

УДК 510.67+512.71

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОДНОЙ СИГНАТУРЫ

Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников,
В. Н. Ремесленников

Аннотация. Представлена часть проекта по изложению основ алгебраической геометрии над произвольными алгебраическими системами [1–8]. Вводится понятие универсальной геометрической эквивалентности двух алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одного языка L , которое является усилением уже известного понятия геометрической эквивалентности и выражает максимальную близость $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с точки зрения их алгебраических геометрий. Раскрывается связь между универсальной геометрической эквивалентностью и универсальной эквивалентностью в смысле совпадения универсальных теорий.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.507

Ключевые слова: универсальная алгебраическая геометрия, алгебраическая система, универсальная геометрическая эквивалентность, универсальная эквивалентность, универсальный класс.

1. Введение

Исследовательские задачи алгебраической геометрии над произвольной алгебраической системой $\mathcal{A}$ произвольной сигнатуры L сформулированы в ряде предшествующих работ авторов [1–5, 7, 8], там же доказаны теоремы, помогающие в решении соответствующих задач. Попутно выделены и изучены несколько классов алгебраических систем, в которых справедливы те или иные полезные вспомогательные результаты (класс нётеровых по уравнениям алгебраических систем, u_ω -компактных, эквациональных областей и др.). Дальнейшей целью является сравнение различных алгебраических систем одной сигнатуры с точки зрения их алгебро-геометрических свойств.

В 90-х гг. XX века Б. И. Плоткин поставил вопрос: когда две алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сигнатуры L имеют одинаковые алгебраические геометрии? Для формализации этого вопроса было введено понятие геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Статья [6] полностью посвящена геометрической эквивалентности алгебраических систем, в ней приведен ряд критериев геометрической эквивалентности. Один из них утверждает, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда категории координатных алгебр над $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают. Одним из следствий геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ является квазиэквациональная эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т. е. совпадение множеств квазитожеств, истинных на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Б. И. Плоткиным был

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (грант 17–11–01117).

также сформулирован вопрос, позже названный *проблемой Б. И. Плоткина*: следует ли из квазиэквивалентной (или хотя бы из элементарной) эквивалентности геометрическая эквивалентность? В любой постановке эти проблемы решаются отрицательно в общем случае и положительно в классе q_ω -компактных алгебраических систем (в частности, для нётеровых по уравнениям).

На настоящий момент исследованиям по проблеме геометрической эквивалентности и по ее обобщениям в различных классических многообразиях алгебр посвящено достаточно большое количество статей, например, [9–17]. Наиболее полный обзор по этой теме с перечнем известных результатов приведен в [18, 19]. Несмотря на важность и содержательность понятий геометрической эквивалентности и ее обобщений, с нашей точки зрения, оно не в полной мере отражает родство алгебраических систем относительно их алгебро-геометрических свойств, поэтому его, напротив, бывает полезно сузить, т. е. усилить. Поясним, почему это так.

Во-первых, известно, что два изоморфных алгебраических множества Y, Z над одной и той же алгебраической системой $\mathcal{A}$ неприводимы или приводимы одновременно. Далее, алгебраические множества Y и Z изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их координатные алгебры $\Gamma(Y)$ и $\Gamma(Z)$. Предположим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — геометрически эквивалентные алгебраические системы. Тогда класс координатных алгебр алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ совпадает с классом координатных алгебр алгебраических множеств над $\mathcal{B}$. Однако если берем два алгебраических множества, Y над $\mathcal{A}$ и Z над $\mathcal{B}$, координатные алгебры которых изоморфны, то, вообще говоря, не можем утверждать, что Y и Z неприводимы или приводимы одновременно.

Во-вторых, есть множество важных в алгебраической геометрии результатов и свойств, которые не наследуются при геометрической эквивалентности. Например, так называемые объединяющие теоремы, описывающие различными способами координатные алгебры [2, 3], будучи верными для алгебраической системы $\mathcal{A}$, могут быть неверными для геометрически эквивалентной алгебраической системы $\mathcal{B}$. Или, другой пример, эквивалентная область [4] может быть геометрически эквивалентной не эквивалентной области. Все нестыковки такого типа можно обобщить в один факт: среди упомянутых выше особых и важных классов алгебраических систем (эквивалентные области и ко-области, u_ω -компактные алгебраические системы и пр.) не все замкнуты относительно геометрической эквивалентности.

В данной статье мы предлагаем решить сразу все описанные выше проблемы с помощью альтернативного понятия — понятия *универсальной геометрической эквивалентности*, которое является усилением понятия геометрической эквивалентности. Построение и содержание статьи повторяют контур статьи [6], посвященной понятию геометрической эквивалентности, однако, естественно, имеет свою специфику. Так, для универсальной геометрической эквивалентности приводим ряд критериев. Затем показываем, что универсальная геометрическая эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ влечет универсальную эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т. е. совпадение универсальных теорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, причем обратное, вообще говоря, неверно. В то же время в классе u_ω -компактных алгебраических систем (в частности, в классе нётеровых по уравнениям) универсальная и универсальная геометрическая эквивалентности совпадают. В общем случае вводим понятие *универсальной ω -геометрической эквивалентности*, которая совпадает с универсальной эквивалентностью в классе всех алгебраических систем.

То, что универсальная геометрическая эквивалентность является более информативным и сильным требованием по сравнению с геометрической эквивалентностью, видно даже в классе нётеровых по уравнениям алгебраических систем, в разд. 4 это показано на примере абелевых групп. При этом в классах эквивалентных областей и ко-областей эти две эквивалентности совпадают. Отметим, что исследование общих свойств универсальной геометрической эквивалентности не исчерпывается этой статьёй, в частности, вопросы о связи универсальной геометрической эквивалентности с особыми классами алгебраических систем (эквивалентных областей и ко-областей, различными классами компактности) требуют отдельной полноценной работы.

В заключение необходимо отметить, что эта работа тесно связана с рядом предыдущих статей, поэтому многие результаты в данной работе имеют короткие доказательства по модулю уже доказанных результатов из упомянутых работ.

2. Предварительные сведения

В этом разделе напомним для удобства читателей базовые понятия и факты универсальной алгебраической геометрии, следуя [1–3, 5]. В теоретико-модельных вопросах опираемся на книгу В. А. Горбунова [20].

Пусть L — язык исчисления предикатов первого порядка (или сигнатура). Отметим, что в [1–4] мы всюду ограничивали себя функциональными языками (т. е. языками без предикатов). В [5] показано, как все определения, конструкции и почти все результаты предыдущих работ переносятся на произвольный язык L (за исключением нескольких утверждений из [4]). Таким образом, далее по умолчанию на язык L не накладываем каких-либо ограничений.

