Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 510.2+510.3+510.6+51-8+004.8

УСЛОВНЫЕ ТЕРМЫ В СЕМАНТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

С. С. Гончаров

Аннотация. Для построения обогащения языка с ограниченными кванторами расширяется конструкция построения условных термов. Показано, что полученное расширение языка формул с ограниченными кванторами над структурами с наследственно конечными списками является консервативным обогащением.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.506

Ключевые слова: формулы, термы, ограниченные кванторы, Δ_0-формулы, Σ-формулы, семантическое программирование, вычислимость, вычислимость над абстрактными структурами, условные термы.

В [1–6] предложена конструкция языка программирования логического типа для создания систем программирования, обеспечивающих управление сложными системами, в которых управление в различных условиях зависит от типа входных данных, представленных формализмами логического типа на основе логических структур. Для построения теории вычислимости над абстрактными структурами в работах Ю. Л. Ершова [7–9] рассматривалась надстройка из наследственно конечных множеств. В [3, 10] построена надстройка из наследственно конечных списков и разработана теория вычислимости через Σ-определимость в этой надстройке. С точки зрения построения языка программирования такой подход представляется более естественным для сопровождения логических программ, так как при конкретной реализации языка логического типа на множествах нужно внешним образом задавать последовательность эффективного перебора их элементов. При выборе списка элементов порядок уже содержится в модели, и мы имеем определение в модели операций, в явном виде определяющих работу с элементами списка. В [2, 10–12] отмечено, что при реализации логических программ, построенных на основе Σ-определимости, можно рассматривать два различных типа реализации. Первый основан на проверке истинности соответствующих Σ-формул в построенной модели с надстройкой из наследственно конечных списков, что соответствует идее семантического программирования. Он ориентирован на структуру данных и ограничивает проблему поиска решений вычислениями над этой моделью основных термов и проверкой истинности Σ-формул в этой конкретной модели. Другой основан на аксиоматическом задании теории списочной надстройки [11], а именно аксиомах, формируемых диаграммой базисной модели, и аксиомами, определяющих свойства основных операций в списочной надстройке. Здесь применяются методы автоматического доказательства теорем, и этот подход ориентирован на

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01176).

поиск решений для Σ-программ, задаваемых Σ-формулами. Нетрудно видеть [13, 14], что с точки зрения Σ-определимости из [9] в суперструктурах, основанных на наследственно конечных множествах и наследственно конечных списках над моделями, многие свойства, связанные с определимостью, при дополнительных предположениях относительно операции выбора элементов из множеств эквивалентны. Однако с точки зрения построения программ с учетом сложности их исполнения предпочтительнее рассматривать их построения на основе Δ_0-конструкции, сохранив при этом достаточно широкие логические средства определений, а с другой стороны, обеспечив в требуемых оценках сложности исполнения более императивные конструкции.

В данной работе рассмотрены вопросы определимости на основе Δ_0-формул, для которых проверка истинности имеет ограниченную сложность относительно базисных термов и отношений в основной модели, а также вопросы реализации списочных операций в суперструктуре. С точки зрения конкретных приложений этой логической системы программирования можно выделить два типа решаемых задач: (1) локальные задачи построения конкретных вычислений с данными из исследуемой области и поиска быстрых способов вычисления этих характеристик по принятию оперативных решений в режиме реального времени; (2) стратегические многоцелевые задачи, которые используют при их решении большие данные и требуют поиска и задания уже на языке, допускающем неограниченные кванторы существования. Для решения задач первого типа предлагается расширить класс термов нашего языка условными термами, которые могут определяться с применением только Δ_0-формул.

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и определим, следуя [6], надстройку наследственно конечных списков $HW(\mathfrak{M})$ для модели $\mathfrak{M}$, в которой сигнатуру σ расширим до σ^*, добавляя списочные функции языка LISP: $\mathrm{head}(x)$, $\mathrm{cons}(x, y)$, $\mathrm{tail}(x, y)$, константу nil и одноместный предикат $\mathscr{U}$, выделяющий основное множество базисной структуры $\mathfrak{M}$.

