначим ее через $N(x)$. При этом x является s.c.a.n.-элементом алгебры $N(x)$ и по теореме 2.8 из [3] $N(x)$ либо одномерна, либо двумерная неабелева, либо трехмерная простая расщепляемая. Если $N(x)$ одномерна, т. е. совпадает с Fx, то Fx — картанова подалгебра в $A^{(D)}$. Если $\dim N(x)>1$, то в $N(x)$ существует элемент y, для которого $x\circ y=x$. Обозначим через A_k корневое подпространство оператора $\operatorname{ad} y$ для $0\le k<p$. Хорошо известно, что $A_k\circ A_l\subseteq A_{(k+l)\bmod p}$, так что $\sum\limits_{i=0}^{p-1}A_i$ является подалгеброй в $A^{(D)}$, причем $y\in A_0$, а $x\in A_1$. Если $\dim A_1>1$, то ввиду леммы 1 $A_1\circ A_1\ne 0$ и, значит, $A_2\ne 0$. По той же причине $A_2\circ A_1\ne 0$, т. е. $A_3\ne 0$. Следовательно, все пространства A_k ненулевые. Но тогда $\dim\sum\limits_{i=0}^{p-1}A_i>p=\dim A^{(D)}$; противоречие. Значит, $A_1=Fx$. Допустим, что $A_0\ne Fy$. Если $z\in A_0\setminus Fy$, то $x\circ z\in A_1$, т. е. $x\circ z=\alpha x$ для некоторого α из F. Но тогда $x\circ(z-\alpha y)=0$, что противоречит лемме 1. Тем самым $A_0=Fy$ и потому Fy — картанова подалгебра алгебры $A^{(D)}$.

Лемма 6. *Если S — собственная подалгебра алгебры $A^{(D)}$, то $\dim S\le 3$.*

Доказательство. Допустим, что $\dim S\ge 4$. Тогда S не содержит s.c.a.n.-элементов. Отсюда следует, что S' — простая алгебра. Действительно, если J — ненулевой собственный идеал алгебры S, то рассмотрим ненулевой элемент x, принадлежащий J. С одной стороны, образ пространства S при действии оператора $\operatorname{ad} x$ содержится в J, и, следовательно, $0<\dim S-\dim J\le\dim\operatorname{Ker}\operatorname{ad} x=1$ ввиду леммы 1. Тем самым $\dim S/J=1$, откуда $S'\subseteq J$. Но S не может содержать идеалов коразмерности больше 1, так что $S'=J$. Кроме того, по лемме 5 J не может быть абелевой подалгеброй и иметь собственные идеалы, так как такой идеал имел бы в J коразмерность 1, а тогда J' был бы собственным идеалом алгебры S коразмерности больше 1.

Как известно, любая трехмерная простая алгебра над полем, характеристика которого отлична от 2, совершенна, т. е. выделяется прямым множителем из любой алгебры, в которой она является идеалом. Это означает, что $\dim S' > 3$, ибо в противном случае $S = S' \times Fz$ для некоторого z, что противоречит лемме 1.

Рассмотрим возможные случаи для $N(x) \cap S' \supseteq Fx$.

1. $\dim N(x) \cap S' = 1$, т. е. $N(x) \cap S' = Fx$. Это означает, что S' — простая алгебра ранга 1. Поскольку $\dim S' < p$, алгебра S' трехмерна, что невозможно.

2. $\dim N(x) \cap S' \geq 2$, т. е. $N(x) \cap S' \supseteq Fx + Fy$, где $x \circ y = x$ для некоторого элемента y из S'. Как показано выше, Fy — картанова подалгебра, так что S' снова простая алгебра ранга 1, т. е. S' трехмерна; противоречие.

Замечание. Фактически теорема 2 является следствием леммы 6, но мы привели прямое доказательство, чтобы подчеркнуть роль несепарабельности расширения основного поля.

Теорема 3. *Пусть A — несепарабельное расширение степени p над некоторым полем F характеристики $p > 3$, D — ненулевое дифференцирование поля как алгебры A над F. Тогда любая максимальная собственная подалгебра в лиевой алгебре $A^{(D)}$ либо одномерна, либо трехмерная простая.*

Доказательство. Ввиду леммы 6 достаточно проверить, что любая двумерная неабелева подалгебра алгебры $A^{(D)}$ не является максимальной. Допустим, что это не так, и пусть $Fx+Fy$, где $x \circ y = x$, — максимальная собственная подалгебра в $A^{(D)}$.