Через $T_L(X)$ (соответственно $At_L(X)$) обозначим множество термов (соответственно атомарных формул) языка L от переменных из $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Уравнением языка L называется любая атомарная формула из $At_L(X)$, системой уравнений — любое подмножество $S \subseteq At_L(X)$. Термальную алгебраическую L -систему обозначаем через $\mathcal{T}_L(X)$ (ее носителем является множество всех термов $T_L(X)$; константные и функциональные символы языка L интерпретируются естественным образом, а все предикатные символы интерпретируются тождественно ложными отношениями).

Зафиксируем алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle A; L \rangle$ языка L .

Множество $V_{\mathcal{A}}(S) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \ \forall \varphi \in S\}$ всех решений системы уравнений S в $\mathcal{A}$ называется *алгебраическим множеством* над $\mathcal{A}$, определенным системой уравнений S .

Радикалом алгебраического множества $Y = V_{\mathcal{A}}(S)$ или системы уравнений S называется совокупность всех следствий системы S : $\text{Rad}(Y) = \text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \{\varphi \in At_L(X) \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in Y\}$. Две системы уравнений $S_1, S_2 \subseteq At_L(X)$ называются *эквивалентными* над $\mathcal{A}$ ($S_1 \sim_{\mathcal{A}} S_2$), если $V_{\mathcal{A}}(S_1) = V_{\mathcal{A}}(S_2)$. Таким образом, $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$ — это максимальная система уравнений, эквивалентная над $\mathcal{A}$ системе S . Подмножество $R \subseteq At_L(X)$ называется *радикальным идеалом* над $\mathcal{A}$, если R — радикал некоторого алгебраического множества над $\mathcal{A}$. Другими словами, R — радикальный идеал над $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $R = \text{Rad}_{\mathcal{A}}(R)$, кроме того, радикал $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$ произвольной системы уравнений S совпадает с пересечением всех радикальных идеалов над $\mathcal{A}$, содержащих S .

Координатной алгеброй $\Gamma(Y)$ алгебраического множества $Y = V_{\mathcal{A}}(S)$

или координатной алгеброй $\Gamma_{\mathcal{A}}(S)$ системы уравнений S называется фактор-система термальной алгебраической L-системы $\mathcal{H}_L(X)$ по обобщенной конгруэнции Горбунова — Туманова $\theta_{\text{Rad}(Y)}$. Все подробности можно найти в [5]; понимания их не требуется для знакомства с данной статьей.

Задача классификации алгебраических множеств над алгебраической системой $\mathcal{A}$ является первостепенно важной проблемой алгебраической геометрии над $\mathcal{A}$. Через $\mathbf{AS}(\mathcal{A})$ обозначаем категорию всех алгебраических множеств над $\mathcal{A}$, через $\mathbf{CA}(\mathcal{A})$ — категорию всех координатных алгебр алгебраических множеств над $\mathcal{A}$. Эти категории дуально эквивалентны, что уравнивает задачу классификации алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ с задачей классификации координатных алгебр над $\mathcal{A}$ (подробнее см. в [2]).

Отдельный интерес представляет задача классификации *неприводимых* алгебраических множеств над $\mathcal{A}$, которые определяются топологически. Будем пользоваться в этой статье следующим критерием: непустое алгебраическое множество Y над $\mathcal{A}$ неприводимо в том и только том случае, когда его нельзя представить в виде конечного объединения собственных алгебраических над $\mathcal{A}$ подмножеств [2, лемма 3.35]; в противном случае Y *приводимо*. Если координатные алгебры алгебраических множеств Y и Z над $\mathcal{A}$ изоморфны, то сами множества Y и Z неприводимы, приводимы или пусты одновременно. Координатная алгебра неприводимого алгебраического множества также называется *неприводимой*.

Подмножество $R \subseteq \text{At}_L(X)$ называется *неприводимым радикальным идеалом* над $\mathcal{A}$, если R — радикал некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$ (радикал однозначно определяет алгебраическое множество, поэтому это определение корректно). Произвольное непустое алгебраическое множество представимо в виде (бесконечного) объединения неприводимых алгебраических множеств [2, лемма 3.34], поэтому радикал $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$ произвольной системы уравнений S совпадает с пересечением всех неприводимых радикальных идеалов над $\mathcal{A}$, содержащих S .

В этой статье используем ряд операторов, переводящих класс алгебраических L-систем $\mathbf{K}$ в новый класс L-систем. Для удобства перечислим здесь все такие операторы:

$\mathbf{S}(\mathbf{K})$ — класс подсистем алгебраических систем из $\mathbf{K}$;

$\mathbf{P}(\mathbf{K})$ — класс прямых произведений алгебраических систем из $\mathbf{K}$ (следуя В. А. Горбунову [20], предполагаем, что прямое произведение над пустым множеством индексов есть тривиальная L-система $\mathcal{E}$);

$\mathbf{P}_r(\mathbf{K})$ — класс фильтрованных произведений алгебраических систем из $\mathbf{K}$;

$\mathbf{P}_u(\mathbf{K})$ — класс ультрапроизведений алгебраических систем из $\mathbf{K}$;

$\mathbf{Qvar}(\mathbf{K})$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее $\mathbf{K}$;

$\mathbf{Ucl}(\mathbf{K})$ — универсальное замыкание класса $\mathbf{K}$;

$\mathbf{Res}(\mathbf{K})$ — класс алгебраических систем, аппроксимируемых классом $\mathbf{K}$ (определение см. ниже);

$\mathbf{Dis}(\mathbf{K})$ — класс алгебраических систем, дискриминируемых классом $\mathbf{K}$ (определение см. ниже);

$\mathbf{K}_\omega$ — класс конечно порожденных алгебраических систем из $\mathbf{K}$;

$\mathbf{L}_{\text{fg}}(\mathbf{K})$ — класс алгебраических систем, в которых каждая конечно порожденная подсистема входит в $\mathbf{K}$ (т. е. $\mathcal{A} \in \mathbf{L}_{\text{fg}}(\mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{S}(\mathcal{A})_\omega \subseteq \mathbf{K}$).

