

УДК 512.54

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТЫХ
СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП РАЗМЕРНОСТИ 4
НАД ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫМИ
ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2
В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Доказывается, что если любая конечная подгруппа четного порядка периодической группы, содержащей элемент порядка 2, содержится в подгруппе, изоморфной простой симплектической группе размерности 4 над некоторым конечным полем характеристики 2, то эта группа изоморфна простой симплектической группе $S_4(Q)$ над некоторым локально конечным полем Q характеристики 2.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.512

Ключевые слова: периодическая группа, период, симплектическая группа, локально конечная группа.

Любая простая группа G лиева типа X над локально конечным полем P является объединением возрастающей последовательности конечных простых групп типа X над конечными подполями поля P , поэтому любая конечная подгруппа группы G содержится в конечной простой подгруппе из G , изоморфной $X(p^m)$, где p — характеристика P , а m — некоторое натуральное число. Для локально конечных групп верно и обратное: если G — локально конечная группа, в которой каждая конечная подгруппа содержится в конечной простой подгруппе группы G , изоморфной группе данного лиева типа X над конечным полем фиксированной характеристики p , то $G \simeq X(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики p .

Действительно, группа G , очевидно, проста. Она линейна по знаменитой теореме А. И. Мальцева [1] и поэтому счетна (см. [2, теорема 1.L.2]). Следовательно, она является объединением возрастающей последовательности конечных групп, изоморфных группам типа X над конечными полями. Результаты работ [3–6] показывают, что это объединение изоморфно $X(P)$.

Можно ли здесь условие локальной конечности заменить условием периодичности группы G ?

Этот чрезвычайно сложный вопрос к настоящему времени решен положительно (в контексте более общих результатов) лишь для групп типов A_1 , A_2 , 2A_2 , 2C_2 , 2G_2 , в частности, для всех групп лиева ранга 1 [7–14].

Данная работа посвящена группам типа C_2 , т. е. простым симплектическим группам размерности 4, над полями характеристики 2.

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект № 14–21–00065).

Теорема. Пусть G — периодическая группа, содержащая элемент порядка 2. Если любая ее конечная подгруппа четного порядка содержится в подгруппе, изоморфной простой симплектической группе размерности 4 над некоторым конечным полем характеристики 2, то G изоморфна простой симплектической группе $S_4(Q)$, где Q — некоторое локально конечное поле характеристики 2.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть W — векторное пространство четной размерности $2m \geq 4$ над полем F , снабженное знакопеременным скалярным произведением, т. е. невырожденной билинейной формой (x, y) , $x, y \in W$, с условием $(w, w) = 0$ для любого $w \in W$. Симплектической группой $Sp(W)$ называется группа, состоящая из линейных преобразований $\varphi \in SL(W)$, для которых $(w\varphi, u\varphi) = (w, u)$ при любых $w, u \in W$. Выбор конкретного базиса W позволяет отождествить $Sp(W)$ с группой $Sp(2m, F)$, состоящей из матриц $a \in SL_{2m}(F)$, для которых $aJa^T = J$, где J — матрица скалярного произведения в выбранном базисе, a^T — транспонированная матрица a .

Центр $Sp(2m, F)$ состоит из матриц вида $\pm E_{2m}$, где E_t обозначает единичную матрицу размерности t . Фактор-группа $S_{2m}(F) = Sp(2m, F)/\langle -E_{2m} \rangle$ проста при $m \geq 2$, за исключением $S_4(2) \simeq S_6$. Она называется *простой симплектической группой размерности $2m$ над полем F* . Если характеристика F равна 2, то, очевидно, $S_{2m}(F) = Sp(2m, F)$. Если F — конечное поле порядка q , то наряду с $S_{2m}(F)$ используется обозначение $S_{2m}(q)$.

Пусть далее $q = 2^m \geq 4$. Базис W можно выбрать так, чтобы матрица скалярного произведения совпадала с $J = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \in GL(4, q)$.

Лемма 1.1. Обозначим $S(q) = S_4(q)$.

(1) $|S(q)| = (q^2 - 1)(q^4 - 1)q^4$.

(2) Множество

$$V(q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \cdot & A \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & v \\ r & t \end{pmatrix}, \right. \\ \left. x, u, v, r, t \in GF(q), u + t + xr = 0 \right\}$$

является силовой 2-подгруппой $S(q)$.

(3) Элементарная абелева группа

$$Z(q) = \left\{ \begin{bmatrix} E_2 & B \\ \cdot & E_2 \end{bmatrix} \mid B = \begin{bmatrix} u & v \\ \cdot & u \end{bmatrix}, u, v \in GF(q) \right\}$$

совпадает с центром $V(q)$, ее порядок равен q^2 ;

$$Z(q) = [V(q), V(q)] = \Phi(V(q)),$$

где $\Phi(H)$ означает подгруппу Фраттини группы H . В частности, $V(q)$ периода 4 и двуступенно нильпотентна.

(4) Группы

$$A_1(q) = \left\{ \begin{bmatrix} E_2 & B \\ \cdot & E_2 \end{bmatrix} \mid B = \begin{bmatrix} u & v \\ r & u \end{bmatrix}, u, v, r \in GF(q) \right\},$$

$$A_2(q) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ \cdot & A \end{bmatrix} \mid A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} u & v + xu \\ \cdot & u \end{bmatrix}, x, u, v \in GF(q) \right\}$$

элементарные абелевы и являются максимальными абелевыми подгруппами $V(q)$. Их порядки равны q^3 , при этом

$$V(q) = A_1(q)A_2(q), \quad A_1(q) \cap A_2(q) = Z(q),$$

и любая инволюция из $V(q)$ содержится в $A_1(q) \cup A_2(q)$.