Для построения Δ_0- и Σ-формул в семантическом программировании используют два типа ограничений по элементам списков $\forall x \in t$ и $\exists x \in t$, начальным отрезкам списков $\forall x \sqsubseteq t$ и $\exists x \sqsubseteq t$. Мы добавим еще два типа ограниченных кванторов $\forall x = t$ и $\exists x = t$, которые находятся в той же парадигме ограниченных кванторов, где в качестве частичного порядка используется обычное равенство элементов. Заметим, что основные свойства Δ_0- и Σ-формул при этом не изменяются в силу того, что можно просто подставить эти термы в соответствующую Δ_0- или Σ-формулу, на которую действует квантор с равенством, и убрать этот квантор из рассмотрения либо их нетрудно свести к рассмотренным ранее ограниченным кванторам. Заметим, что добавленные ограниченные кванторы выразимы через основные ограниченные кванторы и таким образом получается консервативное расширение.

Пусть t — терм, φ — формула. Тогда формула $(\exists x = t)\varphi$ эквивалентна формуле $(\exists x \in \mathrm{cons}(\mathrm{nil}, t)\varphi)$, а $(\forall x = t)\varphi$ — формуле $(\forall x \in \mathrm{cons}(\mathrm{nil}, t)\varphi)$. Используя эти эквивалентности, можно показать индукцией по построению Δ_0-формул с ограниченными кванторами и равенством, что любая Δ_0-формула (Σ-формула) в расширении с дополнительными ограниченными кванторами с равенством эквивалентна соответственно Δ_0-формуле (Σ-формуле), не использующей дополнительных ограниченных кванторов.

Но при построении расширенного варианта Δ_0- и Σ-формул уже с условными термами для удобства проведения доказательств рассмотрим дополнительно ограниченные кванторы $\exists x = t$ и $\forall x = t$, которые выразимы через основные.

Для обогащения $HW(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ рассмотрим класс термов $\mathrm{Term}(\sigma^*, V)$ с переменными из V и класс Δ_0- и Σ-формул [2]. Расширим понятие терма в сигнатуре σ^* классом условных термов $\mathrm{Term}_{\mathrm{Con}}(\sigma^*, V)$, который определим по индукции.

Базис индукции. Любой терм сигнатуры σ^* с переменными из V является условным термом.

Шаг индукции. Если $t_0, t_1, \dots, t_{n+1}$ — условные термы, а $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ — Δ_0-формулы, то терм $t(v)$ определим как $\mathrm{cond}(t_0, \dots, t_{n+1}, \varphi_0, \dots, \varphi_n)$ с интерпретацией в модели:

$$t(\bar v) = \begin{cases} t_0(\bar v), & \text{если } \mathfrak{M} \models \varphi_0(\bar v), \\ t_1(\bar v), & \text{если } \mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar v) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar v), \\ \dots, & \\ t_i(\bar v), & \text{если } \mathfrak{M} \models \varphi_i(\bar v) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar v) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{i-1}(\bar v), \\ \dots, & \\ t_n(\bar v), & \text{если } \mathfrak{M} \models \varphi_n(\bar v) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar v) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{n-1}(\bar v), \\ t_{n+1}(\bar v) & \text{в противном случае, т. е. } \mathfrak{M} \models \neg\varphi_0(\bar v) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n(\bar v), \end{cases}$$

является условным термом.

Если $t_1, t_2, \dots, t_n$ — условные термы, а F — n-местный сигнатурный символ, то выражение $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ является условным термом и других способов построения условных термов нет.

Рассмотрим также расширение Δ_0-формул (Σ-формул) до Δ_0^*-формул (Σ^*-формул), добавив в их определения не только стандартные термы, но и условные термы. Определим по индукции эти новые классы Δ_0^*- и Σ^*-формул.

