

ПРОМЕЖУТОЧНО ВПОЛНЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. Р. Чехлов

Аннотация. Описаны промежуточно вполне инвариантные подгруппы делимых и периодических групп; показано, что во вполне разложимой группе без кручения, каждая однородная компонента которой разложима, промежуточно вполне инвариантные подгруппы служат прямыми слагаемыми; для периодических групп выяснено, когда все их вполне инвариантные подгруппы служат промежуточно вполне инвариантными, а для групп без кручения этот вопрос сведен к редуцированному случаю. Показано, что в периодической группе, являющейся прямой суммой циклических групп, ее подгруппа промежуточно инертна тогда и только тогда, когда она соизмерима с некоторой промежуточно вполне инвариантной подгруппой.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.518

Ключевые слова: вполне инвариантная подгруппа, сильно инвариантная подгруппа, соизмеримые подгруппы, промежуточно инертная подгруппа, ранг группы.

Напомним, что подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для всякого f из кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A ; если $nH = H \cap nA$ для всякого натурального n , то подгруппа H называется *чистой*. Группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых $0 \neq a, b \in A$ из условия на их характеристики $\chi(a) \leq \chi(b)$ следует, что $\alpha a = b$ для некоторого $\alpha \in E(A)$. Подгруппы H, K группы G называются *соизмеримыми*, если подгруппа $K \cap H$ имеет конечный индекс как в K , так и в H .

Через $\langle B \rangle_*$ обозначается чистая подгруппа, порожденная подмножеством B группы, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) целых чисел, $\mathbb{Z}(n)$ — циклическая группа порядка n , $f \mid G$ — ограничение гомоморфизма $f : A \rightarrow B$ на подмножество $G \subseteq A$, $t(A)$ — тип однородной группы без кручения A , $t(x)$ — тип элемента x группы без кручения, $o(a)$ — порядок элемента a группы.

Подгруппу N группы G будем называть *сильно инвариантной* (сокращенно *si-подгруппой*) и писать $N \leq \text{si } G$, если $fN \subseteq N$ для всякого гомоморфизма $f : N \rightarrow G$. В каждой группе G ее подгруппа $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$ сильно инвариантна; в группе без кручения A ее подгруппа $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$, где t — некоторый тип, сильно инвариантна; в смешанной группе ее периодическая часть — сильно инвариантная подгруппа. Запись $H \not\leq \text{si } G$ будет означать, что H не является si-подгруппой в G . Группа G называется *si-простой*, если она не имеет нетривиальных ($\neq 0, G$) сильно инвариантных подгрупп. Однородные вполне транзитивные группы без кручения идемпотентного типа si-просты, si-проста и всякая однородная вполне разложимая группа без кручения [1, предложение 26 и абзац перед ним]. В [2–5] изучались группы, являющиеся обобщением вполне транзитивных групп.

В [1] упомянут класс *промежуточно вполне инвариантных* подгрупп, т. е. таких вполне инвариантных подгрупп K группы G , что подгруппа K вполне инвариантна во всякой подгруппе группы G , содержащей K . Такие подгруппы K будем кратко называть *ifi-подгруппами* (intermediately fully invariant subgroups) и писать $K \leq \text{ifi } G$. Этот класс промежуточен между классом всех *si-подгрупп* и классом всех вполне инвариантных подгрупп данной группы. В [1, с. 443] показано, что такие классы различны, в данной статье также приведены соответствующие примеры. Аналогично *si-простым* группам определяются *ifi-простые* группы. Ясно, что *ifi-простая* группа будет *si-простой*.

Подгруппа H группы G называется *вполне инертной*, если фактор-группа $(H + \varphi H)/H$ конечна (эквивалентно подгруппа $H \cap \varphi H$ имеет конечный индекс в φH) для всякого $\varphi \in E(G)$. Вполне инертные подгруппы абелевых групп изучались в [6–10]. Согласно [11] термин *инертная подгруппа* предложен профессором Кегелем. *Промежуточно инертной* назовем такую подгруппу H группы G , что для каждой подгруппы $N \leq G$ со свойством $H \leq N$ $H \cap \varphi H$ имеет конечный индекс в φH для каждого $\varphi \in E(N)$. Ясно, что каждая конечная подгруппа и подгруппа, имеющая конечный индекс в некоторой промежуточно вполне инвариантной подгруппе, являются промежуточно инертными.

ПРИМЕР 1. 1. В $\mathbb{Z}$ каждая подгруппа является *ifi-подгруппой* и эта группа *si-проста*.

2. Если G — *si-простая* группа, то для всякого кардинального числа $\alpha > 1$ группа $\bigoplus_{\alpha} G$ *ifi-проста*.