Если a — инволюция из $A_j(q)$, $j = 1, 2$, не принадлежащая $Z(q)$, то $C_{V(q)}(a) = A_j(q)$.

(5) Нормализатор $V(q)$ в $S(q)$ равен полупрямому произведению $V(q)$ на группу $H(q) = H_1(q) \times H_2(q)$, где

$$H_1(q) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \mid r \in GF(q), r \neq 0 \right\},$$

$$H_2(q) = \left\{ \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & r^{-1} \end{bmatrix} \mid r \in GF(q), r \neq 0 \right\}.$$

При этом $H(q)$ нормализует подгруппы

$$I_1(q) = \left\{ \begin{bmatrix} E_2 & R \\ \cdot & E_2 \end{bmatrix} \mid R = \begin{bmatrix} r & \cdot \\ \cdot & r \end{bmatrix}, r \in GF(q) \right\} \leq Z(q),$$

$$I_2(q) = \left\{ \begin{bmatrix} E & T \\ \cdot & E \end{bmatrix} \mid T = \begin{bmatrix} \cdot & t \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, t \in GF(q) \right\} \leq Z(q).$$

Кроме того, H_1 действует при сопряжении свободно на $I_1(q)$ и централизует $I_2(q)$; H_2 действует свободно на $I_2(q)$ и централизует $I_1(q)$, а $H(q)$ действует при сопряжении как регулярная группа подстановок на множестве

$$I_3(q) = \left\{ \begin{bmatrix} E_2 & U \\ \cdot & E_2 \end{bmatrix} \mid U = \begin{bmatrix} r & t \\ \cdot & r \end{bmatrix}, r, t \in GF(q), r \neq 0 \neq t \right\} \leq Z(q).$$

Далее, $Z(q) = I_1(q) \cup I_2(q) \cup I_3(q)$.

(6) Нормализатор $V(q)$ в $S(q)$ совпадает с нормализатором $Z(q)$ в $S(q)$.

(7) Нормализатор $N_1(q)$ подгруппы $A_1(q)$ в $S(q)$ равен полупрямому произведению $A_1(q)$ на группу

$$P_1(q) = \left\{ \begin{bmatrix} X & \cdot \\ \cdot & (IX^T I)^{-1} \end{bmatrix} \mid X \in GL_2(q), I = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \right\},$$

изоморфную $GL_2(q)$. Кроме того, $N_1(q)$ нормализует $I_1(q)$.

Нормализатор $N_2(q)$ подгруппы $A_2(q)$ в $S(q)$ равен полупрямому произведению $A_2(q)$ на группу

$$P_2(q) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & A & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \mid \alpha \in GF(q), \alpha \neq 0, A \in SL_2(q) \right\},$$

изоморфную $GL_2(q)$. Кроме того, $N_2(q)$ нормализует $I_2(q)$.

(8) Централизатор $[P_j(q), P_j(q)]$, $j = 1, 2$, в $S(q)$ изоморфен $SL_2(q)$.

(9) $N_1(q)$ и $N_2(q)$ максимальны в $S(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пп. (1)–(8) проверяются непосредственными вычислениями. П. (9) вытекает из описания максимальных подгрупп группы $S(q)$ (см. [15, табл. 8.14]). Лемма доказана.

Лемма 1.2. (1) В $S(q)$ ровно три класса сопряженных инволюций, и любая инволюция из $S(q)$ сопряжена с одной из следующих инволюций:

$$i_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \in I_1(q), \quad i_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \in I_2(q),$$

$$i_3 = i_1 i_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \in I_3(q).$$

Централизатор i_k любой инволюции из $I_k(q)$ в $S(q)$, $k = 1, 2$, совпадает с коммутантом нормализатора подгруппы $A_k(q)$. Централизатор любой инволюции из $I_3(q)$ в $S(q)$ совпадает с $V(q)$.

(2) $i_j^{N_j(q)} = i_j^{H_j(q)} = I_j(q) \setminus 1$, $j = 1, 2$; $N_j(q)$ действует транзитивно при сопряжении на множествах инволюций, принадлежащих $A_j(q)$ и сопряженных в $S(q)$ соответственно с i_{3-j} и i_3 . При этом

$$|i_j^{N_j(q)}| = q - 1, \quad |i_{3-j}^{N_j(q)}| = |i_{3-j}^{N_j(q) \cap C(i_j)}| = q^2 - 1, \quad |i_3^{N_j(q)}| = (q^2 - 1)(q - 1)$$

и любая инволюция из $A_j(q)$, сопряженная с i_j в $S(q)$, содержится в $I_j(q)$.

В частности, любые две инволюции из $i_{3-j}^{N_j(q)}$ сопряжены элементом из $C(i_j) \cap N_j(q)$.

(3) Если $B_j(q)$ — множество всех инволюций из $A_j(q)$, сопряженных с i_{3-j} в $N_j(q) \cap C(i_j)$, то $\langle B_j(q) \rangle = A_j(q)$.

(4) Если a — инволюция из $A_j(q)$, то в $(C_{S(q)}(a) \cap N_j(q))/A_j(q)$ элемент четного порядка является инволюцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Вытекает из [16, пп. (7.6), (7.7)].

Справедливость (2) проверяется непосредственными вычислениями.