Вначале определим, как обычно, Δ_0^*-формулы. Если t и q — условные термы, то $t = q$ — Δ_0^*-формула. Если $t_1, \dots, t_n$ — условные термы, а P — n-местный предикатный символ сигнатуры нашей супермодели, то $P(t_1, \dots, t_n)$ — Δ_0^*-формула.

Шаг индукции. Если φ и ψ — Δ_0^*-формулы, а t — условный терм, то выражения $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $(\forall x \in t)\varphi$, $(\forall x \sqsubseteq t)\varphi$, $(\forall x = t)\varphi$, $(\exists x \in t)\varphi$, $(\exists x \sqsubseteq t)\varphi$ и $(\exists x = t)\varphi$ являются Δ_0^*-формулами.

Ясно, что Δ_0-формулы являются Δ_0^*-формулами. Будем их называть *стандартными*, а если в них входит условный терм, то — *нестандартными.*

Аналогично расширим понятия Σ-формул индукцией по построению.

Базис индукции. Если φ — Δ_0^*-формула, то φ — Σ^*-формула.

Шаг индукции. Если φ и ψ — Σ^*-формулы, а t — условный терм, то выражения $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $(\forall x \in t)\varphi$, $(\forall x \sqsubseteq t)\varphi$, $(\forall x = t)\varphi$, $(\exists x \in t)\varphi$, $(\exists x \sqsubseteq t)\varphi$ и $(\exists x = t)\varphi$, а также формулы вида $(\exists x)\varphi$ являются Σ^*-формулами.

Заметим, что Σ-формулы являются Σ^*-формулами.

Определим по индукции сложность условных термов и Σ^*-формул. В дальнейшем обычные термы в смысле определения из [9] будем называть *стандартными термами*, а если при их построении используется конструкция определения условного терма для этого терма или его подтерма, то такие термы будем называть *нестандартными термами.*

Базис индукции. Если t — стандартный терм сигнатуры σ, то его сложность $r(t)$ равна 0.

Шаг индукции. Если терм t содержит условные подтермы, не являющиеся стандартными, то рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. Если $t = F(t_1, \dots, t_n)$ и среди термов $t_1, \dots, t_n$ есть условный нестандартный терм, то сложность $r(t)$ терма t равна

$$(\max\{r(t_1), \dots, r(t_n)\} + 1)(n + 1).$$

Случай 2. Пусть t получается по схеме условного терма:

$$t(\bar{v}) = \begin{cases} t_0(\bar{v}), & \text{если } \varphi_0(\bar{v}), \\ t_1(\bar{v}), & \text{если } \varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}), \\ \dots, & \\ t_i(\bar{v}), & \text{если } \varphi_i(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{i-1}(\bar{v}), \\ \dots, & \\ t_n(\bar{v}), & \text{если } \varphi_n(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{n-1}(\bar{v}), \\ t_{n+1}(\bar{v}), & \text{если } \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n(\bar{v}), \end{cases}$$

где $t_0, \dots, t_{n+1}$ — условные термы, а $\varphi_0 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \varphi_n$ — Δ_0-формулы.

В этом случае полагаем $r(t) = ((r(t_0) + r(t_1) + \dots + r(t_{n+1}) + 1) \times (n+2))^2 \times (\max\{r(\varphi_i) \mid 1 \le i \le n+1\} + 1)$.

Если φ — стандартная Δ_0-формула, то $r(\varphi) = 0$. Если φ — Δ_0^*-формула, но не Δ_0-формула, т. е. формула, в которой при построении использовались условные термы, не являющиеся термами, то будем называть их *нестандартными термами*, а формулы — *нестандартными формулами*. Рассмотрим все случаи определения Δ_0^*-формул

$$\varphi := (\varphi_1 \mathbin{\&} \varphi_2), \quad (\varphi_1 \vee \varphi_2), \quad (\varphi_1 \to \varphi_2), \quad \neg\varphi_1, \ (\forall v \in t)\varphi_1,$$

$$(\exists v \in t)\varphi_2, \ (\forall v \sqsubseteq t)\varphi_1, \quad (\exists v \subseteq t)\varphi_1, \quad t = q, \quad P(t_1, \dots, t_n)$$

и определим для них по индукции значение сложности $r(\varphi)$ формулы φ.