Для любого класса $\mathbf{K}$ имеем

$$\mathbf{Dis}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Res}(\mathbf{K}) = \mathbf{SP}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}),$$

$$\mathbf{Dis}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Ucl}(\mathbf{K}) = \mathbf{SP}_u(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{Qvar}(\mathbf{K}).$$

Напомним определение аппроксимируемости и дискриминируемости в более краткой форме (другая форма определения в [5]). Говорят, что алгебраическая система $\mathcal{C} = \langle C; L \rangle$ *аппроксимируется* классом алгебраических L -систем $\mathbf{K}$ (или алгебраической системой $\mathcal{A}$ при $\mathbf{K} = \{\mathcal{A}\}$), если для любого натурального числа $n \geq 1$, любой атомарной формулы $\varphi \in \text{At}_L(x_1, \dots, x_n)$ и любых элементов $y_1, \dots, y_n \in C$, таких, что $\mathcal{C} \models \neg\varphi(y_1, \dots, y_n)$, существуют такая $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ и такой гомоморфизм $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, что $\mathcal{A} \models \neg\varphi(h(y_1), \dots, h(y_n))$. В более общем случае, если каждая конечно порожденная подсистема $\mathcal{C}_0 \leq \mathcal{C}$ аппроксимируется с помощью $\mathcal{A}$ (т. е. $\mathcal{C} \in \mathbf{LfgRes}(\mathcal{A})$), то говорят, что $\mathcal{C}$ *локально аппроксимируется* с помощью $\mathcal{A}$. Аналогично $\mathcal{C}$ *дискриминируется* классом $\mathbf{K}$ (или алгебраической системой $\mathcal{A}$ при $\mathbf{K} = \{\mathcal{A}\}$), если для любого натурального числа $n \geq 1$, любых атомарных формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{At}_L(x_1, \dots, x_n)$ и любых элементов $y_1, \dots, y_n \in C$ существуют такая $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ и такой гомоморфизм $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, что для каждого $i = 1, \dots, m$ справедлива импликация $\mathcal{C} \models \neg\varphi_i(y_1, \dots, y_n) \longrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi_i(h(y_1), \dots, h(y_n))$. Если каждая конечно порожденная подсистема $\mathcal{C}_0 \leq \mathcal{C}$ дискриминируется с помощью $\mathcal{A}$ (т. е. $\mathcal{C} \in \mathbf{LfgDis}(\mathcal{A})$), то говорят, что $\mathcal{C}$ *локально дискриминируется* с помощью $\mathcal{A}$.

Существенным результатом является то, что класс координатных алгебр алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega$, а класс координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ — с $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega$ [2].

Среди всех алгебраических систем выделяем несколько классов, в которых изучение алгебраической геометрии в большей или меньшей степени упрощается за счет специфических свойств. В этой статье речь пойдет только о следующих особых классах:

- нётеровых по уравнениям ($\mathbf{N}$) [2];
- слабо нётеровых по уравнениям ($\mathbf{N}'$) [3];
- ω -компактных ($\mathbf{U}$) [3].

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если любая система уравнений S эквивалентна над $\mathcal{A}$ некоторой своей конечной подсистеме $S_0 \subseteq S$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если любая система уравнений S эквивалентна над $\mathcal{A}$ некоторой конечной системе S_0 (не обязательно подсистеме исходной системы S). Алгебраическая система $\mathcal{A}$ является ω -компактной в том и только том случае, если $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\omega$ [3, теорема 4.2]. Далее неоднократно будем ссылаться на тот факт, что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ существует ω -компактное элементарное расширение $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ [3, теорема 7.4]. Соотношения между классами $\mathbf{N}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{N}'$ выражаются следующим образом: $\mathbf{U} \supseteq \mathbf{N}$ и $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}'$, причем эти включения, вообще говоря, строгие и $\mathbf{N} = \mathbf{N}' \cap \mathbf{U}$.

Алгебраическая система $\mathcal{B}$ языка L называется *$\mathcal{A}$ -системой*, если она содержит подсистему, изоморфную $\mathcal{A}$. Например, в *диофантовом* случае, когда все элементы основного множества A алгебраической системы $\mathcal{A}$ являются интерпретациями некоторых замкнутых термов языка L (т. е. термов, в записи которых участвуют только функциональные и константные символы языка L), любая нетривиальная алгебраическая система из $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$ (в частности, из $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$, $\mathbf{Res}(\mathcal{A})$, $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})$) является $\mathcal{A}$ -системой, поскольку $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{SP}_r(\mathcal{A})$.

3. Универсальная геометрическая эквивалентность

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические системы одной сигнатуры L . Напомним, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *геометрически эквивалентными*, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ имеет место равенство $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$. Далее при необходимости будем пользоваться и другими формами этого определения [6, предложение 1]. Предлагаем усилить понятие геометрической эквивалентности следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовем *универсально геометрически эквивалентными*, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$

- 1) имеет место равенство $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$, причем
- 2) алгебраическое множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо $V_{\mathcal{B}}(S)$.

Сразу отметим, что алгебраическое множество может быть неприводимым, приводимым либо пустым. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны и $V_{\mathcal{A}}(S) = \emptyset$, то $V_{\mathcal{B}}(S) = \emptyset$ [6, лемма 6]. Таким образом, при универсальной геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ для любой системы уравнений S алгебраические множества $V_{\mathcal{A}}(S)$ и $V_{\mathcal{B}}(S)$ одновременно неприводимы, приводимы либо пусты.

Теорема 7 в [6] выступает иллюстрацией свойства геометрической эквивалентности на категорном языке; ее усиление до универсальной геометрической эквивалентности приводит к следующему результату.

Теорема 1. Для любых алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L следующие условия равносильны:

- 1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны,
- 2) категории координатных алгебр $\mathbf{CA}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{CA}(\mathcal{B})$ совпадают, причем всякая координатная алгебра неприводима над $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда она неприводима над $\mathcal{B}$.

Утверждения 1, 2 влекут следующее:

- 3) категории алгебраических множеств $\mathbf{AS}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{AS}(\mathcal{B})$ изоморфны, причем существует такой изоморфизм между ними, при котором неприводимым алгебраическим множествам соответствуют неприводимые, а приводимым — приводимые.

Практически для установления универсальной геометрической эквивалентности алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ достаточно потребовать совпадения классов неприводимых координатных алгебр над $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, что вытекает из теоремы 1 и следующего далее предложения 2. В нем формулируем и доказываем ряд критериев универсальной геометрической эквивалентности. Отметим, что некоторые из них носят наглядный геометрический смысл, причем одни изначально кажутся более слабыми, чем исходное понятие универсальной геометрической эквивалентности, другие — более сильными, тем не менее все они оказываются равносильными.