(3) Очевидно, размерность $A_j(q)$ как $GF(q)N_j(q)$ -модуля равна трем, поэтому если утверждение пункта неверно для $j = 1$ или $j = 2$, то в силу того, что $|B_j(q)| = q^2 - 1$, размерность $\langle B_j(q) \rangle$ как подмодуля $A_j(q)$ равна двум, откуда вытекает, что произведение любых двух элементов из $B_j(q)$ снова содержится в $B_j(q)$. Но если $a = i_1$, $x =$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \text{ то } x \in N_2(q)$$

$$\text{и } aa^x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \notin B_2(q) \text{ по [16, п. (7.7)]. Аналогично если } b = i_2,$$

$$y = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ то } y \in N_1(q) \text{ и}$$

$$bb^y = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \notin B_1(q).$$

(4) По п. (2) $|i_j^{N_j(q)}| + |i_{3-j}^{N_j(q)}| + |i_3^{N_j(q)}| = (q^3 - 1) = |A_j(q)| - 1$, поэтому a сопряжена в $N_j(q)$ с i_1 , i_2 или i_3 . Теперь справедливость п. (4) вытекает из леммы 1.1 с помощью непосредственных вычислений.

Лемма 1.3. Если x — элемент порядка 4 из $V(q)$, то $x^2 \in I_3(q)$ и $C_{S(q)}(x^2)$ — 2-группа. Если x и y — элементы порядка 4 из $V(q)$ и $x^2 = y^2$, то $[x, y] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.2(2)

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \in V(q)$$

и $d^2 = i_3$. Очевидно, все элементы из $D = dZ(q)$ перестановочны, и их квадраты равны i_3 . Кроме того, по лемме 1.1 (пп. (5) и (4))

$$\left| \bigcup_{h \in H(q)} D^h \right| = |H(q)||D| = (q-1)^2 \cdot |Z(q)| = (q-1)^2 q^2 = |V(q)| - |A_1(q) \cup A_2(q)|.$$

Таким образом, $\bigcup_{h \in H(q)} D^h$ исчерпывает все элементы порядка 4 из $V(q)$, и D^h —

множество всех элементов порядка 4 из $V(q)$, квадраты которых равны i_3^h . Отсюда вытекает заключение леммы.

Лемма 1.4. Пусть $L = L_2(q)$, $q = 2^m$, $m \geq 2$, и L_1, L_2 — 2-подгруппы L , изоморфные соответственно $L_2(q_1)$ и $L_2(q_2)$, такие, что нормализатор в L_1 ее силовой 2-подгруппы содержится в L_2 . Тогда $L_1 \leq L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует хорошо известное описание подгрупп группы $L_2(q)$ [17, теорема II.8.27]. Пусть V_1 — силовая 2-подгруппа L_1 и V_2 — содержащая ее силовая 2-подгруппа из L_2 . Тогда $C_{L_2}(V_1) = V_2$, поэтому

$$N_{L_1}(V_1) \leq N_{L_2}(V_2) = V_2 \cdot H_2,$$

где H_2 — циклическая подгруппа порядка $q_2 - 1$. Так как $N_{L_1}(V_1) = V_1 \cdot H_1$, где H_1 — циклическая подгруппа порядка $q_1 - 1$, по теореме Шура можно считать, что $H_1 \leq H_2$. Далее, $C_{L_2}(H_1) = H_2$, поэтому $N_{L_1}(H_1) \leq N_{L_2}(H_2)$.

Поскольку $N_{L_1}(H_1) = H_1 \cdot \langle t \rangle$, где t — инволюция, имеем $t \in L_2$. Так как $L_1 = \langle N_{L_1}(V_1), t \rangle$, то $L_1 \leq L_2$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. Пусть $S_1 \leq S_2$, где $S_i \simeq S_4(q_i)$, q_i — степень числа 2, для $i = 1, 2$. Пусть V_1, V_2 — силовые 2-подгруппы групп S_1 и S_2 соответственно и $V_1 \leq V_2$.

Если a и b — инволюции из V_1 , не сопряженные в S_1 , то a и b не сопряжены в S_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Отождествим S_1 с $S(q)$, V_1 — с $V(q)$. По лемме 1.2 можно считать, что $a, b \in \{i_1, i_2, i_3\}$. Если $a = i_3$, то по лемме 1.3 $a = x^2$ для некоторого $x \in V_1 \leq V_2$. Поэтому $C_{S_1}(b) \leq C_{S_2}(b)$ — 2-группа, и b сопряжена с a в S_1 по лемме 1.2. Тем самым можно считать, что $a = i_1$, $b = i_2$.

По лемме 1.1(4), примененной к S_2 , $C_a = C_{V_2}(A_1(q))$ и $C_b = C_{V_2}(A_2(q))$ — максимальные элементарные абелевы нормальные подгруппы в V_2 . Если $C_a = C_b$, то $V(q) = A_1(q)A_2(q) \leq C_a$, что невозможно, поскольку $V(q)$ — неабелева группа. По условию $a^{N_{S_2}(V_2)} = b^{N_{S_2}(V_2)}$. По лемме 1.1(5) $ab \in a^{N_{S_2}(V)}$ и $C_{S_2}(a)$ не является 2-группой, а с другой стороны, $ab = i_3$, поэтому $C_{S_2}(ab)$ — 2-группа по лемме 1.3, примененной к S_2 . Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 1.6. Пусть P — периодическая группа, содержащая инволюцию. Если каждый элемент четного порядка из P является инволюцией, то выполнено одно из следующих утверждений.