Положим $r(\varphi) = 0$, если φ — стандартная Δ_0-формула. Для нестандартных формул $\varphi := (\varphi_1 \& \varphi_2) \dots$

$$r((\varphi_1 \mathbin{\&} \varphi_2)) = (r(\varphi_1) + r(\varphi_2)) + 1,$$

$$r((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = (r(\varphi_1) + r(\varphi_2)) + 1,$$

$$r((\varphi_1 \to \varphi_2)) = (r(\varphi_1) + r(\varphi_2)) + 1,$$

$$r(\neg\varphi_1) = r(\varphi_1) + 1, \quad r((\forall v = t)\varphi_1) = ((r(\varphi_1) + 1) \times (r(t) + 1)) + 1,$$

$$r((\exists v = t)\varphi_1) = ((r(\varphi_1) + 1) \times (r(t) + 1)) + 1,$$

$$r((\forall v \in t)\varphi_1) = ((r(\varphi_1) + 1) \times (r(t) + 1)) + 1,$$

$$r((\exists v \in t)\varphi_1) = ((r(\varphi_1) + 1) \times (r(t) + 1)) + 1,$$

$$r((\forall v \sqsubseteq t)\varphi_1) = ((r(\varphi_1) + 1) \times (r(t) + 1)) + 1,$$

$$r((\exists v \sqsubseteq t)\varphi_1) = ((r(\varphi_1) + 1) \times (r(t) + 1)) + 1.$$

Для атомарных нестандартных формул $t = q$ определим $r(t = q) = r(t) + r(q) + 1$ и для $P(t_1, \dots, t_n)$ полагаем $r(P(t_1, \dots, t_n)) = (r(t_1) + \dots + r(t_n) + 1) \times (n + 1)$.

Теорема 1. *Существует алгоритм, строящий по любой Δ_0^*-формуле φ Δ_0-формулу ψ такую, что*

$$HW(\mathfrak{M}) \models (\forall \bar{v})(\varphi(\bar{v}) \Leftrightarrow \psi(\bar{v})).$$

Базис индукции. Если $r(\varphi) = 0$, то φ не содержит нестандартных термов и в качестве ψ можно взять саму Δ_0-формулу φ.

Шаг индукции. Пусть $n = r(\varphi) > 0$.

Будем рассматривать все возможности определения формулы φ.

Случай 1. Если Δ_0^*-формула φ имеет вид $(\varphi_1 \ \& \ \varphi_2)$, $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ или $\neg\varphi_1$, то сложность Δ_0-формул φ_1 и φ_2 меньше сложности φ и по индукционному предположению для них есть эквивалентные Δ_0-формулы φ_1^* и φ_2^* соответственно, но тогда $(\varphi_1 \ \& \ \varphi_2) \equiv (\varphi_1^* \ \& \ \varphi_2^*)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_1^* \vee \varphi_2^*)$, $(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\varphi_1^* \to \varphi_2^*)$ и $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_1^*$, и они дают требуемые Δ_0-формулы.

Случай 2. Рассмотрим все возможности формул с ограниченным квантором. Рассмотрим случай $(\exists v \in t)$. Пусть $\varphi = (\exists v \in t)\theta$. Тогда $r(\theta) < r(\varphi)$ и для θ есть эквивалентная Δ_0-формула θ^*. В этом случае возможны три подслучая.

Подслучай $(\exists v \in t)$. 1. Если t — стандартный терм, то $\varphi = (\exists v \in t)\theta \equiv (\exists v \in t)\theta^*$ и получили искомую формулу.

Подслучай $(\exists v \in t)$. 2. Если t — условный нестандартный терм, то возможны два подслучая $t = F(t_1, \dots, t_n)$, где хотя бы один из $t_1, \dots, t_n$ — нестандартный условный терм, либо t получается по схеме определения условных термов.

