

О ВЛОЖЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ В ПОДСТАНОВОЧНЫЕ СПЛЕТЕНИЯ

А. В. Заварницин

Аннотация. Найдено необходимое условие вложимости центрального расширения группы G с элементарным абелевым ядром в сплетение, соответствующее ее заданному подстановочному представлению.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.508

Ключевые слова: подстановочный модуль, центральное расширение, сплетение.

1. Введение

Конечная группа $G = \text{PSL}_2(q)$, где q нечетно, естественно действует подстановками на проективной прямой порядка $q+1$. В [1] изучалось вложение $\text{SL}_2(q)$ в подстановочное сплетение $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с G , соответствующее этому подстановочному действию. Эта проблема была обобщена в [2] на произвольные группы $\text{PSL}_n(q)$ и их центральные расширения с ядром простого порядка. В настоящей работе получено дальнейшее обобщение этих результатов.

Пусть G — конечная группа, Ω — конечное множество и $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ — подстановочное представление. Для $\omega \in \Omega$ обозначим через $\text{St}(\omega)$ стабилизатор ω в G .

Пусть A — коммутативное кольцо простой характеристики p . Рассмотрим (правый) подстановочный AG -модуль V , соответствующий ρ , с базисом (отождествленным с) Ω и его подмодуль

$$0 \rightarrow I \rightarrow V, \quad (1)$$

порожденный $\omega_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \omega$. Ясно, что есть изоморфизм AG -модулей $\alpha : A \rightarrow I$, определенный правилом $\alpha : 1 \mapsto \omega_0$. Пусть $G \ltimes V$ обозначает естественное полупрямое произведение.

Предположим также, что имеется центральное расширение

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1, \quad (2)$$

т. е. такое, что $\text{Im } \iota \leq Z(H)$, где кольцо A отождествляем с его аддитивной группой A^+ . Будем говорить, что подгруппа $S \leq G$ *поднимается* в H , если полный прообраз $S\pi^{-1}$ расщепляется над $\text{Im } \iota$. Также будем говорить, что H является *подрасширением* в $G \ltimes V$ относительно вложения (1), если существует вложение $\beta : H \rightarrow G \ltimes V$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & H & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & G \ltimes V & \longrightarrow & G \longrightarrow 1, \end{array} \quad (3)$$

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (код проекта 14-21-00065).

где $I = \text{Im } \alpha$ отождествляем с его образом в V под действием (1).

Главным результатом, доказанным в разд. 5, является следующее необходимое условие.

Теорема 1. *В принятых выше обозначениях если центральное расширение H является подрасширением $G \triangleleft V$ относительно вложения (1), то $\text{St}(\omega)$ поднимается в H для любого $\omega \in \Omega$.*

Доказательство этого утверждения является обобщением некоторых идей, изложенных в [1, 2]. В частности, будет доказан вспомогательный результат о копредставлениях p -групп.

Пусть $F = F\langle X \rangle$ — свободная группа с базой X . Каждый элемент $w \in F$ можно записать в виде

$$w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_t^{\varepsilon_t},$$

где $x_i \in X$ и $\varepsilon = \pm 1$. Для $x \in X$ определим

$$\log_x(w) = \sum_{x_i=x} \varepsilon_i.$$

Следующий факт доказан в разд. 4.

Предложение 2. *Каждая конечная p -группа P имеет конечное копредставление $\langle X \mid R \rangle$ такое, что $\log_x(r) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $x \in X$, $r \in R$.*

2. Производные Фокса

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $F = F\langle X \rangle$ — свободная группа с базой X . Напомним, что i -я (правая) производная Фокса — это отображение $\partial/\partial x_i : F \rightarrow \mathbb{Z}F$, удовлетворяющее условиям $\partial x_j / \partial x_i = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq n$, и