- (а) Все 2-элементы из P составляют подгруппу.
- (б) $P = A\langle i \rangle$, где A — инвариантная в P абелева подгруппа, не содержащая инволюций.
- (в) $P \simeq L_2(Q)$, где Q — некоторое локально конечное поле характеристики 2.

Доказательство. Поскольку из условия сразу следует, что централизатор любой инволюции в P — группа периода 2, заключение леммы является частным случаем теоремы 2 из [18].

§ 2. Локальное строение G

Пусть выполнены условия теоремы. Если K — конечная подгруппа из G , то через $\mathfrak{M}(K)$ обозначим множество всех подгрупп G , содержащих K и изоморфных элементам из $\mathfrak{M}$. По условию $\mathfrak{M}(K)$ непусто для любой конечной подгруппы K четного порядка, поэтому множество $\mathfrak{M}(1)$ также непусто.

Лемма 2.1. Пусть b — элемент порядка 4 из G , $i = b^2$. Тогда $U = C_G(i)$ — силовская 2-подгруппа в G . Она двуступенно нильпотентна, периода 4 и, в частности, локально конечна. Любая 2-подгруппа, содержащая b , содержится в U . Если x — элемент порядка 4 из U , то x^2 — инволюция из центра U .

Доказательство. Очевидно, $b \in U$. Пусть $c \in U$. Тогда $\langle b, b^c \rangle / \langle i \rangle$ порождается двумя инволюциями, поэтому $B = \langle b, b^c \rangle$ — конечная группа четного порядка. По условию $B \leq S \in \mathfrak{M}(1)$.

Отождествим S с $S(q)$ для подходящего q и сохраним все обозначения § 1. Пусть V — силовская 2-подгруппа из S , содержащая b . Можно считать, что $V = V(q)$. По лемме 1.3 $i \in I_3(q)$. Так как $B \leq C_S(i)$, по лемме 1.2(1) B — 2-группа и $B \leq V$. Снова по лемме 1.3 $[b, b^c] = 1$, так как $i = b^2 = (b^c)^2$. Таким образом, $\langle b^U \rangle$ — абелева 2-группа. Если c — нетривиальный элемент нечетного порядка, то $\langle b, c \rangle = \langle b, b^c, b^{c^2}, \dots \rangle \langle c \rangle$ — расширение конечной абелевой 2-группы посредством конечной циклической, поэтому $C = \langle b, c \rangle$ — конечная группа четного порядка, централизующая инволюцию $i = b^2$. Таких подгрупп среди элементов $\mathfrak{M}(C)$ нет по леммам 1.3 и 1.2. Таким образом, U — 2-группа периода 4, и по результату Санова [19] она локально конечна. Так как конечные подгруппы из U двуступенно нильпотентны, U двуступенно нильпотентна.

Пусть $U \leq R$, где R — силовская 2-подгруппа из G . Поскольку R периода 4 и поэтому локально конечна, для любого элемента r из R подгруппа $K = \langle b, r \rangle$ конечна. Если $V(q_1)$ — силовская 2-подгруппа из $S_1 \in \mathfrak{M}(K)$, содержащая K , то по лемме 1.3 $i = b^2 \in Z(q_1)$, откуда r централизует i , т. е. $r \in C_G(i) = U$.

Пусть B — любая 2-подгруппа, содержащая b . Тогда B локально конечна по теореме Санова и для любого $x \in B$ группа $\langle x, b \rangle$ конечна и содержится в некоторой силовской 2-подгруппе некоторого элемента $S \in \mathfrak{M}(\langle x, b \rangle)$. По лемме 1.3 $x \in C_G(b^2) = U$ и $B \leq U$.

Если x — элемент порядка 4 из U , то рассуждения предыдущего абзаца, примененные к x вместо b , показывают, что $U \leq C_G(x^2)$, т. е. $x^2 \in Z(U)$. Лемма доказана.

Для дальнейшего зафиксируем подгруппу $S \in \mathfrak{M}(1)$, отождествим ее с $S_4(q)$ для подходящего числа q и будем использовать для нее все обозначения из § 1.

Положим $i = i_3$ и $V = C_G(i)$. По леммам 1.3 и 2.1 V — силовская 2-подгруппа в G , содержащая $V(q)$. По лемме 2.1 V двуступенно нильпотентна и периода 4. Положим $A_j = C_G(A_j(q))$, $j = 1, 2$, $Z = Z(V)$. Очевидно, $Z \leq A_j$, $j = 1, 2$.

Лемма 2.2. *Любая инволюция из V сопряжена в G с инволюцией из $Z(q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 V локально конечна. Пусть x — инволюция из V , $S_1 \in \mathfrak{M}(1)$ — подгруппа, содержащая $\langle V(q), x \rangle$, V_1 — силовская 2-подгруппа из S_1 , содержащая $\langle V(q), x \rangle$, и b — элемент порядка 4 из $V(q)$, для которого $b^2 = i$. Поскольку $b \in V_1$, то $i \in Z(V_1)$ по лемме 1.3. В силу леммы 1.2 x сопряжена в S_1 с инволюцией из $Z(V_1)$, поэтому можно считать, что $x \in Z(V_1)$. По лемме 1.1(3)

$$Z(V(q)) = [V(q), V(q)] \leq [V_1, V_1] \leq Z(V_1).$$

Ни одна из инволюций i_1 и i_2 не может принадлежать $I_3(V_1)$, поскольку в противном случае ее централизатор в G является 2-группой, что неверно уже в S . Если $i_1, i_2 \in I_j(V_1)$, j равно 1 или 2, то их произведение по п. (5) леммы 1.1 также принадлежит $I_j(V_1)$, в то время как $i_1 i_2 \in I_3(V)$, поэтому $C_{S_1}(i_1 i_2)$ — 2-группа, что невозможно для элементов из $I_j(V_1)$.