Предложение 2. Для двух алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны;
- (2) для любого натурального числа $n \geq 1$, любой системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(x_1, \dots, x_n)$, любого натурального числа $m \geq 1$ и любых уравнений $f_1, \dots,$

$f_m \in \text{At}_L(x_1, \dots, x_n)$ (бесконечное) универсальное предложение

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \left(\bigwedge_{s \in S} s(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^m f_i(x_1, \dots, x_n) \right) \quad (1)$$

истинно в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в $\mathcal{B}$;

(3) для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ алгебраическое множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ неприводимо в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимо, причем в этом случае $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$;

(4) для любого конечного множества X , любого натурального числа $m \geq 1$ и любых систем уравнений $S, S_1, \dots, S_m \subseteq \text{At}_L(X)$ равенство $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S) = V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m)$;

(5) для любого конечного множества X , любого натурального числа $m \geq 1$ и любых систем уравнений $S, S_1, \dots, S_m \subseteq \text{At}_L(X)$ включение $V_{\mathcal{A}}(S) \subseteq V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S) \subseteq V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m)$;

(6) для любого конечного множества X , любой системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$, любого натурального числа $m \geq 1$ и любых уравнений $f_1, \dots, f_m \in \text{At}_L(X)$ включение $V_{\mathcal{A}}(S) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(\{f_m\})$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S) \subseteq V_{\mathcal{B}}(\{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(\{f_m\})$;

(7) для любого конечного множества X , любых натуральных чисел $m, k \geq 1$ и любых систем уравнений $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_k \subseteq \text{At}_L(X)$ равенство $V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m) = V_{\mathcal{A}}(T_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(T_k)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m) = V_{\mathcal{B}}(T_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(T_k)$;

(8) для любого конечного множества X подмножество $R \subseteq \text{At}_L(X)$ является неприводимым радикальным идеалом над $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если R — неприводимый радикальный идеал над $\mathcal{B}$;

(9) каждая конечно порожденная алгебраическая система $\mathcal{C}$ языка L изоморфна координатной алгебре некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если она изоморфна координатной алгебре некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{B}$;

(10) $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega}$;

(11) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ локально дискриминируют друг друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первую очередь покажем, что условия (2), (4)–(7) эквивалентны друг другу. Очевидными в этом ряду являются эквивалентность условий (2) и (6), а также импликации: (5) влечет (6), (7) влечет (4) и (5) влечет (7). Далее, для любых систем уравнений $S, S_1, \dots, S_m \subseteq \text{At}_L(X)$ включение $V_{\mathcal{A}}(S) \subseteq V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ равносильно равенству $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_1 \cup S) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m \cup S)$, с одной стороны, и, с другой стороны, оно же равносильно совокупности включений $V_{\mathcal{A}}(S) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(\{f_m\})$ по всевозможным наборам уравнений $f_1 \in S_1, \dots, f_m \in S_m$. Отсюда следуют импликации: (4) влечет (5) и (6) влечет (5).

Покажем, что эквивалентны друг другу условия (1), (3), (8)–(11). Поскольку класс координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств над алгебраической системой $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega}$, имеем эквивалентность условий (9) и (10). Эквивалентность условий (10) и (11) следует непосредственно из определения дискриминируемости. Тривиальным образом условие (1) влечет условие (3). Справедливость условия (3) позволяет сказать, что для любого неприводимого над $\mathcal{A}$ радикального идеала R алгебраическое множество

$V_{\mathcal{B}}(R)$ неприводимо, а его радикал совпадает с R , т. е. R — неприводимый радикал над $\mathcal{B}$, тем самым выполняется условие (8). Если справедливо условие (8), то каждая неприводимая координатная алгебра $\mathcal{C} = \mathcal{T}_{\mathbf{L}}(X)/\theta_R$ над $\mathcal{A}$ является неприводимой координатной алгеброй над $\mathcal{B}$, т. е. справедливо условие (9). Покажем, что эквивалентные условия (10), (11) влекут условие (1). Из справедливости условия (11) следует, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ локально аппроксимируют друг друга, что влечет их геометрическую эквивалентность [6, предложение 1]. Таким образом, для любой системы уравнений S имеем $\Gamma_{\mathcal{A}}(S) = \Gamma_{\mathcal{B}}(S)$, при этом алгебраическое множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\Gamma_{\mathcal{A}}(S) \in \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega}$, что равнозначно требованию $\Gamma_{\mathcal{B}}(S) \in \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega}$, т. е. тому, что неприводимо алгебраическое множество $V_{\mathcal{B}}(S)$.

Последнее, что нужно показать, это эквивалентность условий (2) и (11). Если условие (11) нарушается, то без ограничения общности можно считать, что в $\mathcal{A}$ найдется конечно порожденная подсистема $\mathcal{A}_0$, которая не дискриминируется алгебраической системой $\mathcal{B}$. Это означает, что найдутся такие натуральные числа $k, m \geq 1$, атомарные формулы $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \text{At}_{\mathbf{L}}(y_1, \dots, y_k)$ и элементы $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}_0$, что $\mathcal{A}_0 \models \neg\varphi_i(a_1, \dots, a_k)$ для всех $i = 1, \dots, m$, но для любого гомоморфизма $h: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ найдется индекс $i = 1, \dots, m$, для которого $\mathcal{B} \models \varphi_i(h(a_1), \dots, h(a_k))$. Запишем $\mathcal{A}_0$ через систему порождающих элементов и определяющих соотношений, $\mathcal{A}_0 = \langle X \mid S \rangle$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда $a_j = t_j(x_1, \dots, x_n)$, $t_j \in \text{T}_{\mathbf{L}}(X)$, $j = 1, \dots, k$. Любой гомоморфизм $h: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ определяется набором образов $h(x_1), \dots, h(x_n)$, в роли которых может выступать любой набор элементов из $\mathcal{B}$, удовлетворяющих всем соотношениям S . Таким образом, в $\mathcal{B}$ истинно (бесконечное) универсальное предложение (1) при $f_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, m$, но это же предложение ложно в $\mathcal{A}$. Таким образом, не выполняется условие (2). Проведенные рассуждения без труда обращаются: если (бесконечное) универсальное предложение (1) истинно в $\mathcal{B}$, но нарушается в $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \dots, a_n$, то подсистема $\mathcal{A}_0 \leq \mathcal{A}$, порожденная этими элементами, не может дискриминироваться с помощью $\mathcal{B}$. Таким образом, нарушение условия (2) влечет нарушение условия (11). $\square$

Следствие 3. Конечно порожденные алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они дискриминируют друг друга.

Следствие 4. Если для алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка $\mathbf{L}$ справедливо равенство $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega}$, то верно также и равенство $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Res}(\mathcal{B})_{\omega}$.

Доказательство. Действительно, равенство $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_{\omega}$ выступает критерием универсальной геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_{\omega} = \mathbf{Res}(\mathcal{B})_{\omega}$ — критерием геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ [6, предложение 1]. $\square$

Напомним, что геометрическая эквивалентность $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ влечет равенство $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$, которое обратимо в некоторых классах, в частности, в $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$ [6, теорема 23]. Для извлечения аналогичного следствия из универсальной геометрической эквивалентности воспользуемся следующим вспомогательным фактом.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические системы языка $\mathbf{L}$. Если $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B})$ и при этом каждое (конечное) универсальное предложение вида (1) истинно в $\mathcal{A}$ в том и только том случае, когда оно истинно в $\mathcal{B}$, то $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что $\mathcal{A}$ является тривиальной системой тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — тривиальная система, поскольку тривиальность выражается с помощью тождеств. Таким образом, можно считать, что $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \mathcal{E}$. Во-вторых, произвольное универсальное предложение языка L эквивалентно конечной конъюнкции (конечных) универсальных предложений вида (1) и некоторых антитожеств. В-третьих, любое антитожество в классе нетривиальных алгебраических систем эквивалентно множеству квазитожеств. $\square$

Следствие 6. Если алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L универсально геометрически эквивалентны, то они универсально эквивалентны, т. е. $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$.