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

для всех $u, v \in F$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $w = w(x_1, \dots, x_n) \in F$ и $w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_l}^{\varepsilon_l}$, где $x_{i_k} \in X$ и $\varepsilon_k = \pm 1$ для всех k . Можно показать [3, предложение 2.73], что

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{\{k|i_k=i\}} \varepsilon_k f_k,$$

где

$$f_k = \begin{cases} x_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots x_{i_l}^{\varepsilon_l}, & \text{если } \varepsilon_k = 1, \\ x_{i_k}^{\varepsilon_k} x_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots x_{i_l}^{\varepsilon_l}, & \text{если } \varepsilon_k = -1. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть G — группа и V — G -модуль. Фиксируя гомоморфизм $F \rightarrow G \triangleleft V$, запишем образ каждого x_i в виде $g_i v_i$ для подходящих $g_i \in G$, $v_i \in V$. Тогда, используя аддитивное обозначение в V , можно записать

$$w(g_1 v_1, \dots, g_n v_n) = w(g_1, \dots, g_n) \left(v_1 \frac{\partial w}{\partial g_1} + \dots + v_n \frac{\partial w}{\partial g_n} \right), \quad (5)$$

где $\partial/\partial g_i$ — сокращенное обозначение композиции $\partial/\partial x_i$ и гомоморфизма $\mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}G$, который продолжает отображение $x_i \mapsto g_i$, $i = 1, \dots, n$ (подробности см. в [4, § 1.9]).

3. Копредставление групповых расширений

Пусть $1 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$ — короткая точная последовательность групп. Предположим, что N имеет копредставление $\langle \bar{Y} \mid \bar{S} \rangle$ и Q — копредставление $\langle \bar{X} \mid \bar{R} \rangle$. Используя эту информацию, можно описать копредставление группы G . Пусть Y — образ $\bar{Y}$ под действием $\iota: \bar{y} \mapsto y$ и

$$S = \{s \mid \bar{s} \in \bar{S}\},$$

где s — слово от Y , полученное из $\bar{s}$ заменой каждого $\bar{y}$ на y . Выберем множество представителей $X \subseteq G$ так, что $x\pi = \bar{x} \in \bar{X}$ для всех $x \in X$. Для каждого $\bar{r} \in \bar{R}$ пусть r обозначает слово от X , полученное из $\bar{r}$ заменой каждого $\bar{x}$ на x . Ясно, что r как элемент группы G лежит в $\text{Ker } \pi = \text{Im } \iota$ и, значит, является словом, скажем, w_r от Y . Определим

$$R = \{rw_r^{-1} \mid \bar{r} \in \bar{R}\}.$$

Поскольку $\text{Im } \iota \leq G$, элемент $x^{-1}yx$ лежит в $\text{Im } \iota$ для всех $y \in Y$, $x \in X$ и, значит, является словом, скажем, w_{xy} от Y . Положим

$$T = \{x^{-1}yxw_{xy}^{-1} \mid \bar{x} \in \bar{X}, \bar{y} \in \bar{Y}\}.$$

Предложение 3 [5, предложение 10.2.1; 3, предложение 2.55]. В принятых выше обозначениях $\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup T \rangle$ — копредставление группы G .

4. Доказательство предложения 2

Напомним, что $\Omega_1(P)$ обозначает подгруппу p -группы P , порожденную всеми элементами порядка p .

Доказательство предложения 2 проведем индукцией по $|P|$. Если $|P| = 1$, то утверждение справедливо. Предположим, что $|P| > 1$, и пусть $N = \Omega_1(Z(P))$. Заметим, что N — нетривиальная элементарная абелева p -группа и

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} P \rightarrow Q \rightarrow 1$$

— центральное расширение. По индукции Q обладает конечным копредставлением $\langle \bar{X} \mid \bar{R} \rangle$, удовлетворяющим требуемому свойству. Ясно, что N также имеет требуемое копредставление $\langle \bar{Y} \mid \bar{S} \rangle$, где $\bar{Y}$ конечно и

$$\bar{S} = \{\bar{y}^p, [\bar{y}_1, \bar{y}_2] \mid \bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{Y}\}.$$