Поскольку в S_1 по лемме 1.2 ровно три класса сопряженных инволюций, x сопряжена с одной из инволюций i, i_1, i_2 . Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Любая инволюция из G сопряжена с инволюцией из Z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — инволюция из G . Тогда $K = \langle i, x \rangle$ конечна и x сопряжена с инволюцией из силовской 2-подгруппы K , содержащей i , поэтому можно считать, что K — 2-группа. Если $[i, x] = 1$, то $x \in V$, и утверждение вытекает из леммы 2.2. Если $[i, x] \neq 1$, то $t = (ix)^2$ — инволюция, централизующая i , поэтому $t \in V$, t сопряжена с инволюцией из $Z(q)$, и поскольку t — квадрат элемента порядка 4, то $C_G(t)$ — 2-группа по лемме 2.1.

Из леммы 1.2 теперь вытекает, что t сопряжена с $i = i_3$. Таким образом, элемент x сопряжен с инволюцией из $C_G(i) = V$. По лемме 2.2 x сопряжен с элементом из $Z(q) \leq Z$.

Лемма 2.4. *Любая силовская 2-подгруппа U из G , содержащая элемент x порядка 4, сопряжена с V , а x^2 сопряжен с i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 $x^2 \in Z(U)$ и $U = C_G(x^2)$. По лемме 2.3 x^2 сопряжен с элементом из Z , поэтому U содержит подгруппу U_1 , сопряженную с V . Поскольку U и U_1 — силовские подгруппы в G , то $U = U_1$. По лемме 2.2 x^2 сопряжен с инволюцией из $Z(q)$. Так как $C_G(x^2)$ — 2-группа, x^2 сопряжен с $i_3 = i$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Подгруппа A_j , $j = 1, 2$ (определенная после леммы 2.1), — нормальная в V элементарная абелева группа, и $V = A_1 A_2$. Любая инволюция из V содержится в $A_1 \cup A_2$, и $A_1 \cap A_2 = Z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $i \in A_j(q)$, то $A_j = C_G(A_j(q)) \leq C_G(i) = V$ по определению V . Поскольку $A_j \geq Z$, то $A_j \leq V$. Пусть $x \in A_j$. Тогда $\langle V(q), x \rangle$ — конечная подгруппа из V , содержащаяся в силовской 2-подгруппе V_1 некоторой $S_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Пусть $a \in A_j(q) \setminus Z(q)$. Тогда $a \notin Z(V_1)$ и по лемме 1.1(4) $C_{V_1}(a)$ — элементарная абелева группа. Так как $x \in C_{V_1}(a)$, то $x^2 = 1$. Таким образом, A_j — элементарная абелева группа.

Пусть $y \in V$. Тогда $K = \langle y, V(q) \rangle$ — конечная подгруппа из V , содержащаяся в некоторой силовой 2-подгруппе V_1 некоторой $S_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Поскольку i — квадрат некоторого элемента из $V(q)$, по лемме 1.2(1) $i \in Z(V_1)$ и $V_1 \leq C_G(i) = V$. По лемме 1.1(4) $V_1 = C_{V_1}(A_1(q)) \cdot C_{V_1}(A_2(q)) \leq A_1 A_2$. В частности, $y \in A_1 A_2$ и $V = A_1 A_2$. Если x — инволюция из V , то $\langle x, V(q) \rangle$ содержится в некоторой подгруппе $S_1 \in \mathfrak{M}(1)$. По лемме 2.1 $V_1 = V \cap S_1$ является силовой 2-подгруппой в S_1 , и по лемме 1.1(4) $x \in (A_1 \cap V_1) \cup (A_2 \cap V_1)$. Так как по доказанному выше $A_i = C_G(A_i \cap V_1)$, $i = 1, 2$, то $x \in A_1 \cup A_2$.

Поскольку $V = A_1 A_2$ и A_i абелева, $i = 1, 2$, то $A_1 \cap A_2 \leq Z$. С другой стороны, если $z \in Z$, то z централизует $A_i(q)$, $i = 1, 2$, поэтому $z \in A_1 \cap A_2$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. При $j = 1, 2$ подгруппа $N_j^0 = N_G(A_j) \cap C_G(i_j)$ изоморфна расширению счетной 2-группы A_j посредством $L_2(Q_j)$, где Q_j — некоторое локально конечное поле характеристики 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $i_j \in A_j$ и A_j абелева по лемме 2.5, $A_j \leq N_j^0$. Пусть $\bar{c}$ — элемент четного порядка из N_j^0/A_j и c — его прообраз в N_j^0 . Поскольку A_j локально конечна, в N_j^0/A_j найдется конечная подгруппа X , содержащая $A_j(q)$, для которой $XA_j/A_j = \langle cA_j \rangle$.