Поскольку существуют примеры элементарно эквивалентных, но геометрически не эквивалентных алгебраических систем [21], следствие 6 необратимо в общем случае.

В диофантовом случае интерес представляет связь между геометрической эквивалентностью и классификацией координатных алгебр.

Утверждение 7. Допустим, что каждый элемент алгебраической L -системы $\mathcal{A}$ является интерпретацией некоторого замкнутого термина языка L . Тогда для любой нетривиальной конечно порожденной L -системы $\mathcal{C}$ следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ геометрически эквивалентны;
- (2) $\mathcal{C}$ является координатной алгеброй некоторого алгебраического множества над $\mathcal{A}$.

Кроме того, эквивалентны такие условия:

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ универсально геометрически эквивалентны;
- (2) $\mathcal{C}$ является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае все нетривиальные алгебраические системы из $\mathbf{Res}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})$ являются $\mathcal{A}$ -системами, поэтому условие $\mathbf{Res}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Res}(\mathcal{C})_\omega$ равносильно включению $\mathcal{C} \in \mathbf{Res}(\mathcal{A})$, а условие $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{C})_\omega$ — включению $\mathcal{C} \in \mathbf{Dis}(\mathcal{A})$. $\square$

4. Универсальная геометрическая эквивалентность и нётеровость по уравнениям

Предположим, что алгебраическая L -система $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям. Это обстоятельство открывает большие возможности для исследования алгебраической геометрии над $\mathcal{A}$. В этом случае справедливы так называемые объединяющие теоремы для описания координатных алгебр над $\mathcal{A}$ как всех, так и отдельно неприводимых [2]. Кроме того, любое непустое алгебраическое множество над $\mathcal{A}$ представимо в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств (и при несократимости это представление единственно) [2, теорема 4.4]. Отметим, что в ближайших к $\mathbf{N}$ классах $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{U}$ аналогичный результат, вообще говоря, неверен [22].

Теперь предположим, что алгебраическая L -система $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентна $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B}$ также нётерова по уравнениям [6, лемма 7]. При этом если алгебраическое множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ неприводимо, то и $V_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимо; если $V_{\mathcal{A}}(S)$ приводимо и $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ —

разложение в конечное несократимое объединение неприводимых алгебраических множеств, то $V_{\mathcal{B}}(S)$ также приводимо, а $V_{\mathcal{B}}(S) = V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m)$ — разложение в конечное несократимое объединение неприводимых алгебраических множеств.

Понятие геометрической эквивалентности в классе $\mathbf{N}$ является логическим и совпадает с понятием квазиэквивалентности [6, лемма 8]. Аналогичное утверждение справедливо и для понятия универсальной геометрической эквивалентности в классе $\mathbf{N}$.

Лемма 8 (частный случай леммы 12 ниже). *Нётеровы по уравнениям алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны в том и только том случае, если $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$.*

Следствие 9. *Если алгебраическая система $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям, то все алгебраические $\mathcal{A}$ -системы из универсального класса $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ нётеровы по уравнениям и универсально геометрически эквивалентны $\mathcal{A}$ (или, что то же, универсально геометрически эквивалентны друг другу).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, любая алгебраическая $\mathcal{A}$ -система $\mathcal{B} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ нётерова по уравнениям [2, утверждение 4.5], в то же время $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. $\square$

Проиллюстрируем геометрическую и универсальную геометрическую эквивалентности на примере абелевых групп. В качестве языка возьмем стандартный групповой язык $L_{\text{gr}} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$. Любая абелева группа A как L_{gr} -алгебра нётерова по уравнениям [21], следовательно, две абелевы группы A и B геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathbf{Qvar}(A) = \mathbf{Qvar}(B)$, а универсально геометрически они эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathbf{Ucl}(A) = \mathbf{Ucl}(B)$, поэтому для описания (универсально) геометрически эквивалентных абелевых групп воспользуемся результатами из [23, 24].

Для сокращения записи примем несколько обозначений. Если абелева группа A ограничена, т. е. существует такое целое положительное число m , что $a^m = 0$ для всех $a \in A$, то будем писать $\delta(A) = 0$; иначе $\delta(A) = 1$. Пусть $\mathbf{K}_Q$ — класс всех конечных циклических абелевых групп, $\mathbf{K}_Q = \{C(p^k)\}$, где p пробегает множество всех простых чисел, а k — множество целых положительных. Пусть также $\mathbf{K}_U$ — класс всех конечных p -примарных абелевых групп по всем простым p , $\mathbf{K}_U = \{C^{m_1}(p) \oplus C^{m_2}(p^2) \oplus \dots \oplus C^{m_k}(p^k)\}$, где p пробегает множество всех простых чисел, k — множество целых положительных и $m_i, i = 1, \dots, k$, — множество целых неотрицательных.

Утверждение 10 [23, 24]. *Пусть A и B — абелевы группы. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *A и B геометрически эквивалентны как L_{gr} -алгебры тогда и только тогда, когда $\delta(A) = \delta(B)$ и $\mathbf{S}(A)_\omega \cap \mathbf{K}_Q = \mathbf{S}(B)_\omega \cap \mathbf{K}_Q$;*

(2) *A и B универсально геометрически эквивалентны как L_{gr} -алгебры тогда и только тогда, когда $\delta(A) = \delta(B)$ и $\mathbf{S}(A)_\omega \cap \mathbf{K}_U = \mathbf{S}(B)_\omega \cap \mathbf{K}_U$.*

В частности, например, геометрически эквивалентные абелевы группы $C(p)$ и $C^2(p)$ универсально не эквивалентны. Отметим, что в действительности в работах А. А. Виноградова [23] и А. А. Мищенко, В. Н. Ремесленникова и А. В. Трейера [24] проведены классификации квазимногообразий и универсальных классов абелевых групп соответственно, из которых легко выводится приведенный выше результат утверждения 10. Кроме этого, существует неопублико-

ванная работа А. Берзиньша, в которой критерий геометрической эквивалентности абелевых групп сформулирован на языке экспонент. Соответствующую формулировку можно найти в лекциях Б. И. Плоткина [11, лекция 3, предложение 4].