Подслучай $(\exists v \in t)$. 2.1. Рассмотрим подслучай $t(\bar{v}) = F(t_1(\bar{v}), \dots, t_n(\bar{v}))$.

Заметим, что переменная v не входит свободно в определения терма t, а значит, не входит свободно и в определения термов $t_1, \dots, t_n$, а $r(\theta) < r(\varphi)$. В таком случае по индуктивному предположению для θ есть эквивалентная Δ_0-формула θ^* уже без условных нестандартных термов.

В рассматриваемом случае формула $(\exists v \in F(t_1(\bar{v}), \dots, t_n(\bar{v})))\theta$ эквивалентна Δ_0-формуле

$$(\exists z_1 = t_1) \dots (\exists z_n = t_n)(\exists v \in F(z_1, \dots, z_n))\theta,$$

которая, в свою очередь, эквивалентна

$$(\exists z_1 = t_1) \dots (\exists z_n = t_n)(\exists v \in F(z_1, \dots, z_n))\theta^*.$$

Рассмотрим формулы вида $(\exists z_i = t_i(\bar{v}))\psi$ для $1 \leq i \leq n$, где ψ — Δ_0-формула без условных нестандартных термов. Из определения сложностной функции r ясно, что $r((\exists z_i = t_i(\bar{v}))\psi)$ строго меньше, чем

$$r((\exists v \in F(t_1(\bar{v}), \dots, t_n(\bar{v}))\varphi(\bar{v}))).$$

В таком случае по предположению индукции уже существует Δ_0-формула условных нестандартных термов $(\psi)_i$, эквивалентная формуле $(\exists z_i = t_i(\bar{v}))\psi$.

Применяем это свойство n начиная с формулы

$$(\exists z_n = t_n)(\exists v \in F(z_1, \dots, z_n))\varphi_1^*,$$

где $(\exists v \in F(z_1, \dots, z_n))\varphi_1^*$, как легко заметить, будет Δ_0-формулой без условных нестандартных термов. Последовательно навешивая кванторы $(\exists z_{n-1} =$

$t_{n-1}), \dots , (\exists z_1 = t_1)$, а затем по замеченному свойству определяя эквивалентную Δ_0-формулу без условных нестандартных термов, построим Δ_0-формулу без условных нестандартных термов, эквивалентную формуле

$$(\exists z_1 = t_1) \dots (\exists z_n = t_n)(\exists v \in F(z_1, \dots , z_n))\theta^*,$$

а следовательно, и искомой формуле φ.

Подслучай $(\exists v \in t)$. 2.2. Рассмотрим подслучай, когда терм t в формуле φ вида $(\exists v \in t)\theta$ получается по схеме условного терма. Заметим, как в предыдущем случае, что переменная v не входит свободно в определения терма t, а значит, не входит свободно и в определения термов $t_1, \dots , t_n$, а $r(\theta) < r(\varphi)$. В таком случае по индуктивному предположению для θ есть эквивалентная Δ_0-формула θ^* уже без условных нестандартных термов.

Итак, рассмотрим случай, когда терм $t(\bar{v})$ получается по схеме условного терма, т. е.

$$t(\bar{v}) = \begin{cases} t_0(\bar{v}), & \text{если } \varphi_0(\bar{v}), \\ t_1(\bar{v}), & \text{если } \varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}), \\ \dots , & \\ t_n(\bar{v}), & \text{если } \varphi_n(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{n-1}(\bar{v}), \\ t_{n+1}(\bar{v}), & \text{если } \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n(\bar{v}). \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что при определении условных термов пока используем только Δ_0-формулы $\varphi_0, \ \varphi_1, \dots , \varphi_n$, а термы $t_0(\bar{v}), t_1(\bar{v}), \dots , t_{n+1}(\bar{v})$ условные, но меньшей сложности, чем сложность терма $t(\bar{v})$. Отсюда следует, что для любого $0 \leq i \leq n$ формула вида

$$(\exists v \in t_i(\bar{v}))(\theta \mathbin{\&} \varphi_i \mathbin{\&} \neg\varphi_0 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{i-1})$$