Пусть S_1 — некоторая подгруппа из $\mathfrak{M}(1)$, содержащая X . По леммам 1.1(7) и 1.2(3) $C_{S_1}(i_j) = C_{S_1}(A_j(q))L$, где $L \simeq L_2(q_1)$ для некоторой степени q_1 числа 2, а $C_{S_1}(A_j(q))$ — элементарная абелева группа, нормальная в $C_{S_1}(i_j)$ и содержащаяся в A_1 . Положим $\bar{L} = C_{S_1}(i_j)/C_{S_1}(A_j(q))$. Ясно, что $\bar{L} \simeq L$.

Таким образом, $\bar{X}$ — циклическая группа четного порядка, содержащаяся в $\bar{L}$, и, следовательно, $\bar{c}$ — инволюция.

Из леммы 1.5 без труда вытекает, что N_j^0/A_j изоморфна $L_2(Q_j)$ для некоторого поля Q_j характеристики 2.

Осталось доказать счетность A_j .

Поскольку $\bar{N} = C_G(i_j) \cap N_G(A_j)/A_j$ счетна, множество $\mathfrak{N}$ подгрупп $\bar{N}$, изоморфных $L_2(r)$, где $r = 2^m$, $m = 2, 3, \dots$, также счетно. Поэтому множество $\mathfrak{A} = \{\langle A_j(q)^X \rangle \mid X \in \mathfrak{N}\}$ также счетно. Докажем, что $A_j = \bigcup \{Y \mid Y \in \mathfrak{A}\}$.

Пусть $a \in A_j$, $S \in \mathfrak{M}(1)$, $S \geq \langle A_j(q), a \rangle$. Тогда $(S \cap N)/A_j \cap S = X \simeq L_2(r)$ для некоторого $r = 2^m$, $m = 2, 3, \dots$, а $A_j \cap S = \langle A_j(q)^X \rangle$. Итак, $A_j = \bigcup \{Y \mid Y \in \mathfrak{A}\}$.

Поскольку $\mathfrak{A}$ счетно, а каждая Y конечна, A_j счетна. Лемма доказана.

Лемма 2.7. Пусть $C = C_G(i_k)$, где k равно 1 или 2. Тогда $V \leq C$ и любая силовая 2-подгруппа из C , содержащая элемент порядка 4, сопряжена в C с V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Обозначим $t = i_k$. По лемме 1.1(3) $t \in Z(V(q)) = [V(q), V(q)] \leq [V, V] \leq Z$, поэтому $V \leq C_G(t)$. Пусть T — силовая 2-подгруппа из C , содержащая элемент b порядка 4. По лемме 2.4 $T \leq C_G(b^2)$.

Предположим вначале, что $ib^2 = b^2i$. Тогда $ib^2 \in C_G(i) = V$, $i \in C_C(b^2) = T$, поэтому $\langle b^2, i \rangle \leq V \cap T$. Если $V \cap T$ содержит элемент y порядка 4, то $T \leq C_G(y^2) = V$, $T \leq V$, откуда $T = V$, и заключение леммы справедливо. Поэтому $D = V \cap T$ — элементарная абелева группа.

Так как $C_C(D) \leq C_C(i) \cap C_C(b^2) = V \cap T = D$, то $C_V(D) = D$ и V — силовая 2-подгруппа в $N_G(D)$. Пусть $\bar{a} \in V/D$, $\bar{b} \in T/D$ — инволюции, тогда $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ — конечная группа и с точностью до сопряжения в C $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ — 2-группа.

Пусть R — силовская 2-подгруппа из C , для которой $R/D \geq \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$. Поскольку в полном прообразе $\langle \bar{a} \rangle$ содержится элемент порядка 4, $R \leq V$ по лемме 2.1, откуда $R = V$. Точно так же $V = T$.

Если $ib^2 \neq b^2i$, то снова можно считать, что $\langle i, b^2 \rangle$ — 2-группа. В $\langle i, b^2 \rangle$ содержится элемент c порядка 4, и $\langle i, b^2 \rangle \leq U = C_C(c^2)$. Так как $[c^2, i] = 1$, как показано выше, $U = V$ с точностью до сопряжения в C , т. е. можно считать, что $c \in V$ и $[c^2, b^2] = 1$. Снова, как и выше, $T = V$ с точностью до сопряжения в C . Лемма доказана.

Лемма 2.8. Элементы i_1 и i_2 не сопряжены в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $i_1 = i_2^x$, $x \in G$. Тогда V и V^x содержатся в $C(i_1)$ и по лемме 2.7 существует такой $y \in C(i_1)$, что $V = V^{xy}$. Таким образом, i_1 и i_2 сопряжены элементом $t = xy$ из нормализатора V . Теперь $\langle V(q), t \rangle \leq S_2 \in \mathfrak{M}(1)$. Пусть $S_1 = S(q)$, $V_1 = V(q)$ и V_2 — силовская 2-подгруппа в S_2 , содержащая V_1 , $a = i_1$, $b = i_2$. Тогда по лемме 1.5 a и b не сопряжены в S_2 ; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.9. Элементы из A_j , $j = 1, 2$, сопряженные с i_j в G , вместе с 1 составляют группу I_j . Ее централизатор C_j в $N_G(A_j)$ совпадает с централизатором в $N_G(A_j)$ любой инволюции из I_j . Фактор-группа $N_G(A_j)/C_j$ является локально циклической группой. В частности, $N_G(A_j)$ — счетная локально конечная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a, b — инволюции из A_j , сопряженные с i_j в G . По лемме 2.4 $X = \langle A_j(q), a, b \rangle$ — конечная элементарная абелева 2-группа. По условию она содержится в $S_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Так как $C_{S_1}(A_j(q)) \leq C_G(A_j(q)) = A_j$ — элементарная абелева группа, $C_{S_1}(X) = C_{S_1}(A_j(q))$ — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа в S_1 , лежащая в $C_{S_1}(i_j)$. Элементы a, b сопряжены с i_j в S_1 по лемме 1.5. По лемме 1.1(6) все элементы из $C_{S_1}(X)$, сопряженные в S_1 с i_j , образуют подгруппу. В частности, $ab \in I_j$.