5. Универсальная геометрическая эквивалентность и u_ω -компактность

Класс u_ω -компактных алгебраических систем $\mathbf{U}$ является ближайшим к классу нётеровых по уравнениям алгебраических систем $\mathbf{N}$ в том смысле, что в нем справедливы объединяющие теоремы, правда, с одной поправкой, связанной с тем, что в классе $\mathbf{U}$, вообще говоря, нет результата о разложении произвольного алгебраического множества в конечное объединение неприводимых [3]. В отличие от классов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$, которые инвариантны относительно геометрической эквивалентности, для класса $\mathbf{U}$ это, вообще говоря, неверно [6, замечание 13]. При универсальной геометрической эквивалентности эта проблема устраняется.

Лемма 11. *Класс $\mathbf{U}$ инвариантен относительно универсальной геометрической эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — универсально геометрически эквивалентные алгебраические системы языка L и $\mathcal{A}$ u_ω -компактна. Тогда $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_\omega$, следовательно, $\mathcal{B}$ u_ω -компактна. $\square$

Покажем, что в классе $\mathbf{U}$ понятие универсальной геометрической эквивалентности логическое.

Лемма 12. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — u_ω -компактные алгебраические системы языка L . Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны;
- (2) $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$, то $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\omega = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})_\omega = \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_\omega$, что в силу предложения 2 приводит к универсальной геометрической эквивалентности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Обратный результат доказан в следствии 6. $\square$

Следствие 13. *Пусть $\mathcal{A}$ — u_ω -компактная алгебраическая система и $\mathcal{B} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$, причем $\mathcal{A}$ локально дискриминируется с помощью $\mathcal{B}$ (в частности, $\mathcal{B}$ может быть любой алгебраической $\mathcal{A}$ -системой из $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$, например, любой ультрастепенью $\mathcal{A}$). Тогда $\mathcal{B}$ u_ω -компактна и универсально геометрически эквивалентна $\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, алгебраическая система $\mathcal{B}$ u_ω -компактна и $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$ [3, лемма 7.8], следовательно, $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентна $\mathcal{A}$. $\square$

Следствие 14. *Если $\mathbf{K}$ — некоторый класс алгебраических систем, в котором понятия универсальной и универсальной геометрической эквивалентностей совпадают и $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{U}$, то $\mathbf{K} = \mathbf{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любой алгебраической системы $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ и ее u_ω -компактного элементарного расширения $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ имеем $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{K}$, следовательно, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны, а в силу леммы 11 $\mathcal{A} \in \mathbf{U}$. Таким образом, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{U}$, откуда $\mathbf{K} = \mathbf{U}$. $\square$

Отметим, что существуют хорошие примеры не $\mathfrak{u}_\omega$ -компактных алгебраических систем (в том числе в классе конечно порожденных групп [21]), а с их помощью наглядно демонстрируется разница между универсальной и универсальной геометрической эквивалентностями.

Лемма 15. Если алгебраическая система $\mathcal{A}$ не является $\mathfrak{u}_\omega$ -компактной, то найдется ультрастепень $\mathcal{B}$ системы $\mathcal{A}$, универсально геометрически не эквивалентная $\mathcal{A}$. Кроме того, если $\mathcal{A}$ конечно порождена, то найдется такое конечно порожденное расширение $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$, что $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{C})$, но $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ универсально геометрически не эквивалентны.

Доказательство. Возьмем $\mathcal{C}_0 \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})_\omega \setminus \mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega$. Так как $\mathcal{C}_0 \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{SP}_\mathbf{u}(\mathcal{A})$, выделим ультрастепень $\mathcal{B}$ алгебраической системы $\mathcal{A}$, подсистемой которой является $\mathcal{C}_0$. Тогда $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega \neq \mathbf{Dis}(\mathcal{B})_\omega$, поэтому в силу предложения 2 $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически не эквивалентны. Через $\mathcal{C}$ обозначим алгебраическую подсистему в $\mathcal{B}$, порожденную диагональю $\mathcal{A}$ и алгебраической системой $\mathcal{C}_0$. Если $\mathcal{A}$ конечно порождена, то и $\mathcal{C}$ конечно порождена. В то же время $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{C})$, но $\mathbf{Dis}(\mathcal{A})_\omega \neq \mathbf{Dis}(\mathcal{C})_\omega$. $\square$

Следствие 16. Если $\mathbf{K}$ — некоторый класс алгебраических $\mathbf{L}$ -систем, замкнутый относительно ультрастепеней, в котором понятия универсальной и универсальной геометрической эквивалентностей совпадают, то $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{U}$.

Следующая теорема дает критерий $\mathfrak{u}_\omega$ -компактности алгебраической системы $\mathcal{A}$ на языке универсальной геометрической эквивалентности алгебраических систем из ее универсального класса $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$.

Теорема 17. Для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathbf{L}$ следующие условия эквивалентны:

- (1) алгебраическая система $\mathcal{A}$ $\mathfrak{u}_\omega$ -компактна;
- (2) все алгебраические $\mathcal{A}$ -системы из универсального класса $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ универсально геометрически эквивалентны друг другу (или, что то же, универсально геометрически эквивалентны $\mathcal{A}$);
- (3) все алгебраические системы из универсального класса $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$, локально дискриминирующие $\mathcal{A}$, универсально геометрически эквивалентны друг другу (или, что то же, универсально геометрически эквивалентны $\mathcal{A}$).

Доказательство. Следствие 13 доказывает, что условие (1) влечет условие (3). Условие (3) влечет условие (2) тривиальным образом. Чтобы проверить, что условие (2) влечет условие (1), предположим противное: алгебраическая система $\mathcal{A}$ не является $\mathfrak{u}_\omega$ -компактной. Тогда в силу леммы 15 найдется алгебраическая $\mathcal{A}$ -система $\mathcal{B} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$, а именно подходящая ультрастепень алгебраической системы $\mathcal{A}$, универсально геометрически не эквивалентная $\mathcal{A}$. $\square$

Отметим, что в диофантовом случае все нетривиальные алгебраические системы из $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ являются $\mathcal{A}$ -системами, поэтому здесь формулировка теоремы 17 естественным образом упрощается.

6. Универсальная ω -геометрическая эквивалентность

Напомним, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка $\mathbf{L}$ называются ω -геометрически эквивалентными, если для любого конечного множества X и любой конечной системы уравнений $S \subseteq \text{At}_\mathbf{L}(X)$ имеет место равенство $\text{Rad}_\mathcal{A}(S) = \text{Rad}_\mathcal{B}(S)$. Важность этого геометрического понятия в том, что оно

совпадает с квазиэквивациональной эквивалентностью для любых алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ [6, лемма 19].