Заметим, что в качестве $\bar{Y}$ можно выбрать произвольный базис группы N . Определим множества порождающих X , Y и определяющих слов R , S , T , как перед предложением 3, где $G = P$. Поскольку определяющие слова из S переписаны из слов $\bar{S}$, они обладают требуемым свойством, т. е. сумма показателей каждого порождающего в каждом слове кратна p . Так как подгруппа $\text{Im } \iota$ центральна в P , имеем $w_{xy} = y$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, значит, T состоит из коммутаторов, обладающих требуемым свойством. Рассмотрим слова rw_r^{-1} из R . Исключим некоторые из них, а в оставшихся заменим подслова w_r новыми, удовлетворяющими требуемому условию.

В самом деле, можно выбрать минимальное линейно независимое подмножество множества

$$W = \{w_r \mid r \in R\} \subseteq \text{Im } \iota$$

и дополнить его до базиса группы $\text{Im } \iota$. Как было отмечено, без ограничения общности можно считать, что этот базис совпадает с Y . Все порождающие

$y = w_r \in W \cap Y$ можно исключить, подставив их в другие слова, поскольку есть соотношения $w_r = r$, где r не содержит ни одного $y \in Y$. Оставшиеся слова $w_r \in W \setminus Y$ являются линейными комбинациями таких порождающих, значит, после подстановки они станут словами от R , обладающими нужным свойством по индукции. Слова из $S \cup T$ являются коммутаторами и степенями вида y^p и, стало быть, также сохраняют требуемое свойство после подстановки. Получившееся копредставление группы P , очевидно, удовлетворяет требуемому условию. Предложение доказано.

5. Доказательство основной теоремы

Будет использован следующий результат.

Предложение 4 (теорема Гашюца [6, (10.4)]). Пусть p — простое число, V — нормальная абелева p -подгруппа конечной группы G и $P \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда G расщепляется над V в том и только том случае, когда P расщепляется над V .

Теперь можем доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Обозначим $\omega_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \omega$. Пусть, напротив, существует $\omega \in \Omega$ такой, что $S = \text{St}(\omega)$ не поднимается в H . Пусть $P \in \text{Syl}_p(S)$. Поскольку A — абелева p -группа, из предложения 4 следует, что P не поднимается в H . Пусть $\langle X | R \rangle$ — конечное копредставление группы P , обладающее свойством $\log_x(r) \equiv 0 \pmod{p}$ для любых $x \in X$, $r \in R$. Такое копредставление существует по предложению 2.

Пусть $F = F\langle X \rangle$ — свободная группа с базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Для каждого $x \in X$ обозначим $\underline{x} = x\gamma \in P$, где $\gamma : F \rightarrow P$ — копредставляющий гомоморфизм, и выберем $\bar{x} \in H$ так, что

$$\bar{x}\pi = \underline{x}, \quad (6)$$

где π из (2). Существует определяющее слово $r = r(x_1, \dots, x_n) \in R$ такое, что $\bar{r} = r(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \neq 1$ в группе H . В самом деле, в противном случае подгруппа

$$\bar{P} = \langle \bar{x} \mid x \in X \rangle \leq H$$

удовлетворяла бы тем же соотношениям, что и P , значит, отображение $[x \mapsto \bar{x}]$, $x \in X$, продолжалось бы до гомоморфизма $\sigma : P \rightarrow \bar{P}$ со свойством $\sigma\pi = \text{id}_P$. Но это значит, что группа $\bar{P}$ являлась бы расщеплением полного прообраза $P\pi^{-1}$ вопреки допущению.