3. Подгруппа $p\mathbb{Z}$ вполне инвариантна в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p)$, но $p\mathbb{Z}$ не является *ifi-подгруппой*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Действительно, всякая подгруппа в $\mathbb{Z}$ имеет вид $n\mathbb{Z}$ для некоторого натурального n . Если $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$, то m делит n , $n = mk$. Подгруппа $n\mathbb{Z} = k(m\mathbb{Z})$ вполне инвариантна в $m\mathbb{Z}$.

2. Если подгруппа H вполне инвариантна в группе $\bigoplus_{\alpha} G$, то $H = \bigoplus_{\alpha} (H \cap G)$. Так как G *si-проста*, при условии нетривиальности подгруппы H существует $f \in \text{Hom}(H \cap G, G)$ со свойством $f(H \cap G) \not\subseteq H \cap G$. Поэтому подгруппа $\bigoplus_{\alpha} (H \cap G)$ не вполне инвариантна в $G \oplus (\bigoplus_{\alpha-1} (H \cap G))$. Заметим, что если G — редуцированная группа без кручения, то она (а значит, и $\bigoplus_{\alpha} G$) имеет нетривиальные вполне инвариантные подгруппы.

3. Подгруппа $p\mathbb{Z}$ не вполне инвариантна в $p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p)$.

Если H — вполне инвариантная (сильно инвариантная) подгруппа в G , то подгруппа H^n вполне инвариантна (сильно инвариантна) в G^n для каждого $n \in \mathbb{N}$. Из п. 2 примера 1 следует, что это свойство для *ifi-подгрупп* в общем случае не справедливо.

ПРИМЕР 2. В группе без кручения G ранга 1 всякая вполне инвариантная подгруппа является *ifi-подгруппой*.

Действительно, пусть подгруппа H вполне инвариантна в G , $H \leq K \leq G$ и $f \in E(K)$. Так как K также является группой ранга 1, f действует как умножение на некоторое рациональное число m/n , где $nK = K$. Поскольку $t(K) \leq t(G)$, то $nG = G$ и, следовательно, $nH = H$, откуда $f(H) \subseteq H$.

В частности, в группе без кручения G ранга 1 всякая подгруппа является *ifi-подгруппой* тогда и только тогда, когда $pG \neq G$ для каждого простого числа p .

В группе без кручения A ранга 2 могут существовать вполне инвариантные подгруппы, не являющиеся *ifi*-подгруппами. Действительно, если в такой группе A кольцо эндоморфизмов $E(A)$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}$, то всякая подгруппа в A будет вполне инвариантной, однако подгруппа $\mathbb{Z}$ не вполне инвариантна в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leq A$.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$, где $o(a) = p$, $o(b) = p^2$, $o(c) = p^3$. Тогда вполне инвариантные подгруппы $pG[p] = \langle pb \rangle \oplus \langle p^2c \rangle$ и $pG[p^2] = \langle pb \rangle \oplus \langle pc \rangle$ не являются *ifi*-подгруппами.

Действительно, эти подгруппы не вполне инвариантны в подгруппах $\langle a \rangle \oplus pG[p]$ и $\langle a \rangle \oplus pG[p^2]$ соответственно. Подобным образом строятся вполне инвариантные, но не *ifi*-подгруппы во всякой ограниченной p -группе, в цоколе которой имеются ненулевые элементы с различной высотой.

Приведем следующие простые свойства.

1. Сумма *ifi*-подгрупп снова является *ifi*-подгруппой.

Действительно, если $H_i \leq \text{ifi } G$, $H = \sum_{i \in I} H_i$, $H \leq K \leq G$ и $f \in E(K)$, то $f(H_i) \subseteq H_i$, откуда $f(H) = \sum_{i \in I} f(H_i) \subseteq H$.

Следующее свойство очевидно.

2. Если $H \leq K \leq G$ и $H \leq \text{ifi } G$, $K/H \leq \text{ifi } G/H$, то $K \leq \text{ifi } G$.

3. Если G — группа без кручения и $H \leq \text{ifi } G$, то $H_* \leq \text{ifi } G$.

Это свойство вытекает из свойства 2, поскольку H_*/H совпадает с периодической частью фактор-группы G/H , а периодическая часть группы является *ifi*-подгруппой.

4. Если G — группа без кручения, а N — ее чистая *ifi*-подгруппа, то N^- также является *ifi*-подгруппой, где N^- — замыкание в $\mathbb{Z}$ -адической или p -адической топологии подгруппы N в группе G .

Это свойство вытекает из того, что делимая и p -делимая части группы являются *ifi*-подгруппами, а в данном случае N^-/N совпадает с делимой (соответственно с p -делимой) частью фактор-группы G/N .