Пусть $a \in I_j$, $x \in N_G(A_j)$, $X = \langle x, a, A_j(q) \rangle$. Очевидно, X — конечная группа, содержащаяся, следовательно, в некоторой подгруппе $S \in \mathfrak{M}(1)$. Поэтому $X \cap A_j$ содержится в $C_S(A_j(q))$. Если при этом x централизует i_j , то по пп. (5) и (6) леммы 1.1 x централизует a , и наоборот. Таким образом, $C_{N_G(A_j)}(a) = C_{N_G(A_j)}(i_j)$.

Покажем, что $N_G(A_j)/C_j$ — локально циклическая группа. Пусть $x, y \in N_G(A_j)$, $a = i_j^x$, $b = i_j^y$, S — подгруппа из $\mathfrak{M}(1)$, содержащая $X = \langle A_j(q), a, b \rangle$, $N = N_S(C_S(X))$. По лемме 1.1(4) $N/C_S(X)$ — циклическая группа $\langle d \rangle$, действующая свободно и транзитивно на множестве инволюций I_j при сопряжении в N , поэтому найдутся числа r и s , для которых $i_j^{xd^r} = i_j$, $i_j^{yd^s} = i_j$ и, таким образом, $\langle x, y \rangle C_S(X) \leq \langle d \rangle C_S(X)$. Так как $C_S(X) \leq A_j$, то $\langle x, y \rangle A_j \leq \langle d \rangle A_j$, т. е. $\langle x, y \rangle A_j / A_j$ — циклическая группа, откуда вытекает, что $N_G(A_j)/C_j$ — локально циклическая и, в частности, локально конечная счетная группа. Лемма доказана.

Лемма 2.10. $C_G(i_j) \leq N_G(A_j)$, $j = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a = i_j$, $b = i_{3-j}$. Пусть $c \in C = C_G(i_j)$. Тогда $K = \langle a, b, b^c \rangle$ — конечная подгруппа, содержащаяся в некотором элементе R из $\mathfrak{M}(K)$. По лемме 1.2(1) $C_R(a)$ изоморфна расширению элементарной абелевой 2-группы A посредством $L_2(r)$ для некоторого $r = 2^s$. При этом по лемме 1.2(2) b и b^c содержатся в A и поэтому перестановочны.

Таким образом, $B = \langle b^C \rangle$ — элементарная абелева 2-группа, инвариантная относительно C . В частности, B инвариантна относительно $A_j(q)$, поэтому $BA_j(q)$ — локально конечная группа.

Предположим, что $B \not\leq C_G(A_j(q))$. Тогда найдется $c \in C$ такой, что $b^c \notin C_G(A_j(q))$. Пусть $\langle b^c, A_j(q) \rangle \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. По леммам 1.2 и 1.1(7) $C_R(a) = AL$, где A — элементарная абелева 2-группа, $L \simeq L_2(q_1)$, $q_1 = 2^{r_1}$. По лемме 1.1(4) $A_j(q) \leq A$, откуда $b^c \in A \leq C_R(A_j(q))$; противоречие. Поэтому $B \leq C_G(A_j(q)) = A_j$.

Покажем, что $B = A_j$. Действительно, по лемме 2.9 A_j счетна и элементы из A_j , сопряженные в $N_G(A_j)$ с i_j , вместе с 1 составляют подгруппу. Поэтому A_j является объединением возрастающей цепи подгрупп $A_j(q) < A_j(q_1) < A_j(q_2) < \dots$, где $A_j(q_k) = A_j \cap S_k$ для некоторой подгруппы $S_k \simeq S_4(q_k)$. По лемме 1.2(3) $B_k = \langle b^c \mid c \in C(a) \cap N_{S_k}(A_j(q_k)) \rangle = A_j(q_k)$. Стало быть, $A_j \geq B \geq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_j(q_k) = A_j$, откуда $B = A_j$. Так как C нормализует B , то $C \leq N_G(A_j)$. Лемма доказана.

Лемма 2.11. Пусть $L_j = [P_j(q), P_j(q)]$, $j = 1, 2$ (подгруппа $P_j(q)$ определена в лемме 1.1(7)). Тогда $C = C_G(L_j) \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, C локально конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что любой элемент четного порядка из C является 2-элементом. Предположим противное, и пусть x — элемент четного порядка из C , не являющийся 2-элементом. Тогда $L_j \leq C_G(x)$ и $\langle L_j, x \rangle \leq S \in \mathfrak{M}(1)$. Если t — инволюция из $\langle x \rangle$, то $\langle L_j, x \rangle \leq C_S(t)$. По лемме 1.2 $C_S(t)$ — расширение 2-группы посредством группы $L_2(q_1)$ для некоторой степени q_1 числа 2. Поэтому для нетривиального элемента y нечетного порядка из $\langle x \rangle$ подгруппа $\langle L_j, y \rangle = L_j \times \langle y \rangle$ изоморфна подгруппе группы $L_2(q_1)$. Так как в $L_2(q_1)$ централизаторы инволюций являются 2-группами, эта ситуация невозможна.