Поскольку

$$\bar{r}\pi = r(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = 1, \quad (7)$$

имеем $\bar{r} = a\iota$ для некоторого ненулевого элемента $a \in A$. По предположению H — подрасширение в $G \ltimes V$ относительно вложения (1). Значит,

$$\bar{r}\beta = a\iota\beta = a\alpha = a\omega_0,$$

где вложения α и β такие, как в (3). (Мы отождествляем группу V с ее образом в $G \ltimes V$.) Можно также записать $\bar{x}_i\beta = g_i v_i$, $i = 1, \dots, n$, для подходящих $g_i \in G$, $v_i \in V$. Заметим, что $g_i = \underline{x}_i$ в силу (6) и коммутативности диаграммы (3). Пусть $r = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_l}^{\varepsilon_l}$, где $i_k \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, l$. Определим

гомоморфизм $F \rightarrow G \ltimes V$, продолжая отображение $x_i \mapsto \underline{x}_i v_i$, $i = 1, \dots, n$. Используя (5) и (7), имеем

$$a\omega_0 = \bar{r}\beta = r(\bar{x}_1\beta, \dots, \bar{x}_n\beta) = r(\underline{x}_1 v_1, \dots, \underline{x}_n v_n) = r(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \times \left(v_1 \frac{\partial r}{\partial \underline{x}_1} + \dots + v_n \frac{\partial r}{\partial \underline{x}_n} \right) = v_1 \sum_{\{k|i_k=1\}} \varepsilon_k \underline{f}_k + \dots + v_n \sum_{\{k|i_k=n\}} \varepsilon_k \underline{f}_k, \quad (8)$$

где $f_k \in F$ определяется равенством (4) и $\underline{f}_k = f_k \gamma \in P$. Можно разложить

$$V = A\omega \oplus V_0,$$

где V_0 — A -линейная оболочка множества $\Omega \setminus \omega$, и записать $v_i = a_i \omega + w_i$, $i = 1, \dots, n$, для подходящих $a_i \in A$ и $w_i \in V_0$. Поскольку элемент $\underline{f}_k \in S$ стабилизирует ω , он также стабилизирует V_0 . Поэтому правая часть (8) может быть переписана так:

$$a_1 \left(\sum_{\{k|i_k=1\}} \varepsilon_k \right) \omega + w'_1 + \dots + a_n \left(\sum_{\{k|i_k=n\}} \varepsilon_k \right) \omega + w'_n, \quad (9)$$

где $w'_i = \sum_k \varepsilon_k w_i \underline{f}_k$ лежит в V_0 для каждого i . Заметим, что

$$\sum_{\{k|i_k=i\}} \varepsilon_k = \log_{x_i}(r) \equiv 0 \pmod{p}$$

для каждого i по предположению. Так как кольцо A имеет характеристику p , элемент (9) равен $\sum_i w'_i = w'$ и принадлежит V_0 . Сравним коэффициенты при ω элементов w' и $a\omega_0$. Поскольку V свободен как A -модуль, эти коэффициенты должны совпадать. Однако первый равен нулю, а второй — $a \neq 0$; противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zavaritsine A. V. Subextensions for a permutation $PSL_2(q)$ -module // Sib. Electron. Math. Rep. 2013. V. 10. P. 551–557.
2. Zavaritsine A. V. Embedding central extensions of simple linear groups into wreath products // Sib. Electron. Math. Rep. 2016. V. 13. P. 361–365.
3. Holt D. F., Eick B., O'Brien E. A. Handbook of computational group theory. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. (Discrete Math. Appl.).
4. Кузьмин Ю. В. Гомологическая теория групп. М.: Факториал пресс, 2006. (Adv. Stud. Math. Mech.; V. 1).
5. Johnson D. L. Presentations of groups. 2nd ed.. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Student Texts; V. 15).
6. Aschbacher M. Finite group theory. 2nd ed. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000. (Camb. Stud. Adv. Math.; V. 10).

Статья поступила 10 июня 2017 г.

Заварницин Андрей Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
zav@math.nsc.ru