эквивалентна формуле

$$(\exists v \in t_i(\bar{v}))(\theta^* \mathbin{\&} \varphi_i^* \mathbin{\&} \neg\varphi_0^* \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{i-1}^*),$$

где φ_j эквивалентна подходящей Δ_0-формуле φ_j^* для $0 \leq j \leq i$, которая уже имеет сложность, меньшую сложности формулы $(\exists v \in t)\theta$, а потому эквивалентна по индукционному предположению Δ_0-формуле λ_i, и аналогично Δ_0-формула

$$(\exists v \in t_{n+1}(\bar{v}))(\theta \mathbin{\&} \neg\varphi_0 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n)$$

эквивалентна формуле

$$(\exists v \in t_{n+1}(\bar{v}))(\theta^* \mathbin{\&} \neg\varphi_0^* \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n^*),$$

которая уже имеет сложность, меньшую сложности формулы $(\exists v \in t)\theta$, а потому эквивалентна по индукционному предположению Δ_0-формуле λ_{n+1}.

Из определения условного терма t очевидно, что формула $(\exists v \in t)\theta$ эквивалентна дизъюнкции формул

$$\Big(\bigvee_{0 \leq i \leq n} (\exists v \in t_i(\bar{v}))(\theta \mathbin{\&} \neg\varphi_0 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{i-1} \ \varphi_i)\Big) \vee (\exists v \in t_{n+1}(\bar{v}))(\theta \mathbin{\&} \neg\varphi_0 \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n),$$

последняя уже эквивалентна дизъюнкции Δ_0-формул $\bigvee\limits_{0 \leq i \leq n+1} \lambda_i$, которая является Δ_0-формулой, и условие доказано.

Заметим, что случаи формул, начинающихся с ограниченных кванторов $(\forall v \in t_i(\bar{v}))$, $(\exists v \sqsubseteq t_i(\bar{v}))$, $(\forall v \sqsubseteq t_i(\bar{v}))$, $(\exists v = t_i(\bar{v}))$ и $(\forall v = t_i(\bar{v}))$, разбираются аналогично случаю ограниченного квантора $(\exists \in t_i(\bar{v}))$.

Случай 3. Осталось рассмотреть случай атомарных формул. Если атомарная формула не содержит нестандартных условных термов, то она уже Δ_0-формула и все выполнено. Нужно рассмотреть случаи атомарных формул, когда в них входит хоть один нестандартный условный терм.

Пусть формула φ имеет вид $t = q$, где хотя бы один из термов t, q условный и нестандартный. Без ограничения общности в силу симметричности равенства можно предположить, что именно терм q условный и нестандартный. В этом случае для q имеются две возможности: q равно $F(q_1, \dots, q_k)$ или получается по условной схеме.

Подслучай 3.1. Если $q = F(q_1, \dots, q_k)$, то формула $t = q$ эквивалентна формуле

$$(\exists z_1 = q_1(\bar{v}))(\exists z_2 = q_2(\bar{v}))\dots(\exists z_k = q_k(\bar{v}))(t = F(z_1, z_2, \dots, z_k)).$$

Δ_0-формула $t = F(z_1, \dots, z_k)$ имеет сложность, меньшую сложности формулы $t = q$, а отсюда найдется Δ_0-формула $\psi_1(\bar{v}, z_1, \dots, z_k)$, ей эквивалентная по предположению индукции, а дальше, навешивая по одному квантору начиная с $(\exists z_k = q_r(\bar{v}))\psi_1(\bar{v}, z_1, \dots, z_k)$, получаем вновь стандартную Δ_0-формулу, ей эквивалентную, и через n шагов построим стандартную Δ_0-формулу $\psi(\bar{v})$, эквивалентную формуле $t = q$.