Пусть G — алгебраическое замыкание поля F. Рассмотрим алгебру $L = A^{(D)} \otimes G$. Запишем корневое разложение алгебры L относительно $\operatorname{ad} y$:

$$L = L_0 + L_1 + \sum L_\alpha,$$

где суммирование ведется по всем корням α характеристического многочлена оператора $\operatorname{ad} y$, которые отличны от 0 и 1 и не обязательно принадлежат F. При этом, как следует из вышепоказанного, $L_0 = Gy$, а $L_1 = Gx$.

Предположим, что имеется корень α, не принадлежащий F, для которого $L_\alpha \neq 0$. По лемме 1 корень 0 характеристического многочлена оператора $\operatorname{ad} x$ имеет кратность 1, так что $L_\alpha \circ L_1 \neq 0$. Значит, $L_{\alpha+1} \neq 0$, причем $\alpha + 1 \notin F$. Действуя таким же образом, получаем, что $L_{\alpha+2} \neq 0, \dots, L_{\alpha+p-1} \neq 0$. Но тогда $\dim\bigl(L_0 + L_1 + \sum L_\alpha\bigr) \geq p + 2 > \dim L$. Следовательно, все корни характеристического многочлена оператора $\operatorname{ad} y$ принадлежат F. Поэтому имеет место корневое разложение алгебры $A^{(D)}$ относительно оператора $\operatorname{ad} y$:

$$A^{(D)} = A_0 + A_1 + \sum A_\alpha,$$

где суммирование ведется по всем корням α характеристического многочлена оператора $\operatorname{ad} y$, которые отличны от 0 и 1. Выберем α, для которого $A_\alpha \neq 0$. Тогда снова легко видеть, что $A_{\alpha+1} \neq 0$, $A_{\alpha+2} \neq 0$, $\dots$, $A_{\alpha+p-1} \neq 0$. Соображения размерности позволяют утверждать, что $A_{\alpha+i} = A_0$ для некоторого i, т. е. $\alpha = p - i$. Отсюда немедленно следует, что корнями характеристического многочлена оператора $\operatorname{ad} y$ являются $0, 1, 2, \dots, p-1$, а все подпространства $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ одномерны. Но тогда пространство $A_0 + A_1 + A_{p-1}$ является подалгеброй в $A^{(D)}$, содержащей $Fx + Fy$; противоречие.

Из доказательства теоремы непосредственно вытекает

Следствие 3. *Каждая двумерная подалгебра алгебры $A^{(D)}$ содержится ровно в одной трехмерной подалгебре.*

Было бы интересно выяснить, действительно ли алгебра $A^{(D)}$ обладает одномерными максимальными подалгебрами.

Теорема 3 показывает, что алгебра $A^{(D)}$ интересна еще с одной точки зрения. В [8] П. Зусманович определил глубину лиевой алгебры следующим образом: абелевы алгебры имеют глубину 0, алгебра имеет глубину $n > 0$, если она не является алгеброй глубины, меньшей чем n, но все ее собственные подалгебры имеют глубину, меньшую n. Трехмерная простая нерасщепляемая алгебра представляет пример простой алгебры Ли глубины 1, трехмерная простая расщепляемая алгебра — пример простой алгебры глубины 2, алгебра $A^{(D)}$ — пример простой алгебры глубины 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гейн А. Г., Тютин А. Н.* Об алгебрах Ли, получаемых из ассоциативно-коммутативных алгебр с помощью дифференцирования // Алгебра и анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Казань: КГУ, 1994. С. ???.
2. *Chang H. J.* Uber Wittsche Lie–Ringei // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1941. V. 14. P. 151–184.
3. *Benkart G. M., Isaacs I. M., Osborn J. M.* Lie algebras with self-centralising ad-nilpotent elements // J. Algebra. 1979. V. 57. P. 279–309.
4. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
5. *Гейн А. Г.* Простые алгебры Ли, индуцированные ненулевым дифференцированием поля // Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф. (Алматы, 8–9 апреля 2016 г.) Алматы: Мин. образования и науки Республики Казахстан, 2016. С. 20–22.
6. *Джумадильдаев А. С.* Простые алгебры Ли с подалгеброй коразмерности один // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 193–194.
7. *Varea V. R.* Existence of ad-nilpotent elements and simple Lie algebras with subalgebras of codimension one // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 2. P. 363–368.
8. *Zusmanovich P.* Lie algebras with given properties of subalgebras and elements. Cornell Univ. Library, 2011. http://arxiv.org/abs/1105.4284; http://justpasha.org/math/.

Статья поступила 15 сентября 2016 г.

Гейн Александр Георгиевич
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
A.G.Geyn@urfu.ru