Имея целью введение геометрического аналога для универсальной эквивалентности, обобщим не исходное определение универсальной геометрической эквивалентности, а один из его критериев, доказанных в предложении 2 (обоснование такого выбора приведено ниже).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L назовем *универсально ω -геометрически эквивалентными*, если для любого конечного множества X , любого натурального числа $m \geq 1$ и любых **конечных** систем уравнений $S, S_1, \dots, S_m \subseteq \text{At}_L(X)$ равенство $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S) = V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m)$.

В силу предложения 2 универсальная геометрическая эквивалентность алгебраических систем влечет их универсальную ω -геометрическую эквивалентность. В свою очередь, универсальная ω -геометрическая эквивалентность влечет ω -геометрическую эквивалентность, поскольку алгебраические L -системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ω -геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого конечного множества X и любых конечных систем уравнений $S_1, S_2 \subseteq \text{At}_L(X)$ равенство $V_{\mathcal{A}}(S_1) = V_{\mathcal{A}}(S_2)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S_1) = V_{\mathcal{B}}(S_2)$ [6, лемма 19].

Повторяя рассуждения доказательства предложения 2, а именно обоснование того, что условия (2), (4)–(7) эквивалентны, и своевременно накладывая ограничение конечности на встречающиеся системы уравнений, затем прибавляя факт, сформулированный в лемме 5, получим следующие критерии универсальной ω -геометрической эквивалентности.

Лемма 18. Для двух алгебраических систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω -геометрически эквивалентны;
- (2) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально эквивалентны, т. е. $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$;
- (3) для любого конечного множества X , любого натурального числа $m \geq 1$ и любых конечных систем уравнений $S, S_1, \dots, S_m \subseteq \text{At}_L(X)$ включение $V_{\mathcal{A}}(S) \subseteq V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S) \subseteq V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m)$;
- (4) для любого конечного множества X , любой конечной системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$, любого натурального числа $m \geq 1$ и любых уравнений $f_1, \dots, f_m \in \text{At}_L(X)$ включение $V_{\mathcal{A}}(S) \subseteq V_{\mathcal{A}}(\{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(\{f_m\})$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S) \subseteq V_{\mathcal{B}}(\{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(\{f_m\})$;
- (5) для любого конечного множества X , любых натуральных чисел $m, k \geq 1$ и любых конечных систем уравнений $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_k \subseteq \text{At}_L(X)$ равенство $V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m) = V_{\mathcal{A}}(T_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(T_k)$ имеет место в том и только том случае, если $V_{\mathcal{B}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S_m) = V_{\mathcal{B}}(T_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(T_k)$.

Следствие 19. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — универсально ω -геометрически эквивалентные алгебраические системы языка L . Тогда для любого конечного множества X и любой конечной системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ алгебраические множества $V_{\mathcal{A}}(S)$ и $V_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимы, приводимы или пусты одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V_{\mathcal{A}}(S) = \emptyset$, то в силу конечности S в $\mathcal{A}$ истинно соответствующее универсальное предложение, а ввиду равенства $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$ то же предложение будет истинно в $\mathcal{B}$, следовательно, $V_{\mathcal{B}}(S) = \emptyset$. Предположим, что $V_{\mathcal{A}}(S)$ приводимо и $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_1) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S_m)$ —

его представление в виде конечного объединения собственных алгебраических подмножеств. Тогда для каждого $i = 1, \dots, m$ существует уравнение $f_i \in \text{Rad}_{\mathcal{A}}(S_i)$, для которого включение $V_{\mathcal{A}}(S) \supset V_{\mathcal{A}}(S \cup \{f_i\})$ строгое. Включения $V_{\mathcal{B}}(S) \supset V_{\mathcal{B}}(S \cup \{f_i\})$, $i = 1, \dots, m$, также строгие, поэтому равенство $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S \cup \{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{A}}(S \cup \{f_m\})$ индуцирует представление алгебраического множества $V_{\mathcal{B}}(S)$ в виде конечного объединения собственных алгебраических подмножеств, $V_{\mathcal{B}}(S) = V_{\mathcal{B}}(S \cup \{f_1\}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(S \cup \{f_m\})$, обосновывая его приводимость. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Напомним, что класс $\mathbf{N}$ инвариантен относительно отношения ω -геометрической эквивалентности (в частности, $\mathbf{N}$ инвариантен относительно универсальной ω -геометрической эквивалентности и относительно элементарной эквивалентности). Классы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{N}'$, напротив, в общем случае не инвариантны даже относительно элементарной эквивалентности [6, замечание 21], а следовательно, ни относительно ω -геометрической, ни относительно универсальной ω -геометрической.

Теорема 21. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — ω -компактные алгебраические системы языка L . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны;
- (2) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально эквивалентны, т. е. $\text{Ucl}(\mathcal{A}) = \text{Ucl}(\mathcal{B})$;
- (3) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω -геометрически эквивалентны.

Список дополняется эквивалентностями из предложения 2 и леммы 18.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует из лемм 12 и 18. $\square$

Теорема 22. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — нётеровы или слабо нётеровы по уравнениям алгебраические системы языка L . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны;
- (2) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально эквивалентны, т. е. $\text{Ucl}(\mathcal{A}) = \text{Ucl}(\mathcal{B})$;
- (3) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально ω -геометрически эквивалентны;
- (4) для любого конечного множества X и любой конечной системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ имеет место равенство $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$, причем алгебраические множества $V_{\mathcal{A}}(S)$ и $V_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимы, приводимы или пусты одновременно;

- (5) для любого конечного множества X и любой конечной системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ алгебраическое множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ неприводимо тогда и только тогда, когда $V_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимо, причем в этом случае $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$.

Список дополняется эквивалентностями из предложения 2 и леммы 18.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено условие (5), и покажем, что в этом случае $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально геометрически эквивалентны. В силу следствия 6, леммы 18, следствия 19 и очевидности того, что условие (4) влечет условие (5), этого достаточно для доказательства всей теоремы.