Подслучай 3.2. Рассмотрим возможность равенства термов, когда $q(\bar{v})$ получается по схеме условного терма, т. е.

$$q(\bar{v}) = \begin{cases} q_0(\bar{v}), & \text{если } \varphi_0(\bar{v}), \\ q_1(\bar{v}), & \text{если } \varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}), \\ \dots, & \\ q_n(\bar{v}), & \text{если } \varphi_n(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{n-1}(\bar{v}), \\ q_{n+1}(\bar{v}), & \text{если } \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n(\bar{v}). \end{cases}$$

В этом случае формула $t = q$ будет эквивалентна формуле

$$\begin{aligned}(t(\bar{v}) = q_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \varphi_0(\bar{v})) \vee (t(\bar{v}) = q_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v})) \vee \dots \vee (t(\bar{v}) \\ = q_i(\bar{v}) \mathbin{\&} \varphi_i(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{i-1}(\bar{v})) \vee \dots \vee (t(\bar{v}) \\ = q_n(\bar{v}) \mathbin{\&} \varphi_n(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_{n-1}(\bar{v})) \vee (t(\bar{v}) \\ = q_{n+1}(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_0(\bar{v}) \mathbin{\&} \neg\varphi_1(\bar{v}) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \neg\varphi_n(\bar{v})).\end{aligned}$$

Каждый конъюнктивный член в каждом дизъюнктивном члене имеет сложность, меньшую сложности формулы $t = q$, а по предположению индукции все они эквивалентны соответственно стандартным Δ_0-формулам, поэтому и все дизъюнктивные члены эквивалентны соответственно Δ_0-формулам ψ_0, $\psi_1, \dots$, ψ_n, ψ_{n+1}, а тогда формула $t = q$ эквивалентна стандартной Δ_0-формуле $(\psi_0 \vee \psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_{n+1})$.

Подслучай 3.3. Рассмотрим случай, когда ψ имеет вид $P(t_1(\bar{v}), \dots, t_m(\bar{v}))$, где хотя бы один из термов из $t_1(\bar{v}), \dots, t_n(\bar{v})$ — нестандартный условный терм. Пусть $t_i(\bar{v})$ — нестандартный условный терм. Как и в случае равенства термов, нужно рассмотреть два случая, когда $t_i(\bar{v})$ равен $F(q_1(\bar{v}), \dots, q_m(\bar{v}))$ и получается по схеме условного терма.

В первом случае так же, как и в случае равенства термов, получаем, что формула $P(t_1(\bar v),\dots,t_m(\bar v))$ эквивалентна формуле

$$(\exists z_1=q_1(\bar v))(\exists z_2=q_2(\bar v))\dots(\exists z_k=q_k(\bar v)),\\ P(t_1,\dots,t_{i-1},F(z_1,\dots,z_m),t_{i+1}(\bar v),\dots,t_m(\bar v)).$$

В этом случае формула $P(t_1(\bar v),\dots,t_{i-1}(\bar v),F(z_1,\dots,z_n),t_{i+1},\dots,t_m(\bar v))$ меньшей сложности эквивалентна стандартной Δ_0-формуле $\psi_1(\bar v,z_1,\dots,z_k)$. Навешиваем ограниченные кванторы и последовательно находим эквивалентные стандартные Δ_0-формулы

$$\psi_2(\bar v,z_1,\dots,z_{k-1}),\dots,\psi_k(\bar v),$$

и формула $\psi_k(\bar v)$ будет искомой стандартной Δ_0-формулой, эквивалентной формуле $P(t_1(\bar v),\dots,t_m(\bar v))$.

В оставшемся случае схемы условного терма вновь по индукционному предположению без ограничения общности можно считать, что в определении условного терма t_i используются только стандартные Δ_0-формулы. В этом случае формула вида $P(t_1(\bar v),\dots,t_m(\bar v))$ эквивалентна формуле

$$(P(t_1(\bar v),\dots,t_{i-1}(\bar v),q_0(\bar v),\dots,t_m(\bar v))\ \&\ \varphi_0(\bar v))\\ \vee(P(t_1(\bar v),\dots,t_{i-1}(\bar v),q_1(\bar v),\dots,t_m(\bar v))\ \&\ \varphi_1(\bar v)\ \&\ \neg\varphi_0(\bar v))\vee\\ \dots\vee(P(t_1(\bar v),\dots,t_{i-1}(\bar v),q_i(\bar v),\dots,t_m(\bar v))\ \&\ \varphi_i(\bar v)\ \&\ \neg\varphi_0(\bar v)\ \&\dots\&\ \neg\varphi_{i-1}(\bar v))\\ \vee\dots\vee(P(t_1(\bar v),\dots,t_{i-1}(\bar v),q_n(\bar v),\dots,t_m(\bar v))\ \&\ \varphi_n(\bar v)\ \&\ \neg\varphi_0(\bar v)\&\\ \dots\&\ \neg\varphi_{n-1})(\bar v)\vee(P(t_1(\bar v),\dots,t_{i-1}(\bar v),q_{n+1}(\bar v),\dots,t_m(\bar v))\ \&\\ \neg\varphi_0(\bar v)\ \&\ \neg\varphi_1(\bar v)\ \&\dots\&\ \neg\varphi_n(\bar v)).$$

В свою очередь, все первые конъюнктивные члены в каждой дизъюнкции уже имеют меньшую сложность, чем начальная формула, и тогда по предположению индукции они эквивалентны Δ_0-формулам, а все остальные конъюнктивные члены уже Δ_0-формулы. Таким образом, и в этом случае построили эквивалентную Δ_0-формулу.

Теорема доказана.

В силу теоремы об эквивалентности Δ_0^*-формул стандартным Δ_0-формулам можно в схеме условного терма также использовать Δ_0^*-формулы и, таким образом полученные условные термы совпадают с условными термами, построенными по стандартной схеме определения условных термов только с использованием стандартных Δ_0-формул.

Если основные операции и отношения нашей модели вычислимы, то все условные термы вычислимы. Более того, если основные термы и отношения суперструктуры полиномиально вычислимой сложности, то и все условные термы полиномиальной сложности, которую можно эффективно оценить на основе определения этого условного терма и входящих в его определения формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Σ-программирование // Вычисл. системы. 1985. № 107. С. 3–29.
2. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Σ-программы и их семантики // Вычисл. системы. 1987. № 120. С. 24–51.
3. *Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Theoretical aspects of Σ-programming // Lect. Notes Comp. Sci. 1986. V. 215. P. 169–179.

4. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic programming // Information processing 86: Proc. IFIP 10-th World comput. cong. Dublin. 1986. V. 10. P. 1113–1120.
5. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Математические основы семантического программирования // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 6. С. 1324–1328.
6. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic foundations of programming // Fundamentals of computation theory: Proc. Intern. conf. FCT 87, Kazan. 1987. P. 116–122. (Lect. Notes Comp. Sci.; V. 278).
7. *Ershov Yu. L.* The principle of Σ-enumeration // Soviet Math. Dokl. 1983. V. 27. P. 670–672.
8. *Ershov Yu. L.* Dynamic logic over admissible sets // Soviet Math. Dokl. 1983. V. 28. P. 739–742.
9. *Ershov Yu. L.* Definability and computability // New York: Kluwer Akad. / Consultants Bureau (Siberian School of Algebra and Logic), 1996.
10. *Гончаров С. С.* Теория списков и ее модели // Вычисл. системы. 1986. № 114. С. 84–95.
11. *Гончаров С. С.* Замечание об аксиомах списочной надстройки *GES* // Вычисл. системы. 1986. № 114. С. 11–15.
12. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J.* Introduction to the handbook of recursive mathematics // Handbook of recursive mathematics. Amsterdam etc.: Elsevier, 1998. Part 1. V. 1–2. P. vii-xlvi, 40 p.
13. *Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I.* HF-computability. Computability in context // London: Imp. Coll. Press, 2011. P. 169–242.
14. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.

Статья поступила 6 июня 2017 г.

Гончаров Сергей Савостьянович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s.s.goncharov@math.nsc.ru, gonchar@math.nsc.ru