

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ФОЙГТА

В. П. Орлов, Д. А. Роде, М. А. Плиев

Аннотация. Устанавливаются существование и единственность слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений движения жидкости, являющейся дробным аналогом модели вязкоупругости Фойгта. Реологическое уравнение данной модели содержит производные дробного порядка.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.513

Ключевые слова: вязкоупругая среда, уравнения движения, начально-граничная задача, слабое решение, модель вязкоупругости Фойгта, дробная производная.

1. Введение

Как хорошо известно, уравнение Коши движения жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset R^N$, $N = 2, 3$, $\partial\Omega \in C^2$ (см. [1]) имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = -\nabla p + \operatorname{Div} \sigma + \rho f, \quad (t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega. \quad (1.1)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_N(t, x))$ — вектор скорости частицы в точке x области Ω в момент времени t , ρ — плотность жидкости, $p = p(t, x)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t , σ — девиатор тензора напряжений, f — плотность внешних сил, действующих на жидкость; $\operatorname{Div} \sigma$ — вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы σ .

Тип сплошной среды (жидкости) определяется соответствующим уравнением состояния (реологическим соотношением) (см., например, [2, 3] и ссылки в них). Широкий спектр сплошных сред определяется с помощью реологического соотношения вида (см. [4])

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^s b_{ki} D_{0t}^{k+\beta_{ki}} \sigma = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^r a_{ki} D_{0t}^{k+\beta_{ki}} \varepsilon, \quad 0 \leq \beta_k < 1, \quad (1.2)$$

где D_{0t}^α — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$, σ — девиатор тензора напряжений, а ε — тензор деформации.

Частным случаем моделей (1.2) являются модели с целочисленными производными, такие как хорошо известные модели Ньютона, Максвелла, Фойгта, Джеффриса и др. (см., например, [2, 3, 5] и ссылки в них). При этом производные по времени в (1.2) могут быть обычными, субстанциональными и обьективными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Переход к моделям с дробными производными вызван потребностью изучения большого класса полимеров, в которых необходимо учитывать эффекты ползучести и релаксации. Оказывается, что подходящими для этого являются модели с дробными производными. Широко известными и используемыми являются модели Скотта Блэра, Зенера, Бюргерса, обобщенные модели Максвелла и Кельвина — Фойгта, описывающие специфические классы полимеров. В [6] дана механическая интерпретация этих моделей и приведен библиографический обзор.

В [7] отмечается, что многие авторы используют в равенстве (1.2) различные операторы дробного дифференцирования, например, дробные производные Грюнвальда — Летникова, Лиувилля, Капуто — Лиувилля, Римана — Лиувилля при условии обращения дифференцируемой функции в нуль в начале временного промежутка.

Простейшая дробная реологическая модель, устанавливающая пропорциональность напряжения дробной производной Римана — Лиувилля от деформации дана Скоттом Блэром [8]. А. Н. Герасимов [9] предложил аналогичное (1.2) соотношение с использованием дробной производной Римана — Лиувилля на всей числовой оси для изучения явлений аномального динамического поведения вязкоупругих материалов. Капуто и Майнард [10, 11] построили модели, аналогичные моделям (1.2), с использованием дробных производных Капуто на всей числовой оси или полуоси.

В частности, использование производных Капуто приводит (см. [4]) к реологическому соотношению

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^s b_{ki} D_{0t}^{\beta_{ki}} D^k \sigma = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^r a_{ki} D_{0t}^{\beta_{ki}} D^k \varepsilon. \quad (1.3)$$

Насколько нам известно, теорем о существовании и свойствах решений систем уравнений движения, соответствующих моделям с реологическими соотношениями, содержащими дробные производные, нет. Этому препятствует сингулярный характер интегральных представлений дробных производных и интегралов в отличие от целочисленных моделей (см. [12]).

Ниже мы ограничиваемся простейшим случаем дробной модели (1.3), являющейся аналогом модели Фойгта (см. [4]). Модель Фойгта (иногда называемая моделью Кельвина — Фойгта) определяется реологическим соотношением $\sigma = \mu_0 \varepsilon + \mu_1 D_t \varepsilon$ (см. [3, разд. 3.6]).

Данная дробная модель имеет механическую интерпретацию в виде параллельного соединения моделей Ньютона и Скотта Блэра (см. [6]). Элемент Ньютона $\mathcal{N}$ определяется реологическим соотношением $\sigma_1 = \nu_1 \dot{\varepsilon}_1$, а элемент Скотта Блэра SB — реологическим соотношением $\sigma_2 = \nu_2 D_{0t}^\alpha \varepsilon_2$, $0 < \alpha < 1$. Здесь

$$D_{0t}^\alpha y(t) = \Gamma(1 - \alpha) \int_0^t (t - s)^{-\alpha} y'(s) ds$$

— дробная производная Капуто порядка α (Γ — гамма-функция Эйлера).

При параллельном соединении $\mathcal{N}||SB$ моделей Ньютона и Скотта Блэра справедливы соотношения $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ и $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, где σ и ε суть напряжение и деформация элемента $\mathcal{N}||SB$. Отсюда следует, что $\sigma = \nu_1 \dot{\varepsilon} + \nu_2 D_{0t}^\alpha \varepsilon = \nu \dot{\varepsilon} + \nu_2 D_{0t}^\alpha \varepsilon$.

Рассмотрим вязкоупругую жидкость с уравнением состояния вида $\sigma = \nu \dot{\varepsilon}_1 + \nu_2 D_{0t}^\alpha \varepsilon_2 = \nu \dot{\varepsilon} + \nu_2 D_{0t}^\alpha \varepsilon$. Полагая $\dot{\varepsilon} = \mathcal{E}(v)$ и выражая σ из уравнения состояния через тензор скоростей деформации $\mathcal{E}(v)$, получаем

$$\sigma = \mu_0 \mathcal{E}(v) + \mu_1 I_{0t}^{1-\alpha} \mathcal{E}(v), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.4)$$

Здесь использовано соотношение $D_{0t}^\alpha y(t) = I_{0t}^{1-\alpha} y'(t)$, где

$$I_{0t}^{1-\alpha} z(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} z(s) ds$$

является дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка $1-\alpha$ (см. [13, гл. 1, разд. 2.3]).

Подставляя полученное соотношение (1.4) в уравнение (1.1) и считая $\rho = 1$, получим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds \\ + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (1.6)$$

Здесь $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформации, являющийся матрицей с компонентами

$$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

В настоящей работе устанавливается существование слабого решения начально-краевой задачи (1.5), (1.6). Структура работы следующая. В разд. 2 формулируется основной результат, в разд. 3 приводится доказательство существования решения, а в разд. 4 доказывается его единственность в плоском случае.

Константы в неравенствах и цепочках неравенств, не зависящие от существенных параметров, обозначаются одной буквой M .

2. Формулировка результатов

Будем использовать следующие обозначения. Нам понадобятся функциональные пространства V и H (см. [14, гл. 1, разд. 1.4]) соленоидальных функций. Пространство $V = \{v \in W_2^1(\Omega)^N : v|_\Gamma = 0, \operatorname{Div} v = 0\}$ гильбертово со скалярным произведением

$$(v, u)_V = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \mathcal{E}_{ij}(u) \cdot \mathcal{E}_{ij}(v) dx$$

и соответствующей нормой. Эта норма в пространстве V эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^N$. Пространство H является замыканием V в норме пространства $L_2(\Omega)^N$, V^{-1} — пространство, сопряженное к V . Знак $\langle g, u \rangle$ означает действие функционала $g \in V^{-1}$ на элемент $u \in V$.

Нормы в пространствах H , $L_2(\Omega)^N$ и $L_2(\Omega)^{N \times N}$ будем обозначать через $|\cdot|_0$, в V — через $|\cdot|_1$, в пространстве $W_2^\beta(\Omega)$ для $\beta \in \mathbb{R}^1$ — через $|\cdot|_\beta$. Нормы

в $L_2(0, T; H)$ и $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ обозначаются через $\|\cdot\|_0$, нормы в $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ — через $\|\cdot\|_{0,1}$, а норма в пространстве $L_2(0, T; V^{-1})$ — через $\|\cdot\|_{0,-1}$.

Символом $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H , $L_2(\Omega)^N$, $L_2(\Omega)^{N \times N}$, в каких именно, ясно из контекста.

Введем функциональное пространство

$$W(a, b) \equiv L_2(a, b; V) \cap L^\infty(a, b; H) \cap W_1^1(a, b; V^{-1}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Слабым решением задачи (1.5), (1.6) называется функция $v \in W(0, T)$, удовлетворяющая тождеству

$$\begin{aligned} \frac{d(v, \varphi)}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) \\ + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (I_{0t}^{1-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (2.1)$$

при любой $\varphi \in V$ и п. в. $t \in [0, T]$ и условию (1.6).

Так как слабое решение v принадлежит пространству $W(0, T)$, известно (см. [14, теорема III.3.1]), что $W(0, T) \subset C_w([0, T], H)$, где $C_w([0, T], H)$ — пространство слабо непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в H . Поэтому начальное условие (1.6) имеет смысл.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2.1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$. Тогда задача (1.5), (1.6) имеет по крайней мере одно слабое решение.

Теорема 2.2. При $N = 2$ в условиях теоремы 2.1 слабое решение задачи (1.5), (1.6) единственно.

3. Доказательство теоремы 2.1

3.1. Последовательные приближения. Построим последовательные приближения v^n , $n = 1, 2, \dots$, определяемые как слабые решения вспомогательных задач

$$\frac{\partial v^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i^n (1 + n^{-1}|v^n|^2)^{-1} \frac{\partial v^n}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v^n + \nabla p^n = w^n, \quad \operatorname{div} v^n = 0, \quad (3.1)$$

$$v^n(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v^n|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $|z| = \left(\sum_{i=1}^N z_i^2 \right)^{1/2}$ для $z = (z_1, \dots, z_N)$, приближение $v^0(t, x)$ определяется как $v^0(t, x) = v^0(x)$, а

$$w^n = f + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, x) ds. \quad (3.3)$$

Обозначим $W^*(0, T) \equiv L_2(0, T; V) \cap C_w([0, T]; H) \cap L_\infty(0, T; H) \cap W_2^1(0, T; V^{-1})$.

Под *слабым решением задачи* (3.1)–(3.3) будем понимать функцию $v^n \in W^*(0, T)$, удовлетворяющую начальному условию (3.2) и тождеству

$$\frac{d(v^n, \varphi)}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(v_i^n (1 + n^{-1}|v^n|^2)^{-1} v^n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_0(\mathcal{E}(v^n), \mathcal{E}(\varphi)) = \langle w^n, \varphi \rangle \quad (3.4)$$

при любой $\varphi \in V$ и п. в. t .

В [15, разд. 5.4] установлена

Лемма 3.1. При заданных $w^n \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v^0 \in H$ задача (3.1), (3.2) имеет слабое решение $v^n \in W^*(0, T)$, для которого справедливы оценки

$$\sup_t |v^n(t, \cdot)|_0 + \|v^n\|_{0,1} \leq M_0(\|w^n\|_{0,-1} + |v^0|_0), \quad (3.5)$$

$$\left\| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right\|_{L_1(0,T;V^{-1})} \leq M_1(\|w^n\|_{0,-1} + |v^0|_0 + 1)^2 \quad (3.6)$$

с не зависящими от n константами M_0 и M_1 .

Покажем, что последовательные приближения v^n определены корректно. Для этого достаточно показать, что если v^{n-1} определено, то зависящая от v^{n-1} правая часть (3.1) w^n принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$.

Очевидно, что $w^1 \in L_2(0, T; V^{-1})$. Пусть найдено $v^{n-1} \in W(0, T)$. Покажем, что $w^n \in L_2(0, T; V^{-1})$. Легко видеть, что

$$|w^n|_{-1} \leq |f|_{-1} + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, \cdot) ds \right|_{-1}. \quad (3.7)$$

Пусть $\mathcal{A}(x)$ — матричная функция. Нетрудно показать (см., например, [16, 17]), что $|\operatorname{Div} \mathcal{A}|_{-1} \leq M|\mathcal{A}|_0$. Следовательно,

$$\left| \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, \cdot) ds \right|_{-1} \leq M \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, \cdot) ds \right|_0. \quad (3.8)$$

Отсюда в силу неравенства

$$\left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \right\|_{L_p(0,T)} \leq MT^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha) \|\varphi(s)\|_{L_p(0,T)}, \quad (3.9)$$

$$1 \leq p < +\infty, \quad \varphi(s) \in L_p(0, T)$$

(см. [13]), при $p = 2$ следует, что

$$\left\| \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, x) ds \right\|_{0,-1} \leq MT^{1-\alpha} \|\mathcal{E}(v^{n-1})\|_0 \leq MT^{1-\alpha} \|v^{n-1}\|_{0,1}. \quad (3.10)$$

Из оценок (3.7) и (3.10) получаем, что

$$\|w^n\|_{0,-1} \leq \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + MT^{1-\alpha} \|v^{n-1}\|_{0,1}. \quad (3.11)$$

Отсюда вытекают принадлежность $w^n \in L_2(0, T; V^{-1})$, существование в силу леммы 3.1 решения $v^n \in W^*(0, T)$ задачи (3.1)–(3.3) и, следовательно, корректность определения приближений v^n .

Установим некоторые свойства v^n .

Лемма 3.2. Пусть T достаточно мало. Для решения v^n задачи (3.1)–(3.3) справедливы оценки

$$\sup_t |v^n(t, \cdot)|_0 + \|v^n\|_{0,1} \leq M(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0), \quad (3.12)$$

$$\left\| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right\|_{L_1(0,T;V^{-1})} \leq M(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0 + 1)^2. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (3.5) и (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} \|v^n\|_{0,1} &\leq M_0 \left(\|f\|_{0,-1} + \left\| \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, x) ds \right\|_{0,-1} + |v^0|_0 \right) \\ &\leq M_0(\|f\|_{0,-1} + M_1 T^{1-\alpha} \|\mathcal{E}(v^{n-1})\|_0 + |v^0|_0) \\ &= M_0(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0) + M_0 M_1 T^{1-\alpha} \|v^{n-1}\|_{0,1} = \mathcal{M}(f, v^0) + q \|v^{n-1}\|_{0,1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь $\mathcal{M}(f, v^0) = M_0(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0)$.

Пусть T_0 таково, что $q = M_1 T_0^{1-\alpha} < 1$. Пусть $T \leq T_0$. Используя оценку (3.14), получаем

$$\begin{aligned} \|v^n\|_{0,1} &\leq \mathcal{M}(f, v^0) + q(\mathcal{M}(f, v^0) + q \|v^{n-2}\|_{0,1}) \leq \mathcal{M}(f, v^0) + \mathcal{M}(f, v^0)q \\ &\quad + q^2 \|v^{n-2}\|_{0,1} \leq \mathcal{M}(f, v^0)(1+q) + q^2(\mathcal{M}(f, v^0) + q^2 \|v^{n-3}\|_{0,1}) \\ &= \mathcal{M}(f, v^0)(1+q+q^2) + q^3 \|v^{n-3}\|_{0,1} \leq \mathcal{M}(f, v^0) \sum_{k=0}^n q^k + q^n \|v^0\|_{0,1} \\ &\leq \mathcal{M}(f, v^0)(1-q)^{-1} + M|v^0|_0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из оценок (3.5), (3.11) и (3.15) легко следует неравенство

$$\sup_t |v^n(t, \cdot)|_0 \leq M(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \quad (3.16)$$

Из (3.15) и (3.16) вытекает, что при всех n справедлива оценка (3.12).

Установим оценку (3.13). Из неравенств (3.6), (3.11) и (3.12) вытекает справедливость неравенства

$$\left\| \frac{\partial v^n}{\partial t} \right\|_{L_1(0,T;V^{-1})} \leq M(\|w^n\|_{0,-1} + |v^0|_0 + 1)^2 \leq M(\|f\|_{0,-1} + \|v^{n-1}\|_{0,1} + 1)^2. \quad (3.17)$$

Оценка (3.12) установлена.

Лемма 3.2 доказана.

Из оценок (3.16) и (3.17) следует (см. [18]), что последовательность v^n сходится к некоторой v слабо в $L_2(0, T; V)$, *-слабо в $L_\infty(0, T; H)$ и сильно в $L_2(Q_T)^N$ (с точностью до подпоследовательности).

3.2. Предельный переход. Сделаем предельный переход в задаче (3.1)–(3.3). Из определения слабого решения задачи (3.1)–(3.3) вытекает, что справедливо тождество

$$\begin{aligned} (v^n(T, \cdot), \varphi(\cdot)) - \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(v_i^n (1 + n^{-1} |v^n|^2)^{-1} v^n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) ds \\ + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s, \cdot), \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, \cdot) ds, \mathcal{E}(\varphi)(\cdot) \right) ds dt \\
& = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle ds + (v^0, \varphi), \quad \varphi \in V. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Пусть

$$I_1(n) = (v^n(T, \cdot), \varphi(\cdot)), \quad I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(v_i^n (1 + n^{-1}|v^n|^2)^{-1} v^n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) ds,$$

$$I_3(n) = \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s, \cdot), \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) ds,$$

$$I_4(n) = \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, x) ds, \mathcal{E}(\varphi)(\cdot) \right) ds dt.$$

Запишем тождество (3.18) в виде

$$I_1(n) - I_2(n) + I_3(n) + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_4(n) = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle ds + (v^0, \varphi)$$

и перейдем в (3.18) и (3.2) к пределу при $n \rightarrow +\infty$.

Из оценки (3.16) вытекает ограниченность v^n в $L_2(0, T; V)$, а из (3.17) и слабой непрерывности $v(t, \cdot)$ — ограниченность $v^n(T, x)$ в H . Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; H)$, а $v^n(T, x)$ слабо сходится к $v(T, x)$ в H . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = (v(T, \cdot), \varphi(\cdot)), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_3(n) = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s, \cdot), \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) dt. \quad (3.19)$$

Слабая сходимость v^n к v в $L_2(0, T; V)$ и сильная в $L_2(0, T; H)$ позволяют утверждать (см. [15, разд. 5.4]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) ds. \quad (3.20)$$

Рассмотрим $I_4(n)$. Меняя порядок интегрирования в $I_4(n)$, имеем

$$\begin{aligned}
I_4(n) &= \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, x) ds, \mathcal{E}(\varphi)(x) \right) dy ds dt \\
&= \int_0^T \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, y) : \int_s^T (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(\varphi)(y) dy \right) dt dy ds
\end{aligned}$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^{n-1})(s, y) : \psi(s, y) dy ds, \quad \psi(s, y) = \int_s^T (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(\varphi)(y) dt. \quad (3.21)$$

Таким образом, в подынтегральном выражении члена

$$I_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^{n-1}(s, y)) : \psi(s, y) ds dy \quad (3.22)$$

первый сомножитель сходится слабо в $L_2(Q_T)^{N \times N}$. Отсюда вытекает, что в (3.22) допустим предельный переход при $n \rightarrow +\infty$ и

$$I_4 = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_4(n) = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s, \cdot), \int_s^T \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) ds dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I_4 = \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s, \cdot), \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) ds dt.$$

Из установленной сходимости слагаемых $I_i(n)$ следует справедливость

$$\begin{aligned} (v(T, \cdot), \varphi(\cdot)) - \int_0^T \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) ds + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v)(t, \cdot), \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) dt \\ + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v)(s, \cdot), \mathcal{E}(\varphi)(\cdot)) dt = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

при любой гладкой φ .

Используя плотность множества гладких функций в V , нетрудно показать, что (3.23) справедливо при любой $\varphi \in V$ и любом $t \in (0, T)$ вместо T .

Меняя в (3.23) T на t и дифференцируя по t при почти всех t , получаем, что v удовлетворяет (2.1).

Для завершения доказательства теоремы 2.1 осталось показать, что найденное v принадлежит $W(0, T)$. Поскольку $v \in L_2(0, T; V)$, для этого достаточно показать, что $\partial v / \partial t \in L_1(0, T; V^{-1})$.

Так как v является слабым пределом последовательности v^n в $L_2(0, T; V)$ и *-слабым пределом в $L_{+\infty}(0, T; H)$, то (см. [19, гл. 5, разд. 1])

$$\|v\|_{0,1} \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} \|v^n\|_{0,1}, \quad \|v\|_{L_{\infty}(0,T;H)} \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} \|v^n\|_{L_{\infty}(0,T;H)}.$$

Из последних неравенств и (3.16) вытекает, что $\|v\|_{L_{\infty}(0,T;H)} + \|v\|_{0,1} \leq M(\|f\|_0 + |v^0|_0)$. Отсюда и из слабой непрерывности $v(t, \cdot)$ как функции со значениями в H следует, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |v(t, \cdot)|_0 + \|v\|_{L_2(0,T;V)} \leq M(\|f\|_0 + |v^0|_0). \quad (3.23')$$

Запишем (2.1) в виде

$$\frac{d(v, \varphi)}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) = \langle w, \varphi \rangle, \quad (3.23'')$$

где

$$w = f + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds.$$

В [15, теорема 5.4] установлено, что если $v \in L_2(0, T; V)$ удовлетворяет тождеству (3.23'') при $w \in L_2(0, T; V^{-1})$, то $\partial v / \partial t \in L_1(0, T; V^{-1})$ и v является слабым решением задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v = w, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T,$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega.$$

Докажем, что $w \in L_2(0, T; V^{-1})$. Так же, как при доказательстве оценки (3.11), показывается, что $\|w\|_{0, -1} \leq \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + MT^{1-\alpha} \|v\|_{0, 1}$. Отсюда и из (3.23') вытекает, что $w \in L_2(0, T; V^{-1})$. Следовательно, $\partial v / \partial t \in L_1(0, T; V^{-1})$.

Теорема 2.1 для случая малого T доказана. Обозначим это T через T_0 .

Отметим, что для найденного решения v задачи (1.5), (1.6) справедливо неравенство (3.23') при $T = T_0$.

Докажем теорему 2.1 для случая произвольного T . Установим разрешимость задачи в случае произвольного T . Считая без ограничения общности $K = T/T_0$ целым, рассмотрим последовательность задач при $k = 1, 2, \dots, K$ на $[0, T_k]$, где $T_k = T_0 k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds + \nabla p \\ = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_k = [0, T_k] \times \Omega, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_k, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T_k] \times \partial\Omega. \quad (3.25)$$

Считая, что известно решение задачи (3.24), (3.25) на $[0, T_k]$, удовлетворяющее оценке

$$\sup_{0 \leq t \leq T_k} |v(t, \cdot)|_0 + \|v\|_{L_2(0, T_k; V)} \leq M(\|f\|_0 + |v^0|_0), \quad (3.25'),$$

продолжим его на $[T_k, T_{k+1}]$. Обозначим это решение через $\bar{v}(t, x)$ и построим его продолжение на $[T_k, T_{k+1}]$.

Рассмотрим на $[T_k, T_{k+1}]$ задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{T_k}^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds + \nabla p = F, \\ \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [T_k, T_{k+1}] \times \Omega, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$v(T_k, x) = \bar{v}(T_k, x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [T_k, T_{k+1}] \times \partial\Omega. \quad (3.27)$$

Здесь

$$F(t, x) = f(t, x) + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^{T_k} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(\bar{v})(s, x) ds, \quad (t, x) \in [T_k, T_{k+1}] \times \Omega. \quad (3.28)$$

Слабым решением задачи (3.26), (3.27) называется функция $v \in W(T_k, T_{k+1})$, удовлетворяющая соответствующим тождеству и начальному условию.

Покажем, что так же, как и для задачи (1.5), (1.6) на $[0, T_0]$, при заданных $F \in L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$ и $\bar{v}(T_k, x) \in H$ существует решение задачи (3.26), (3.27) на $[T_k, T_{k+1}]$, удовлетворяющее оценкам

$$\sup_{T_k \leq t \leq T_{k+1}} |v(t, \cdot)|_0 + \|v\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V)} \leq M(\|F\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} + |\bar{v}(T_k, \cdot)|_0), \quad (3.29)$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_1(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} \leq M(\|F\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} + |\bar{v}(T_k, \cdot)|_0 + 1)^2 \quad (3.30)$$

с не зависящими от k , f и $\bar{v}$ константами. Обозначим

$$f_1 = \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^{T_k} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(\bar{v})(s, x) ds, \quad (t, x) \in Q_{k, k+1} = [T_k, T_{k+1}] \times \Omega,$$

и рассмотрим задачу (3.26), (3.27) на $[T_k, T_{k+1}]$ при $F = f + f_1$. Сначала покажем, что $F \in L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$. Для этого достаточно доказать, что $f_1 \in L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$, а так как сужение f на $[T_k, T_{k+1}]$ принадлежит пространству $L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$ и $\|f\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} \leq \|f\|_{0, -1}$, то $F \in L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$.

Лемма 3.3. Справедливы принадлежность $f_1 \in L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$ и оценка

$$\|f_1\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} \leq M(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0), \quad (3.31)$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{v}(t, x)$ продолжение $\bar{v}(t, x)$ нулем с промежутка $[0, T_k]$ на $(-\infty, +\infty)$, а через $K(s)$ — продолжение $s^{-\alpha}$ нулем с $[0, T_k]$ на $(-\infty, +\infty)$. Тогда с помощью замены переменной имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^{T_k} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(\bar{v})(s, x) ds \\ &= \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s) \mathcal{E}(\hat{v})(s, x) ds \\ &= \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) \mathcal{E}(\hat{v})(t-\xi, x) d\xi. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Проводя стандартные оценки с использованием интегрального неравенства Минковского и пользуясь инвариантностью $L_2(-\infty, +\infty)$ нормы относительно сдвига, получаем

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} &\leq M \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) \mathcal{E}(\hat{v})(t-\xi, x) d\xi \right\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; L_2(\Omega))} \\ &\leq M \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) |\hat{v}(t-\xi, \cdot)|_1 d\xi \right\|_{L_2(T_k, T_{k+1})} \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) \|\hat{v}(t-\xi, \cdot)\|_{L_2(T_k, T_{k+1})} d\xi \\ &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) d\xi \|\hat{v}(t, \cdot)\|_{L_2(T_k, T_{k+1})} \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) d\xi \|\hat{v}(t, x)\|_{L_2(-\infty, +\infty; V)} \\ &\leq MT_k^{1-\alpha} (1-\alpha)^{-1} \|\bar{v}(t, x)\|_{L_2(0, T_k; V)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Пользуясь оценкой (3.25') для $v = \bar{v}$ на $[0, T_k]$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} &\leq MT_k^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}\|\bar{v}(t, x)\|_{L_2(0, T_k; V)} \\ &\leq MT_k^{1-\alpha}(\|f\|_{L_2(0, T_k; V^{-1})} + |v^0|_0) \leq M(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Отсюда следует оценка (3.29). Лемма 3.3 доказана.

Ввиду леммы 3.3 $F \in L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})$ и справедлива оценка

$$\|F\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V^{-1})} \leq M(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0). \quad (3.34')$$

Из оценки (3.23') вытекает, что $\bar{v}(T_k, x) \in H$ и $|\bar{v}(T_k, x)|_0 \leq M(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0)$.

С помощью замены $t = T_k + \tau$, $\tau \in [0, T_0]$, и очевидных преобразований задача (3.24), (3.25) на $[T_k, T_{k+1}]$ при $F = f + f_1$ сводится к соответствующей задаче вида (1.5), (1.6) на $[0, T_0]$, для которой установлены существование решения и его оценки. Поэтому задача (3.24), (3.25) на $[T_k, T_{k+1}]$ имеет решение, обозначим его через $\tilde{v}$, для которого в силу неравенства (3.23') при $T = T_k$, $f = F$ и $v = \bar{v}$ и неравенства (3.34'') справедлива оценка

$$\sup_{T_k \leq t \leq T_{k+1}} |\tilde{v}(t, \cdot)|_0 + \|\tilde{v}\|_{L_2(T_k, T_{k+1}; V)} \leq M(\|F\|_{0, -1} + |\bar{v}(T_k, \cdot)|_0) \leq M(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0). \quad (3.34'')$$

Полагая $v = \bar{v}$ на $[0, T_k]$ и $v = \tilde{v}$ на $[T_k, T_{k+1}]$, получаем решение v задачи (1.5), (1.6) на $[0, T_{k+1}]$.

Отметим, что для полученного решения v на $[0, T_{k+1}]$ справедлива оценка (3.5) с заменой T_k на T_{k+1} , что гарантирует возможность продолжения на следующий отрезок $[T_{k+1}, T_{k+2}]$. Очевидно, что, осуществляя (конечный) процесс продолжения на следующий отрезок и т. д., получим решение задачи (1.5), (1.6) на $[0, T]$. Отметим также, что длина каждого отрезка $[T_k, T_{k+1}]$ равна T_0 . Теорема 2.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2.2

Доказательство теоремы 2.2 проведем в несколько этапов.

4.1. Свойства слабых решений задачи (1.5), (1.6).

Лемма 4.1. Пусть $N = 2$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v^0 \in H$. Тогда решение v задачи (1.5), (1.6) принадлежит $W^*(0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Перепишем задачу (1.5), (1.6) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta = w, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (4.1)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (4.2)$$

Здесь

$$w = f + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds \equiv f + Q.$$

Из теоремы 3.1 и доказательства теоремы 3.2 в гл. III из [14] вытекает, что при $N = 2$ для любых заданных $w \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$ задача (4.1), (4.2) имеет единственное слабое решение $v \in W^*(0, T)$, для которого справедливы оценки

$$\sup_t |v(t, \cdot)|_0 + \|v\|_{0,1} \leq C(\|w\|_{0, -1} + |v^0|_0), \quad (4.3)$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq C(\|w\|_{0,-1} + |v^0| + 1)^2. \quad (4.4)$$

Покажем, что при $v \in W(0, T)$ верно соотношение $w \in L_2(0, T; V^{-1})$. Очевидно, что

$$\|w\|_{0,-1} \leq \|f\|_{0,-1} + \|Q\|_{0,-1}. \quad (4.5)$$

Оценим $\|Q\|_{0,-1}$. Легко видеть, что $\|Q\|_{0,-1}^2 \leq MZ_2(T)$, где $Z_2(T)$ определяется ниже формулой (4.18) при $t = T$.

Из оценки (4.20) вытекает, что $Z_2(T) \leq M\|v\|_{0,1}^2$. Отсюда и из (4.20) следует, что

$$\|Q\|_{0,-1} \leq M\|v\|_{0,1}^2. \quad (4.6)$$

Значит, $Q \in L_2(0, T; V^{-1})$, а так как $w = f + Q$, то и $w \in L_2(0, T; V^{-1})$. Лемма доказана.

4.2. Оценки слабых решений задачи (1.5), (1.6).

Лемма 4.2. Пусть $N = 2$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v^0 \in H$. Тогда решение v задачи (1.5), (1.6) удовлетворяет оценкам

$$\sup_t |v(t, \cdot)|_0 + \|v\|_{0,1} \leq M(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0). \quad (4.7)$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq C(\|f\|_{0,-1} + |v^0| + 1)^2. \quad (4.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что подобные оценки были получены выше для найденного решения задачи (1.5), (1.6). Однако утверждение леммы 4.2 справедливо для любого решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что решение v принадлежит $W^*(0, T)$, и получим оценки (4.7) и (4.8). Для функции $v \in W^*(0, T)$ верно соотношение $|dv(t, \cdot)/dt|_0^2 = 2(v(t, \cdot), v(t, \cdot))$ (см. [14, гл. III, лемма 1.2]). Умножая скалярно в H (1.5) на $v(t, x)$, пользуясь этим соотношением и проводя стандартные преобразования с использованием леммы 1.2 (см. [14]), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v(t, \cdot)|_0^2 + \mu_0 |\mathcal{E}(v)(t, \cdot)|_0^2 \\ &= (f(t, x), v(t, x)) - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds, \mathcal{E}(v)(t, x) \right) ds. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Меняя t на s в (4.9) и интегрируя на промежутке $[0, t] \subset [0, T]$ по s , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |v(t, \cdot)|_0^2 + \mu_0 \int_0^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds = \int_0^t (f(s, x), v(s, x)) ds \\ & - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(\tau, x) d\tau, \mathcal{E}(v)(s, x) \right) ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для первого слагаемого справа в (4.10) находим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (f(s, x), v(s, x)) ds \right| &\leq \int_0^t |f(s, \cdot)|_{-1} |v(s, \cdot)|_1 ds \\ &\leq C_\varepsilon \int_0^t |f(s, \cdot)|_{-1}^2 ds + \varepsilon \int_0^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds \leq \frac{1}{2} C_\varepsilon \|f\|_{0,-1}^2 + \varepsilon \|v\|_{L_2(0,t;V)}^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Далее, легко видеть, что в силу неравенства Корна

$$m_1 \|v\|_{L_2(0,t;V)}^2 \leq \int_0^t |\mathcal{E}(v)(t, \cdot)|_0^2 ds \leq m_2 \int_0^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds \leq m_3 \|v\|_{L_2(0,t;V)}^2, \quad m_i > 0. \quad (4.12)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в (4.10) и запишем его в виде

$$\mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(\tau, x) d\tau, \mathcal{E}(v)(s, x) \right) ds = \int_0^t Z(s) ds, \quad (4.13)$$

где

$$Z(t) = \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds, \mathcal{E}(v)(t, x) \right). \quad (4.14)$$

Делая элементарные оценки, при произвольном $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |Z(t)| &\leq M \int_0^t (t-s)^{-\alpha} |v(s, \cdot)|_1 ds |v(t, \cdot)|_1 \\ &\leq M_1(\varepsilon) \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} |v(s, \cdot)|_1 ds \right)^2 + \varepsilon |v(t, x)|_1^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом,

$$\int_0^t Z(s) ds \leq M(\varepsilon) \int_0^t \left(\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds + \varepsilon \int_0^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds. \quad (4.16)$$

Используя (4.11), (4.16), (4.12) и выбирая ε достаточно малым, из (4.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v(t, \cdot)|_0^2 + \mu_0 \int_0^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds \\ \leq M \left(\|f\|_{L_2(0,t;V^{-1})}^2 + |v|_0^2 + \int_0^t \left(\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Обозначая последнее слагаемое через $Z_2(t)$, имеем

$$Z_2(t) = \int_0^t \left(\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds = \left\| \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right\|_{L_2(0,t)}^2. \quad (4.18)$$

Обозначим продолжение $v(\tau, x)$ нулем с $[0, t]$ на $(-\infty, +\infty)$ через $\tilde{v}(\tau, x)$, а $K(\xi) = \xi^{-\alpha}$ при $t > \xi > 0$, $K(\xi) = 0$ при $\xi \notin (0, t]$. Тогда с помощью замены переменной $\xi = s - \tau$ получаем

$$\int_0^s (s - \tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s - \tau) |\tilde{v}(\tau, \cdot)|_1 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) |\tilde{v}(s - \xi, \cdot)|_1 d\xi. \quad (4.19)$$

Применяя интегральное неравенство Минковского в (4.18) и пользуясь инвариантностью $L_2(-\infty, +\infty)$ нормы относительно сдвига, имеем

$$\begin{aligned} Z_2(t) &\leq \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) |\tilde{v}(s - \xi, \cdot)|_1 d\xi \right\|_{L_2(-\infty, +\infty)}^2 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) \| |\tilde{v}(s - \xi, \cdot)|_1 \|_{L_2(-\infty, +\infty)} d\xi \right)^2 \\ &\leq \left(\| |\tilde{v}(s, \cdot)|_1 \|_{L_2(-\infty, +\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) d\xi \right)^2 = \left(\| |\tilde{v}(s, \cdot)|_1 \|_{L_2(-\infty, +\infty)} \int_0^t \xi^{-\alpha} d\xi \right)^2 \\ &\leq M((1 - \alpha)^{-1} t^{1-\alpha})^2 \|v(s, x)\|_{L_2(0, t; V)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Z_2(t) \leq M((1 - \alpha)^{-1} t^{1-\alpha})^2 \|v(s, x)\|_{L_2(0, t; V)}^2. \quad (4.20)$$

Из соотношений (4.17) и (4.20) следует, что при $0 < t \leq t_0$, где $t_0 > 0$ достаточно мало, справедлива оценка

$$|v(t, \cdot)|_0^2 + \int_{t_0}^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds \leq M(\|f\|_{0, -1}^2 + \|v\|_0^2). \quad (4.21)$$

Оценка (4.7) в случае $0 < T \leq t_0$ установлена.

Рассмотрим теперь случай произвольного $T > t_0$. Пусть $t > t_0$. Запишем $Z_2(t)$ в виде

$$\begin{aligned} Z_{2>}(t) &= \int_0^{t_0} \left(\int_0^s (s - \tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left(\int_0^s (s - \tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds = Z_{21} + Z_{22}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ясно, что $Z_{21} = Z_2(t_0)$, а из (4.20) следует, что

$$Z_{21} \leq M t_0^{2(1-\alpha)} \|v(s, \cdot)\|_{L_2(0, t_0; V)}^2. \quad (4.23)$$

Рассмотрим Z_{22} и запишем его в виде

$$\begin{aligned} Z_{22} &= \int_{t_0}^t \left(\int_0^{s-t_0} (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau ds + \int_{s-t_0}^s (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds \\ &\leq 2 \left(\int_{t_0}^t \left(\int_0^s (s-t_0)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds + \int_{t_0}^t \left(\int_{s-t_0}^s (s-\tau)^{-\alpha} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds \right) \\ &= 2(Z_{221} + Z_{222}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Для Z_{221} имеем

$$\begin{aligned} Z_{221} &\leq t_0^{-2\alpha} \int_{t_0}^t \left(\int_0^{s-t_0} |v(\tau, \cdot)|_1 d\tau \right)^2 ds \leq (t-t_0)t_0^{-2\alpha} \int_{t_0}^t \int_0^s |v(\tau, \cdot)|_1^2 d\tau ds \\ &\leq M_1 \int_{t_0}^t \int_0^s |v(\tau, \cdot)|_1^2 d\tau ds. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Оценим Z_{222} . С помощью замены переменной $\xi = s - \tau$ приходим к соотношению

$$Z_{222} \leq M \int_{t_0}^t \left(\int_0^{t_0} \xi^{-\alpha} |v(s-\xi, \cdot)|_1 d\xi \right)^2 ds = M \left\| \int_0^{t_0} \xi^{-\alpha} |v(s-\xi, \cdot)|_1 d\xi \right\|_{L_2(t_0, t)}^2. \quad (4.26)$$

Так же, как при выводе оценки (4.21), с помощью интегрального неравенства Минковского получаем, что

$$Z_{222} \leq \left(\int_0^{t_0} \xi^{-\alpha} d\xi \right)^2 \|v(s, x)\|_{L_2(0, t; V)}^2 \leq M(1-\alpha)^{-2} t_0^{2(1-\alpha)} \|v\|_{L_2(0, t; V)}^2. \quad (4.27)$$

Из оценок (4.23), (4.25) и (4.27) следует, что

$$Z_{2>}(t) \leq M_1 \int_{t_0}^t \int_0^s |v(\tau, \cdot)|_1^2 d\tau ds + M(1-\alpha)^{-2} t_0^{2(1-\alpha)} \int_0^t |v(\tau, \cdot)|_1^2 d\tau. \quad (4.28)$$

Пользуясь неравенством (4.28) для оценки последнего слагаемого $Z_2 = Z_{2>}$ в (4.17) и считая t_0 достаточно малым, несложными преобразованиями получаем

$$|v(t, \cdot)|_0^2 + \int_0^t |v(\tau, \cdot)|_1^2 d\tau \leq M(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0)^2 + M_1 \int_{t_0}^t \int_0^s |v(\tau, \cdot)|_1^2 d\tau ds. \quad (4.29)$$

Отбрасывая в (4.29) первое слагаемое, приходим к неравенству Гронвулла для $\varphi(t) = \int_0^t |v(\tau, x)|_1^2 d\tau$, из которого

$$\varphi(t) \leq M_2(\|f\|_{0, -1} + |v^0|_0)^2, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (4.30)$$

Из (4.30) следует (4.7).

Установим оценку (4.8). Из (4.5), (4.6), разрешимости задачи (4.1), (4.2) для $w \in L_2(0, T; V^{-1})$ и оценки (4.4) при $w = f + Q$ вытекает, что $v \in W^*(0, T)$ и справедлива оценка (4.8).

Лемма 4.2 доказана.

4.3. Доказательство единственности слабого решения задачи (1.5), (1.6). Предположим, что слабое решение задачи (1.5), (1.6) не единственно. Пусть v^1 и v^2 являются слабыми решениями задачи (1.5), (1.6). Тогда функция v принадлежит $v^1 - v^2 \in W^*(0, T)$ и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v + \nabla p \\ &= \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds + \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial v^2}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^2 v_i^1 \frac{\partial v}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0,$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (4.32)$$

Умножая скалярно в H (1.5) на $v(t, x)$, как и при доказательстве леммы 4.2, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} |v(t, \cdot)|_0^2 + 2\mu_0 |\mathcal{E}(v)(t, \cdot)|_0^2 \\ &= \mu_1 \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, \cdot) ds, \mathcal{E}(v)(t, \cdot) \right) \\ &+ 2 \left(\sum_{i=1}^2 v_i^1(t, \cdot) \frac{\partial v(t, \cdot)}{\partial x_i}, v(t, \cdot) \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^2 v_i(t, \cdot) \frac{\partial v^2(t, \cdot)}{\partial x_i}, v(t, \cdot) \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Интегрируя на промежутке $[0, t] \subset [0, T]$, имеем

$$\begin{aligned} & |v(t, \cdot)|_0^2 + 2\mu_0 \int_0^t |v(s, \cdot)|_1^2 ds \\ &= 2\mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(\tau, \cdot) d\tau, \mathcal{E}(v)(s, \cdot) \right) ds \\ &+ 2 \int_0^t \left(\sum_{i=1}^2 v_i(s, \cdot) \frac{\partial v^2(s, \cdot)}{\partial x_i}, v(s, \cdot) \right) ds \\ &+ 2 \int_0^t \left(\sum_{i=1}^2 v_i^1(s, \cdot) \frac{\partial v(s, \cdot)}{\partial x_i}, v(s, \cdot) \right) ds = P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Введем обозначения

$$R_1(t) = \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, \cdot) ds, \mathcal{E}(v)(t, \cdot) \right),$$

$$R_2(t) = \left(\sum_{i=1}^2 v_i^1(t, x) \frac{\partial v(t, \cdot)}{\partial x_i}, v(t, \cdot) \right), \quad R_3(t) = \left(\sum_{i=1}^2 v_i(t, \cdot) \frac{\partial v^2(t, \cdot)}{\partial x_i}, v(t, \cdot) \right).$$

Для первого слагаемого $P_1(t) = 2 \int_0^t R_1(s) ds = 2 \int_0^t Z(s) ds$ (см. (4.14)) справа в (4.31) при малом t_0 справедлива оценка (4.16).

Оценим слагаемые $P_i(t)$ и $P_i(t) = 2 \int_0^t R_i(s) ds$, $i = 2, 3$. В [14] показано (см. разд. (iii) доказательства теоремы 3.2, гл. III), что справедливы соотношения

$$R_2(t) = 0, \quad R_3(t) \leq 2\mu_0 |v(t, \cdot)|_1^2 + \mu_0^{-1} |v(t, \cdot)|_0^2 |v(s, \cdot)|_1^2. \quad (4.35)$$

Подставляя (4.15) и (4.35) в правую часть (4.34) и считая $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ достаточно малыми, несложными преобразованиями получаем, что справедливо соотношение

$$|v(t, \cdot)|_0^2 \leq M \int_0^t |v(s, \cdot)|_0^2 |v^2(s, \cdot)|_1^2 ds.$$

Отсюда в силу суммируемости $|v^2(t, \cdot)|_1^2$ на $[0, T]$ вытекает, что $v(t, x) \equiv 0$ на $[0, t_0]$ при достаточно малом t_0 . Единственность решения на $[0, t_0]$ установлена.

Докажем единственность решения в случае произвольного T . Обозначим найденное t_0 через T_0 . Считая без ограничения общности $K = T/T_0$ целым, рассмотрим последовательность задач (4.31), (4.32) при $k = 1, 2, \dots, K$ на $[T_k, T_{k+1}]$, где $T_k = T_0 k$. Такими же рассуждениями, которые использовались при продолжении решения задачи (1.5), (1.6) на $[T_k, T_{k+1}]$, устанавливается равенство нулю решений этих задач. При этом учитывается справедливость априорных оценок (4.7) на $[0, T]$ для решения v^1 и v^2 задачи (1.5)–(1.6) и нулевые начальные данные задач (4.31), (4.32) при $k = 1, 2, \dots, K$.

Отсюда следует единственность решения задачи (1.5), (1.6) на $[0, T]$ при произвольном T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьярмати И. Неравновесная гидродинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Изд-во иностр. лит., 1974.
2. Звягин В. Г. О разрешимости некоторых начально-краевых задач для математических моделей движения нелинейно-вязких и вязкоупругих жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 2003. Т. 2. С. 57–69. (Итоги науки и техники).
3. Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: Крассанд, 2012.
4. Zvyagin V. G., Orlov V. P. Some mathematical models in thermomechanics of continua // J. Fixed Point Theory Appl. 2014. V. 15, N 1. P. 3–47.
5. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Т. 22, № 1. С. 255–268.
6. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // The Eur. Phys. J. Special Topics. 2011. V. 193. P. 133–160.
7. Kilbas A. A., Trujillo J. J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems // Appl. Anal. 2001. V. 78. P. 153–192.
8. Scott Blair G. W. A survey of general and applied rheology. London: Sir Isaac Pitman and Sons, 1949.
9. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.

10. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids // Riv. Nuovo Cimento. 1971. V. 1, N 2. P. 161–198.
11. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism // Pure Appl. Geophys. 1971. V. 91, N 1. P. 134–147.
12. Осколков А. П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 128–157.
13. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
14. Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981.
15. Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье — Стокса. М.: Едиториал УРСС, 2004.
16. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
17. Orlov V. P., Sobolevskii P. E. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory // Differ. Integral Equ. 1991. V. 4, N 1. P. 103–115.
18. Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 12. С. 1633–1645.
19. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Статья поступила 19 марта 2017 г.

Орлов Владимир Петрович
Воронежский гос. университет, НИИ математики,
Университетская пл., 1, Воронеж 394018
orlov_vp@mail.ru

Роде Дмитрий Анатольевич
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394018
dmitryrode@gmail.com

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027;
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
plimarat@yandex.ru