Рассмотрим произвольную систему уравнений S и обозначим через $I_{\mathcal{A}}$ множество всех неприводимых радикальных идеалов $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S_0)$ таких, что $|S_0| < \infty$ и $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S_0) \supseteq S$. Пусть $I_{\mathcal{B}}$ — аналогичное множество для $\mathcal{B}$. Имеем равенство $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{B}}$. Так как произвольный радикальный идеал совпадает с пересечением всех его содержащих неприводимых радикальных идеалов, а алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ слабо нётеровы по уравнениям, то $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \bigcap \{R \mid R \in I_{\mathcal{A}}\}$ и $\text{Rad}_{\mathcal{B}}(S) = \bigcap \{R \mid R \in I_{\mathcal{B}}\}$, откуда $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$. При этом для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ существует такая конечная система уравнений $S_0 \subseteq \text{At}_L(X)$, что $S \sim_{\mathcal{A}} S_0$ и $S \sim_{\mathcal{B}} S_0$ [6,

предложение 1]. Таким образом, алгебраическое множество $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_0)$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо алгебраическое множество $V_{\mathcal{B}}(S_0) = V_{\mathcal{B}}(S)$. $\square$

Вернемся к выбору определения понятия универсальной ω -геометрической эквивалентности. Возникает естественный вопрос: почему мы не остановились на непосредственном обобщении исходного определения универсальной геометрической эквивалентности? Для удобства изложения договоримся, что алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ условно ω -геометрически эквивалентны (т. е. $\mathcal{A} \sim_{\omega} \mathcal{B}$), если для любого конечного множества X и любой **конечной** системы уравнений $S \subseteq \text{At}_L(X)$ имеет место равенство $\text{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = \text{Rad}_{\mathcal{B}}(S)$, причем соответствующие алгебраические множества $V_{\mathcal{A}}(S)$ и $V_{\mathcal{B}}(S)$ неприводимы, приводимы или пусты одновременно. Из рассуждений выше видно, что равенство $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$ влечет $\mathcal{A} \sim_{\omega} \mathcal{B}$, причем в классах $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ справедливо и обратное: $\mathcal{A} \sim_{\omega} \mathcal{B}$ влечет $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B})$. Однако условная ω -геометрическая эквивалентность не соответствует заданной цели — быть геометрическим аналогом универсальной эквивалентности для произвольных алгебраических систем. Покажем, что даже в классе $\mathbf{U}$ условная ω -геометрическая эквивалентность, причем даже в сумме с геометрической эквивалентностью, вообще говоря, не влечет универсальную эквивалентность.

ПРИМЕР 1. Пусть $L = \{x > a, x < b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ — язык, состоящий из одноместных предикатов, и $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}; L \rangle$ — алгебраическая система с естественной интерпретацией предикатов. Через $\mathcal{B}$ обозначим подсистему $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{A}^2$ с носителем $B = \{(c, c), c \in \mathbb{Q}\} \cup \{(2, 1)\}$. Пусть также $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}'$ и $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$ — соответствующие элементарные ω -компактные расширения. Тогда алгебраические системы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ геометрически эквивалентны [6, следствие 3]. Поскольку $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A}') = \mathbf{Qvar}(\mathcal{A}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B}) = \mathbf{Qvar}(\mathcal{B}')$, то $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ также геометрически эквивалентны [6, лемма 10]. Далее, непосредственно проверяется, что для любой конечной системы уравнений S алгебраические множества $V_{\mathcal{A}}(S)$ и $V_{\mathcal{B}}(S)$ либо приводимы, либо пусты одновременно, но не могут быть неприводимыми, таким образом, $\mathcal{A} \sim_{\omega} \mathcal{B}$. Но поскольку $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A}')$ и $\mathbf{Ucl}(\mathcal{B}) = \mathbf{Ucl}(\mathcal{B}')$, согласно следствию 19, $\mathcal{A} \sim_{\omega} \mathcal{A}'$ и $\mathcal{B} \sim_{\omega} \mathcal{B}'$, следовательно, $\mathcal{A}' \sim_{\omega} \mathcal{B}'$. Наконец, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ универсально не эквивалентны: универсальное предложение $\forall x (x > 1 \vee x < 2)$ истинно в $\mathcal{A}$ и ложно в $\mathcal{B}$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A}') \neq \mathbf{Ucl}(\mathcal{B}')$. Таким образом, алгебраические системы $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \in \mathbf{U}$ геометрически эквивалентны, условно ω -геометрически эквивалентны, но универсально не эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry // Algebra Discrete Math. 2008. V. 1. P. 80–112.
2. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // Фунд. и прикл. математика. 2011/2012. Т. 17, № 1. С. 65–106.
3. Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures. III. Equationally Noetherian property and compactness // Southeast Asian Bull. Math. 2011. V. 35, N 1. P. 35–68.
4. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и ко-области // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 6. С. 715–756.
5. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. V. Случай произвольной сигнатуры // Алгебра и логика.

2012. Т. 51, № 1. С. 41–60.
6. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. VI. Геометрическая эквивалентность // Алгебра и логика. (Принята к печати).
 7. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Универсальная алгебраическая геометрия // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 6. С. 730–732.
 8. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Размерность в универсальной алгебраической геометрии // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 3. С. 265–267.
 9. Grätzer G., Lakser H. A note on implicational class generated by class of structures // Canad. Math. Bull. 1973. V. 16, N 4. P. 603–605.
 10. Berzins A. Geometrical equivalence of algebras // Int. J. Algebra Comput. 2001. V. 11, N 4. P. 447–456.
 11. Plotkin B. I. Seven lectures on the universal algebraic geometry / Preprint. arXiv:math/0204245 [math.GM], 2002, 87 pp.
 12. Göbel R., Shelah S. Radicals and Plotkin's problem concerning geometrically equivalent groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130, N 3. P. 673–674.
 13. Плоткин Б. И. Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 3. С. 181–197.
 14. Plotkin B., Tsurkov A. Action type geometrical equivalence of representations of groups // Algebra Discrete Math. 2005. V. 4. P. 48–79.
 15. Plotkin B. I. Geometrical equivalence, geometrical similarity, and geometrical compatibility of algebras // J. Math. Sci. (New York). 2007. V. 140, N 5. P. 716–728.
 16. Plotkin B., Zhitomirski G. Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras // Algebra Anal. 2007. V. 19, N 5. P. 214–245.
 17. Плоткин Б. И. Изотипные алгебры // Современные проблемы математики. 2011. Т. 15. С. 40–66.
 18. Plotkin B. Algebras with the same (algebraic) geometry // Proc. Steklov Inst. Math. 2003. V. 242. P. 165–196.
 19. Plotkin E., Plotkin B. Multi-sorted logic and logical geometry: some problems // Demonstr. Math. 2015. V. 48, N 4. P. 578–618.
 20. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
 21. Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // J. Algebra. 2000. V. 234, N 1. P. 225–276.
 22. Shevlyakov A. N. Commutative idempotent semigroups at the service of universal algebraic geometry // Southeast Asian Bull. Math. 2011. V. 35, N 1. P. 111–136.
 23. Виноградов А. А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 5. С. 15–19.
 24. Мищенко А. А., Ремесленников В. Н., Трейер А. В. Универсальные инварианты для классов абелевых групп // Алгебра и логика. (Принята к печати).

Статья поступила 9 июня 2017 г.

Даниярова Эвелина Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
evelina.omsk@list.ru

Мясников Алексей Георгиевич
Schaefer School of Engineering and Science,
Department of Mathematical Sciences,
Stevens Institute of Technology,
Castle Point on Hudson, Hoboken NJ 07030-5991, USA
amiasnikov@gmail.com

Ремесленников Владимир Никанорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
remesl@ofim.oscsbras.ru