Далее, по лемме 2.1 C не содержит элементов порядка 4, поэтому удовлетворяет условиям леммы 1.5. Поскольку по лемме 1.1(8) C содержит подгруппу, изоморфную $L_2(q)$, по лемме 1.5 $C \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2. Лемма доказана.

Лемма 2.12. Для любого $j \in \{1, 2\}$ существует содержащая $N_G(A_j)$ подгруппа G_j группы G , изоморфная $S_4(Q_j)$, где Q_j — поле, определенное в лемме 2.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.9 $N_G(A_j)$ — локально конечная счетная группа, поэтому $N_G(A_j) = \{N_j(q), n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ для некоторого счетного множества $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ элементов из $N_G(A_j)$. Построим по индукции последовательность подгрупп $S_0 = S(q)$, $S_1 \simeq S_4(q_1)$, $\dots$, $S_k \simeq S_4(q_k)$, $\dots$ группы G , удовлетворяющую следующим условиям:

- (1) $N_k^j = S_k \cap N_G(A_j) \geq N_{k-1}^j = S_{k-1} \cap N_G(A_j)$ для $k = 1, 2, \dots$;
- (2) $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_k^j = N_G(A_j)$;
- (3) $S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_k \leq \dots$.

Пусть $\langle N_j(q), n_1 \rangle \leq S_1 \in \mathfrak{M}(1)$, $S_1 \simeq S_4(q_1)$. Тогда $A_j(q) \leq S_1$ и $C_G(A_j(q)) = A_j$, поэтому $C_{S_1}(A_j(q)) = A_j \cap S_1$ и $N_1^j = S_1 \cap N_G(A_j) = N_{S_1}(A_j \cap S_1) \geq N_j(q)$. Теперь $C_{S_1}(L_j) \simeq L_2(q_1)$ и $\langle C_S(L_j), C_{S_1}(L_j) \rangle \leq C_G(L_j)$, тем самым $C_{S_1}(L_j)$ содер-

жится в $L_2(q_2)$. По лемме 1.4 $C_S(L_j) \leq C_{S_1}(L_j)$. Отсюда $S_0 = \langle N_j(q), C_{S_0}(L_j) \rangle \leq \langle N_1^j, C_{S_1}(L_j) \rangle = S_1$. Аналогично строятся $S_2, \dots$. Очевидно, что объединение G_j последовательности (3) изоморфно $S_4(Q_j)$. Лемма доказана.

Лемма 2.13. G_j содержит $N_G(A_{3-j})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $N_G(A_{3-j}) = A_{3-j}K_{3-j} \geq N_{G_j}(A_{3-j}) = A_{3-j} \cdot K_j$, где $K_j \simeq GL_2(Q_j)$, $K_{3-j} \simeq GL_2(Q_{3-j})$, откуда Q_j изоморфна подполю поля Q_{3-j} . Симметрично, Q_{3-j} изоморфно подполю поля Q_j . Отсюда $Q_j = Q_{3-j}$, и лемма доказана.

Лемма 2.14. $G_1 = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 2.10 и 2.13 G_1 содержит $C_G(i_1)$ и $C_G(i_2)$. Так как $V \leq G_1$, то $C_G(i_3) \leq G_1$ и G_1 содержит централизатор любой своей инволюции. Пусть a — инволюция из G . Тогда a не сопряжена с i_1 или i_2 . Не нарушая общности, можно считать, что a не сопряжена с i_1 , поэтому ai_1 — элемент четного порядка, лежащий в централизаторе инволюции x из $\langle ai_1 \rangle$. В силу того, что x централизует i_1 , имеем $x \in G_1$. Поскольку a централизует x , то $a \in G_1$.

Итак, G_1 содержит все инволюции из G и потому содержит нормальную подгруппу G_0 из G , содержащую все инволюции. Если $G_0 \neq G$, то пусть $x \in G \setminus G_0$. Так как G_0 локально конечна, $\langle i, x \rangle$ — конечная группа четного порядка, содержащаяся по условию в простой подгруппе S . Поскольку $i \in G_0 \cap S \leq S$, то $G_0 \cap S = S$, откуда $x \in G_0$; противоречие. Поэтому $G = G_0 \leq G_1$ и $G_1 = G$. Лемма доказана. Вместе с ней доказана и теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.
2. Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F. Locally finite groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.
3. Беляев В. В. Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 39–50.
4. Боровик А. В. Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 26–35.
5. Hartley B., Shute G. Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type // The Quat. J. Math. Oxford, Ser. 2. 1984. V. 35, N 137. P. 49–71.
6. Thomas S. The classification of the simple periodic linear groups // Arch. Math. 1983. V. 41. P. 103–116.
7. Лыткина Д. В. О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.
8. Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 606–626.
9. Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 288–306.
10. Лыткина Д. В., Шлёпкина А. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типов U_3 и L_3 // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 441–448.
11. Рубашкин А. Г., Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных группами $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1388–1392.
12. Созутов А. И., Шлёпкина А. К. О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 3. С. 433–447.
13. Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 430–438.
14. Шлёпкина А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.

15. Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.).
16. Aschbacher M., Seitz G. Involutions in Chevalley groups over fields of even order // Nagoya Math. J. 1976. V. 63, N 1. P. 1–91. Correction in: Nagoya Math. J. 1978. V. 72, N 1. P. 135–136.
17. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
18. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
19. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. мат. 1940. № 55. С. 166–170.

Статья поступила 9 июня 2017 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru