

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ

М. А. Сычев

Аннотация. Показано, что классическая теория поля Вейерштрасса — Гильберта может быть усилена, если использовать прямые методы. А именно, для любого поля экстремалей верно, что если экстремаль — элемент поля, то на ней достигается минимум в классе липшицевых функций с теми же граничными данными, что и у экстремали, и с графиками из множества, покрытого полем. Мы приводим два доказательства: современное (использующее теорему Тонелли о полунепрерывности снизу интегрального функционала относительно слабой сходимости пробных функций в $W^{1,1}$) и основанное только на аргументах, доступных в 19-м веке.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.516

Ключевые слова: интегральный функционал, эллиптичность, уравнение Эйлера, минимайзер, теория поля, прямые методы.

Рассмотрим одномерную вариационную задачу

$$J(u) = \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B. \quad (2)$$

Здесь и всюду далее в работе предполагаем $L(x, u, v) \in C^3(R^3)$, $L_{vv} > 0$. Эти условия на L будем называть *базисными*.

Если C^1 -регулярная функция $u : [a, b] \rightarrow R$ доставляет задаче (1), (2) локальный минимум, т. е. $J(u) \leq J(u + \phi)$ для $\phi \in C_0^1[a, b]$ с достаточно малой $\|\phi\|_{C^1[a, b]}$, то выполнено уравнение Лагранжа — Эйлера

$$\frac{d}{dx} L_v(x, u(x), \dot{u}(x)) = L_u(x, u(x), \dot{u}(x)). \quad (3)$$

В этом случае по теореме Гильберта $u \in C^2[a, b]$ и уравнение (3) можно разрешить относительно второй производной функции u , т. е. выполнено уравнение Эйлера

$$\ddot{u} = \frac{L_u - L_{vx} - L_{vu}\dot{u}}{L_{vv}}. \quad (4)$$

Решения уравнения Эйлера (4) будем называть *экстремальями*.

Семейство непрерывных функций $w : [a, b] \rightarrow R$ будем называть *полем*, если оно покрывает без пересечений множество $G = \{(x, u) \in R^2 : x \in [a, b], g(x) \leq u \leq f(x)\}$, где автоматически g, f принадлежат $C[a, b]$ как элементы семейства и $f > g$ всюду в $[a, b]$. Элементы поля могут быть параметризованы

их значениями в точке a , и тогда $w(\cdot, w(a))$ зависят непрерывно от параметра $w(a)$ в C -норме.

Наиболее глубоким результатом классического одномерного вариационного исчисления является теория поля Вейерштрасса — Гильберта. Оказывается, если есть $u(\cdot, c)$ — поле экстремалей, которое зависит диффеоморфно от параметра c (не обязательно значения в a), то найдется калибратор $\Phi(x, u)$, т. е. $\Phi \in C^1(G)$, такой, что

$$L(x, u, p(x, u)) = \Phi_x(x, u) + \Phi_u(x, u)p(x, u), \quad (5)$$

$$L(x, u, v) \geq \Phi_x(x, u) + \Phi_u(x, u)v, \quad (6)$$

где $p : G \rightarrow R$ — функция наклона поля $u(\cdot, c)$, т. е. $p(x, u) = \dot{u}(x, c(x, u))$ (здесь $\dot{u}$ — значение производной экстремали поля, проходящей через точку (x, u) в точке x).

Формулы (5), (6) позволяют утверждать, что для каждой экстремали u поля выполнено

$$J(u) = \Phi(b, u(b)) - \Phi(a, u(a)). \quad (7)$$

Если $w[a, b] \rightarrow R$ — любая другая липшицева функция, принимающая те же граничные значения, что и u , с графиком в G , то

$$J(w) > \Phi(b, u(b)) - \Phi(a, u(a)) \quad (8)$$

и тем самым экстремаль u — единственное решение задачи (1), (2) в классе липшицевых функций с графиками из G . Современное изложение этой теории можно найти в последней монографии по одномерным вариационным задачам [1]. В предыдущих книгах 20-го века теория поля также излагалась на основе использования калибраторов.

Тем не менее в 20-м веке развивались прямые методы в вариационном исчислении. Тонелли доказал в [2], что функционал J полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $W^{1,1}$.

Теорема 1 (Тонелли [2]). Пусть L удовлетворяет базисным условиям и пусть $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,1}[a, b]$ (здесь $\rightharpoonup$ означает слабую сходимость). Тогда

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u).$$

Прямым следствием этой теоремы является теорема существования решения задачи (1), (2) в классе соболевских функций, если существует минимизирующая последовательность, сходящаяся слабо в $W^{1,1}[a, b]$.

Следствие 2. Пусть L удовлетворяет базисным условиям и $L(x, u, v) \geq \theta(v)$, где $\theta(v)/|v| \rightarrow \infty$ при $|v| \rightarrow \infty$. Тогда задача (1), (2) имеет решение в классе соболевских функций $W^{1,1}[a, b]$.

Прямые методы установления регулярности решений задач (1), (2) в различных классах функций развивались автором (см. [3–6], а также недавние работы последователей [7–10]). Разумеется, результаты по регулярности решений задач (1), (2) устанавливались и другими авторами. Так, Тонелли еще в [11] доказал частичную регулярность решений. Но он использовал не прямые методы (см. [6, § 2]). Современные авторы также использовали не прямые методы (см. [12–14]).

Оказывается, прямые методы позволяют значительно усилить теорию поля, не прибегая к технике калибраторов. Верна

Теорема 3. Пусть L удовлетворяет базисным условиям, и пусть поле экстремалей покрывает множество $G = \{(x, u) \in R^2 : g(x) \leq u \leq f(x)\}$, где g, f автоматически имеют C^3 -регулярность, так как тоже является экстремальными поля.

Тогда для каждой экстремали $u : [a, b] \rightarrow R$ поля выполнено

$$J(w) > J(u), \quad (9)$$

где $w : [a, b] \rightarrow R$ — произвольная отличная от u липшицева функция, принимающая те же граничные значения, что и u , и с графиком в G .

Как видим, теория поля оказывается справедливой для произвольного поля экстремалей $u(\cdot, c)$ без всяких требований на зависимость от параметра c . В этой ситуации калибратор Φ может не существовать. Приведем простой пример. Пусть в дополнение к базисным условиям $L = L(v)$. Тогда экстремальными являются аффинные функции. Рассмотрим поле $u(\cdot, c) : [0, 1] \rightarrow R$, где $c = u(0)$, $c \in [0, 1]$. Положим $u(x, c) = c + \eta(c)x$, где $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — возрастающая непрерывная функция такая, что $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1$. Нетрудно видеть, что если η — недостаточно регулярная функция, например имеет точки недифференцируемости или $\dot{\eta} = \infty$ при некоторых c , то Φ_u не будет существовать или также будет обращаться в бесконечность. Заметим, что неясно, до какой степени можно использовать теорию калибраторов понимая (5), (6) в обобщенном смысле.

Приведем доказательство теоремы 3. Оно будет основано на следующих двух леммах.

Лемма 4. Пусть L удовлетворяет базисным условиям, и пусть имеется поле экстремалей $u(\cdot, c)$, покрывающее множество $G = \{(x, u) \in R^2 : g(x) \leq u \leq f(x)\}$. Тогда функция наклона поля $p : G \rightarrow R$ непрерывна.

Лемма 5. Пусть L удовлетворяет базисным условиям и $g, f \in C^2[a, b]$, $g < f$ всюду в $[a, b]$, $M > \max\{\|f\|_{C[a, b]}, \|g\|_{C[a, b]}\}$.

Рассмотрим задачу (1), (2) в классе липшицевых функций $w : [a, b] \rightarrow R$ таких, что $g \leq w \leq f$, $|\dot{w}| \leq M$ всюду на $[a, b]$. Если в этой задаче есть хотя бы одна допустимая функция (тогда автоматически $g(a) \leq A \leq f(a)$, $g(b) \leq B \leq f(b)$), то задача имеет решение u_M и все решения принадлежат классу $C^{1,1/2}[a, b]$.

Покажем, как теорема 3 вытекает из этих лемм. Сами леммы докажем позже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно лемме 4 функция наклона поля p ограничена, так как $p : G \rightarrow R$ непрерывна и G — компакт. Пусть $M > |p|$.

Пусть u — экстремаль поля. Рассмотрим задачу минимизации (1), (2) в классе липшицевых функций $w : [a, b] \rightarrow R$ с $\|\dot{w}\|_{L^\infty[a, b]} \leq M$ и с графиками из множества G ; граничные данные (2) заданы экстремалью. По лемме 5 эта задача имеет решение $u_M : [a, b] \rightarrow R$ и $u_M \in C^1[a, b]$. Если u_M не совпадает с u , то либо $u_M > u$ в некоторых точках, либо $u_M < u$ в некоторых точках. Рассмотрим первую ситуацию, вторая рассматривается аналогично. Найдется экстремаль поля $\tilde{u}$ такая, что $\tilde{u} \geq u_M$ всюду в $[a, b]$ и $\tilde{u}(x_0) = u_M(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in]a, b[$. Тогда $\dot{\tilde{u}}(x_0) = \dot{u}_M(x_0)$ и, как следствие, u_M удовлетворяет уравнению Эйлера (4) в окрестности точки x_0 . Действительно, $|\dot{u}_M| < M$ в окрестности x_0 , так как $u_M \in C^1$. Следовательно, u_M допускает вариации в окрестности x_0 , поэтому удовлетворяет уравнению Эйлера в этой окрестности.

Но тогда $\tilde{u} = u_M$ в некоторой окрестности точки x_0 , так как обе функции являются решениями одной и той же задачи Коши для уравнения Эйлера (4) в точке x_0 . Далее $\tilde{u} = u_M$ всюду в $[a, b]$ по той же причине. Это противоречие показывает, что $u_M = u$ всюду на $[a, b]$, если $M > 0$ достаточно большое.

Теорема 3 доказана. $\square$

Перейдем к доказательству лемм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Производные множества элементов поля образуют условно равностепенно непрерывное семейство в силу уравнения (4). Напомним, что семейство $\Xi = \{\xi : [a, b] \rightarrow R\}$ непрерывных функций образуют условно равностепенно непрерывное семейство, если для любых $M > 0$, $\epsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(M, \epsilon) > 0$ такое, что если $\xi \in \Xi$, $|\xi(x_0)| \leq M$, то $|\xi(x) - \xi(x_0)| \leq \epsilon$ для $|x - x_0| \leq \delta$.

Пусть $x_0 \in [a, b]$, u_0 — экстремаль поля, $u(x_0) = u_0$. Требуется показать, что если u_k — другие экстремали поля такие, что $\|u_k - u_0\|_{C[a, b]} \rightarrow 0$ и $x_k \rightarrow x_0$, то $\dot{u}_k(x_k) \rightarrow \dot{u}_0(x_0)$. В силу условной равностепенности семейства достаточно показать, что $\dot{u}_k(x_0) \rightarrow \dot{u}_0(x_0)$, $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим случай $u_k \leq u_0$ на $[a, b]$, случай $u_k \geq u_0$ рассматривается аналогично. Предположим что для некоторого $\epsilon > 0$ выполнено $\dot{u}_k(x_0) \leq \dot{u}_0(x_0) - \epsilon$. Пусть $x_0 \neq b$. Тогда из условия условной равностепенной непрерывности вытекает, что для достаточно малого $\delta > 0$ выполнено

$$\dot{u}_k(x) \leq \dot{u}_0(x) - \epsilon/2, \quad x \in [x_0, x_0 + \delta]. \quad (10)$$

Так как $u_k(x_0) \rightarrow u_0(x_0)$, получаем, что в силу (10) u_k не сходятся к u_0 ; противоречие. Если $x_0 = b$, то из (10) и сходимости $u_k(b) \rightarrow u_0(b)$ вытекает, что графики экстремалей u_k пересекают график u_0 , что также невозможно. Таким образом, (10) неверно. Аналогично показывается, что невозможно неравенство $\dot{u}_k(x_0) \geq \dot{u}_0(x_0) + \epsilon$ для больших $k \in N$. Таким образом, $\dot{u}_k(x_0) \rightarrow \dot{u}_0(x_0)$, что и требовалось доказать. Лемма 4 доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Если в задаче есть хотя бы одна допустимая функция, то найдется минимизирующая последовательность $u_k : [a, b] \rightarrow R$. Можно выделить подпоследовательность такую, что $u_k \rightarrow u_M$ равномерно в $[a, b]$ по теореме Арцела — Асколи. Тогда u_M тоже допустимая функция и по теореме 1 Тонелли выполнено

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u_M),$$

т. е. u_M — решение рассматриваемой задачи. Осталось показать, что $u_M \in C^{1,1/2}[a, b]$.

Сначала установим, как на интервале $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ значение интеграла $J(u_M; [x_1, x_2])$ связано со значением на аффинной функции $l : [x_1, x_2] \rightarrow R$, где $l(x_1) = u_M(x_1)$, $l(x_2) = u_M(x_2)$, т. е. с интегралом $J(l; [x_1, x_2])$. Вообще говоря, мы не можем утверждать, что $J(u_M; [x_1, x_2]) \leq J(l; [x_1, x_2])$, так как график l может пересекать график f или g . Поэтому определим функцию $\tilde{l} : [x_1, x_2] \rightarrow R$ такую, что $\tilde{l}(x) \in [g(x), f(x)]$, $x \in [x_1, x_2]$. Если $|x_2 - x_1|$ достаточно мало, то график $l : [x_1, x_2] \rightarrow R$ может пересекать график только одной из функций f, g . Рассмотрим первую ситуацию. Положим $Y = \{y \in [x_1, x_2] : l(y) \geq f(y)\}$, $y_1 = \min Y$, $y_2 = \max Y$. Тогда возьмем $\tilde{l} = f$ на $[y_1, y_2]$, $\tilde{l} = l$ в остальных точках $[x_1, x_2]$. Аналогично если график l пересекает график g , то полагаем $Z = \{z \in [x_1, x_2] : l(z) \leq g(z)\}$, $z_1 = \min Z$, $z_2 = \max Z$, и $\tilde{l} = g$ на $[z_1, z_2]$,

$\tilde{l} = l$ в остальных точках $[x_1, x_2]$. Функция $\tilde{l}$ уже допустимая в задаче, и тогда выполнено

$$J(u_M; [x_1, x_2]) \leq J(\tilde{l}; [x_1, x_2]). \quad (11)$$

В то же время

$$\begin{aligned} \|l - \tilde{l}\|_{C[x_1, x_2]} &\leq \max\{\|\dot{g}\|_C, \|\dot{f}\|_C\}|x_2 - x_1| = c_1|x_2 - x_1|, \\ \|\dot{l} - \dot{\tilde{l}}\|_{C[x_1, x_2]} &\leq \max\{\|\ddot{f}\|_C, \|\ddot{g}\|_C\}|x_2 - x_1| = c_2|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} |L(x, l(x), \dot{l}(x)) - L(x, \tilde{l}(x), \dot{\tilde{l}}(x))| dx \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} \max\{|L_u(x, u, v)| + |L_v(x, u, v)| : x \in [x_1, x_2], |u| \leq \text{const}, |v| \leq M\} \\ &\quad \times (c_1 + c_2)|x_2 - x_1| dx \leq c_3|x_2 - x_1|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу (11), (12) выполнено

$$J(u_M; [x_1, x_2]) \leq J(l; [x_1, x_2]) + c_3|x_2 - x_1|^2. \quad (13)$$

Так как неравенство (13) верно для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, для $x_3, x_4 \in [x_1, x_2]$ таких, что $|x_4 - x_3|e \geq |x_2 - x_1|$ (e — экспонента), выполнено

$$\left| \frac{u_M(x_2) - u_M(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{u_M(x_4) - u_M(x_3)}{x_4 - x_3} \right| \leq c|x_2 - x_1|^{1/2}. \quad (14)$$

Более общий результат доказан в лемме 3.1 из [12]. Для удобства читателя также помещаем в конце работы доказательство требуемого нам результата (см. лемму 6).

Из неравенства (14) уже нетрудно вывести $C^{1,1/2}$ -регулярность функции u_M . Пусть $x_3, x_4 \in [x_1, x_2]$. Найдется $k \in N$ такое, что

$$\frac{|x_2 - x_1|}{e^k} \leq |x_4 - x_3| \leq \frac{|x_2 - x_1|}{e^{k-1}}.$$

Найдутся также промежутки $[x_1^i, x_2^i]$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$, такие, что $x_1^0 = x_1$, $x_2^0 = x_2$, $|x_2^i - x_1^i| = |x_2^{i-1} - x_1^{i-1}|/e$ для рассматриваемых $i \geq 1$ и также $[x_1^i, x_2^i] \subset [x_1^{i-1}, x_2^{i-1}]$ для этих i , $[x_3, x_4] \subset [x_1^{k-1}, x_2^{k-1}]$, при этом $|x_4 - x_3| \geq |x_2^{k-1} - x_1^{k-1}|/e$. В силу (14)

$$\begin{aligned} &\left| \frac{u_M(x_2) - u_M(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{u_M(x_4) - u_M(x_3)}{x_4 - x_3} \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left| \frac{u_M(x_2^i) - u_M(x_1^i)}{x_2^i - x_1^i} - \frac{u_M(x_2^{i-1}) - u_M(x_1^{i-1})}{x_2^{i-1} - x_1^{i-1}} \right| \right) \\ &\quad + \left| \frac{u_M(x_2^{k-1}) - u_M(x_1^{k-1})}{x_2^{k-1} - x_1^{k-1}} - \frac{u_M(x_4) - u_M(x_3)}{x_4 - x_3} \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{k-1} c|x_2^i - x_1^i|^{1/2} \right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} c \left| \frac{x_2 - x_1}{e^i} \right|^{1/2} \\ &= c \sum_{i=0}^{\infty} (1/e^i)^{1/2} |x_2 - x_1|^{1/2} = \tilde{c}|x_2 - x_1|^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда существует производная $\dot{u}_M(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$ и, более того,

$$|\dot{u}_M(x) - \dot{u}_M(y)| \leq 2\tilde{c}|x - y|^{1/2}. \quad (16)$$

Неравенство (16) доказывает лемму 5. $\square$

Теорему 3 можно использовать для доказательства классических достаточных условий слабого и сильного локального минимума. Однако в доказательстве леммы 5 мы использовали теорему 1 Тонелли, которая не была доступна в 19-м веке. Оказывается, можно избежать использования этой теоремы, так как полунепрерывность снизу на минимизирующей последовательности u_k вытекает из сравнения $J(u_k)$ со значениями функционала на кусочно аффинных аппроксимациях u_k . Можно также избежать рассмотрения задачи минимизации в теореме 3 и лемме 5 в классе липшицевых функций. Вместо этого можно рассмотреть минимизацию в классе кусочно C^1 -регулярных функций, т. е. таких непрерывных функций, что для каждой функции этого класса существует разбиение интервала $[a, b]$ на конечное число подынтервалов, сужение функции на замыкание каждого из которых C^1 -регулярно.

Как и в доказательстве леммы 5, можно выбрать равномерно сходящуюся к u_M минимизирующую последовательность u_k . Тогда $J(u_k) \leq I + \epsilon_k$, где I — инфимум в задаче минимизации и $\epsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Если $x_1, x_2 \in [a, b]$, то

$$J(u_k; [x_1, x_2]) \leq L(\tilde{l}_k; [x_1, x_2]) + \epsilon_k \quad (17)$$

и тогда в силу (12) получаем

$$J(u_k; [x_1, x_2]) \leq J(l_k; [x_1, x_2]) + c_3|x_2 - x_1|^2 + \epsilon_k \leq J(l_k; [x_1, x_2]) + 2c_3|x_2 - x_1|^2, \quad (18)$$

если $k \in N$ достаточно большое. Тогда (14) выполнено для фиксированных $x_1, x_2 \in [a, b]$ и фиксированных $x_3, x_4 \in [x_1, x_2]$ с $|x_2 - x_1| \leq e|x_4 - x_3|$ для функций u_k при достаточно больших значениях $k \in N$ и подходящем $c > 0$. Но тогда (14) выполнено также и для u_M , а следовательно, верно (16), т. е. $u_M \in C^{1,1/2}[a, b]$.

Осталось показать, что $J(u_k) \rightarrow J(u_M)$. Для каждого $n \in N$ рассмотрим разбиение $[a, b]$ на n равных интервалов и функцию $p_k^n : [a, b] \rightarrow R$, аффинную на каждом интервале и равную u_k в концах интервала. Аналогично кусочно аффинная функция $p^n : [a, b] \rightarrow R$ строится для предельной функции u_M . Тогда $J(p_k^n) \rightarrow J(p^n)$, $k \rightarrow \infty$, и $J(p^n) \rightarrow J(u_M)$, $n \rightarrow \infty$. Осталось показать, что для любого $\epsilon > 0$ при достаточно больших n справедливо

$$J(u_k) \geq J(p_k^n) - \epsilon \quad (19)$$

равномерно по $k \in N$. Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$. Рассмотрим интегранд

$$\tilde{L}(x, u, v) = L(x, u, v) - L_v(x_1, u_k(x_1), \tilde{k})v - L(x_1, u_k(x_1), \tilde{k}), \quad (20)$$

где $\tilde{k} = \dot{l}_k = (u_k(x_2) - u_k(x_1))/(x_2 - x_1)$. Имеем

$$J(u_k; [x_1, x_2]) - J(l_k; [x_1, x_2]) = \tilde{J}(u_k; [x_1, x_2]) - \tilde{J}(l_k; [x_1, x_2]). \quad (21)$$

Интегранд $\tilde{L}(x_1, u_k(x_1), v)$ переменного v достигает минимума в точке $v = \tilde{k}$, который равен нулю. Для $x \in [x_1, x_2]$ имеем $|u_k(x) - u_k(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ и тогда

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x, l_k(x), \dot{l}_k(x)) - \tilde{L}(x, u_k(x), \dot{u}_k(x)) &\leq \{\tilde{L}(x, l_k(x), \dot{l}_k(x)) - \tilde{L}(x_1, l_k(x_1), \tilde{k})\} \\ &\quad + \{\tilde{L}(x_1, u_k(x_1), \tilde{k}) - \tilde{L}(x_1, u_k(x_1), \dot{u}_k(x))\} \\ &\quad + \{\tilde{L}(x_1, u_k(x_1), \dot{u}_k(x)) - \tilde{L}(x, u_k(x), \dot{u}_k(x))\} \\ &\leq c_1(M)|x_2 - x_1| + 0 + c_2(M)|x_2 - x_1| \leq c(M)|x_2 - x_1|. \end{aligned} \quad (22)$$

Тем самым в силу (21), (22) получаем

$$J(p_k^n) - J(u_k) \leq nc(M)(|b - a|/n)^2 \quad (23)$$

и действительно выполнено (19) при всех достаточно больших $n \in N$ равномерно по $k \in N$.

Таким образом, теорема 3 и все вытекающие следствия для локальных минимумов могли быть доказаны изложенными прямыми методами еще в 19-м веке, даже до работ Вейерштрасса и Гильберта по теории поля. Однако исторически сложилось, что в 19-м веке математики предпочитали развивать непрямые методы в вариационном исчислении и развитие прямых методов было отложено до настоящего времени.

Приложение. Для $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_1, x_2 \in [a, b]$ с $x_2 > x_1$ определим $l_{x_1, x_2} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ как аффинную функцию, принимающую те же граничные значения в точках x_1, x_2 , что и функция u , т. е. $l_{x_1, x_2}(x_1) = u(x_1)$, $l_{x_1, x_2}(x_2) = u(x_2)$. Тогда выполнено

$$\dot{l}_{x_1, x_2}(x) = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Как и ранее, будем использовать обозначение

$$J(u; [x_1, x_2]) := \int_{x_1}^{x_2} L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx.$$

Лемма 6. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ является компактным выпуклым множеством и $M > 0$. Пусть $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является M -липшицевой функцией с графиком в K . Пусть также $x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_2$ — точки интервала $[a, b]$ такие, что $|x_4 - x_3|e \geq |x_2 - x_1|$, $|x_2 - x_1| \leq 1$.

Пусть L является C^1 -регулярным интеграндом в множестве $K \times [-M, M]$, т. е.

$$|L(x, u, v) - L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})| \leq c_1(|x - \bar{x}| + |u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|), \quad c_1 > 0, \quad (24)$$

для $(x, u), (\bar{x}, \bar{u}) \in K$, $|v|, |\bar{v}| \leq M$, и пусть L эллиптична по v на множестве $K \times [-M, M]$, т. е. существует $\mu > 0$ такое, что

$$L(x, u, v_2) - L(x, u, v_1) - L_v(x, u, v_1)(v_2 - v_1) \geq \mu|v_2 - v_1|^2, \quad (25)$$

если $(x, u) \in K$, $|v_1|, |v_2| \leq M$.

Предположим, что

$$J(u; [x_1, x_2]) \leq J(l_{x_1, x_2}; [x_1, x_2]) + c_2|x_2 - x_1|^2, \quad (26)$$

$$J(u; [x_3, x_4]) \leq J(l_{x_3, x_4}; [x_3, x_4]) + c_2|x_4 - x_3|^2. \quad (27)$$

Тогда

$$\left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{u(x_4) - u(x_3)}{x_4 - x_3} \right] \leq 2e \left[\frac{c_2 + 2c_1(1 + M)}{\mu} \right]^{1/2} |x_2 - x_1|^{1/2}. \quad (28)$$

Доказательство. Сначала получим оценки экцесса производных на интервалах $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$, т. е. оценки интегралов

$$\int_{x_1}^{x_2} |\dot{u}(x) - \dot{l}_{x_1, x_2}|^2 dx, \quad \int_{x_3}^{x_4} |\dot{u}(x) - \dot{l}_{x_3, x_4}|^2 dx.$$

Ввиду (24)

$$|L(x_1, u(x_1), \dot{u}(x)) - L(x, u(x), \dot{u}(x))| \leq c_1(|x_1 - x| + M|x_1 - x|),$$

$$|L(x_1, u(x_1), \dot{l}_{x_1, x_2}(x)) - L(x, l_{x_1, x_2}(x), \dot{l}_{x_1, x_2}(x))| \leq c_1(|x_1 - x| + M|x_1 - x|).$$

Поэтому если определим $\tilde{L}(\cdot) := L(x_1, u(x_1), \cdot)$, то согласно (26) выполнено

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u; [x_1, x_2]) &\leq J(u; [x_1, x_2]) + c_1(1 + M)|x_2 - x_1|^2 \\ &\leq J(l_{x_1, x_2}; [x_1, x_2]) + c_2|x_2 - x_1|^2 + c_1(1 + M)|x_2 - x_1|^2 \\ &\leq \tilde{J}(l_{x_1, x_2}; [x_1, x_2]) + c_2|x_2 - x_1|^2 + 2c_1(1 + M)|x_2 - x_1|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда в силу (25)

$$\begin{aligned} &\tilde{J}(u; [x_1, x_2]) - \tilde{J}(l_{x_1, x_2}; [x_1, x_2]) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \{\tilde{L}(\dot{u}(x)) - \tilde{L}(\dot{l}_{x_1, x_2}) - \tilde{L}_v(l_{x_1, x_2})(\dot{u} - \dot{l}_{x_1, x_2})\} dx \geq \mu \int_{x_1}^{x_2} |\dot{u} - \dot{l}_{x_1, x_2}|^2 dx. \end{aligned}$$

Следовательно, из (29) вытекает неравенство

$$\int_{x_1}^{x_2} |\dot{u}(x) - \dot{l}_{x_1, x_2}|^2 dx \leq \frac{c_2 + 2c_1(1 + M)}{\mu} |x_2 - x_1|^2. \quad (30)$$

Аналогично

$$\int_{x_3}^{x_4} |\dot{u}(x) - \dot{l}_{x_3, x_4}|^2 dx \leq \frac{c_2 + 2c_1(1 + M)}{\mu} |x_4 - x_3|^2. \quad (31)$$

Тогда из неравенства Гёльдера и (30), (31) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{x_3}^{x_4} |\dot{l}_{x_1, x_2} - \dot{l}_{x_3, x_4}| dx \leq \int_{x_3}^{x_4} |\dot{l}_{x_3, x_4} - \dot{u}(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |\dot{l}_{x_1, x_2} - \dot{u}(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{x_3}^{x_4} |\dot{l}_{x_3, x_4} - \dot{u}(x)|^2 dx \right)^{1/2} |x_4 - x_3|^{1/2} + \left(\int_{x_1}^{x_2} |\dot{l}_{x_1, x_2} - \dot{u}(x)|^2 dx \right)^{1/2} |x_2 - x_1|^{1/2} \\ &\leq \left[\frac{c_2 + 2c_1(1 + M)}{\mu} \right]^{1/2} \{|x_4 - x_3|^{3/2} + |x_2 - x_1|^{3/2}\} \\ &\leq \left[\frac{c_2 + 2c_1(1 + M)}{\mu} \right]^{1/2} 2|x_2 - x_1|^{3/2} \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$|\dot{l}_{x_1, x_2} - \dot{l}_{x_3, x_4}| \leq \left[\frac{c_2 + 2c_1(1 + M)}{\mu} \right]^{1/2} 2e|x_2 - x_1|^{1/2},$$

т. е. (28) справедливо. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Buttazzo G., Giaquinta M., Hildebrandt S. One-dimensional variational problems. An introduction. Oxford: Oxf. Univ. Press, 1998.
2. Tonelli L. Sur une méthode directe du calcul des variations // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1915. V. 39. P. 233–264.
3. Сычев М. А. О регулярности решений одномерных вариационных задач // Тр. 27-й Всесоюз. студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 1989). Новосибирск: НГУ, 1989. P. 60–65.
4. Сычев М. А. О регулярности решений вариационных задач // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 118–142.
5. Sychev M. A., Mizel V. J. A condition on the value function both necessary and sufficient for full regularity of minimizers of one-dimensional variational problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. P. 119–133.
6. Sychev M. A. Another theorem of classical solvability ‘in small’ for one-dimensional variational problems // Arch. Ration. Mech. Anal. 2011. V. 202. P. 269–294.
7. Гратвик Р., Сычев М. А., Терсенов А. С. Теория регулярности для одномерных вариационных задач с сингулярной эллиптичностью // Докл. АН. 2016. Т. 470, № 1. С. 10–12.
8. Gratwick R., Sychev M. A., Tersenov A. S. Regularity and singularity phenomena for one-dimensional variational problems with singular ellipticity // Pure Appl. Funct. Anal. 2016. V. 1, N 3. P. 397–416.
9. Gratwick R., Sedipkov A. A., Sychev M. A., Tersenov A. S. Pathological solutions of the Euler–Lagrange equation and existence/regularity of minimizers in one-dimensional variational problems // C. R. Math. Sci. Paris. 2017. Т. 355, N 3. P. 359–362.
10. Mandallena J.-P. On the regularity of solutions of one-dimensional variational obstacle problems // Adv. Calc. Var. <https://doi.org/10.1515/acv-2016-0030>.
11. Tonelli L. Fondamenti di calcolo delle variazioni. Bologna: Zanichelli, 1921–1923. V. II.
12. Ball J. M., Mizel V. J. One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler–Lagrange equation // Arch. Ration. Mech. Anal. 1985. V. 90, N 4. P. 325–388.
13. Clarke F. H., Vinter R. B. Existence and regularity in the small in the calculus of variations // J. Differ. Equ. 1985. V. 59. P. 336–354.
14. Clarke F. H., Vinter R. B. Regularity properties of solutions to the basic calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 289, N 1. P. 73–98.

Статья поступила 12 января 2017 г.

Сычев Михаил Андреевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
masychev@math.nsc.ru