Если G — редуцированная p -группа с $G^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n G \neq 0$, то $G^1 = 0^-$ — вполне инвариантная подгруппа в G , не являющаяся *ifi*-подгруппой.

Предложение 1. Пусть N — *ifi*-подгруппа группы $G = H \oplus K$. Тогда $N = (N \cap H) \oplus (N \cap K)$ и $N \cap H$, $N \cap K$ являются *ifi*-подгруппами в H и K соответственно. Обратно, если H_1 и K_1 — *ifi*-подгруппы в H и K соответственно, то $H_1 \oplus K_1$ является *ifi*-подгруппой в G тогда и только тогда, когда $\alpha(H_1) \subseteq K_1$ для каждого гомоморфизма $\alpha : H_1 \rightarrow K$ и $\beta(K_1) \subseteq H_1$ для каждого гомоморфизма $\beta : K_1 \rightarrow H$.

Доказательство. Если $N \cap H \leq A \leq H$ и $\varphi \in E(A)$, то $N \leq A \oplus K$ и $\bar{\varphi} \in E(A \oplus K)$, где $\bar{\varphi} \mid A = \varphi$ и $\bar{\varphi} \mid K = 0$. По условию $\bar{\varphi}N \subseteq A \oplus K$, откуда $\varphi(N \cap H) \subseteq N \cap H$, т. е. $N \cap H \leq \text{ifi } H$ и аналогично $N \cap K \leq \text{ifi } K$.

Необходимость второго утверждения очевидна.

Достаточность. Пусть $H_1 \oplus K_1 \leq A \leq G$, $\varphi \in E(A)$, а π и θ — проекции группы G на H и K соответственно. Имеем $\underline{A} = (A \cap H) \oplus (A \cap K) \leq A \leq \pi A \oplus \theta A = \bar{A}$ и $H_1 \leq A \cap H$, $K_1 \leq A \cap K$, т. е. $H_1 \oplus K_1 \leq \underline{A}$. Если $\psi = \pi\varphi\pi + \pi\varphi\theta + \theta\varphi\pi + \theta\varphi\theta$, то ψ можно рассматривать как элемент группы $\text{Hom}(\underline{A}, \bar{A})$. Имеем $\pi\varphi\pi(H_1) \subseteq H_1$ и $\theta\varphi\pi(H_1) \subseteq K_1$, а $\pi\varphi\theta(H_1) = \theta\varphi\theta(H_1) = 0$. Аналогично

$\theta\varphi\theta(K_1) \subseteq K_1$ и $\pi\varphi\theta(K_1) \subseteq H_1$, а $\pi\varphi\pi(K_1) = \theta\varphi\pi(K_1) = 0$. Поэтому $\psi(H_1 \oplus K_1) \subseteq H_1 \oplus K_1$. Осталось заметить, что $\psi \mid (H_1 \oplus K_1) = \varphi \mid (H_1 \oplus K_1)$. $\square$

Теорема 1. 1. Если G — редуцированная или делимая p -группа, то всякая ее нетривиальная *ifi*-подгруппа N имеет вид $G[p^n]$, где n — некоторое натуральное число, в частности, все *ifi*-подгруппы группы G являются *si*-подгруппами.

2. Пусть $G = D \oplus R$ — нередуцированная p -группа, где $D \neq 0$ — делимая, а R — редуцированная часть группы G . Тогда всякая нетривиальная *ifi*-подгруппа группы G совпадает с одной из следующих подгрупп: D , $D \oplus R[p^m]$, $D[p^n] \oplus R[p^n]$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

3. В делимой группе D *ifi*-подгруппы или совпадают с D , или служат *ifi*-подгруппами ее периодической части, т. е. являются прямыми суммами *ifi*-подгрупп ее p -компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для делимых групп утверждение очевидно, поэтому перейдем к редуцированному случаю. Предположим сначала, что N — ограниченная группа, т. е. $p^n N = 0$ для некоторого минимального натурального n . Тогда $N = \bigoplus_{i \in I} C_i$, где C_i — циклические группы порядка $\leq p^n$, причем хотя бы одна C_i , скажем C_1 , изоморфна $\mathbb{Z}(p^n)$. Далее $N \subseteq G[p^n]$ и $G[p^n] = \bigoplus_{j \in J} X_j$, где X_j также циклические группы порядка $\leq p^n$, причем будем считать, что $X_1 = C_1$. Если $N \neq G[p^n]$, то найдется $X_j \not\subseteq N$. Эпиморфизм $C_1 \rightarrow X_j$ продолжается до эндоморфизма f подгруппы $G[p^n]$, и $f(N) \not\subseteq N$; противоречие. Следовательно, $N = G[p^n]$.

Допустим, что N — неограниченная группа. Если $g \in G[p] \setminus N$, то $\langle N, g \rangle = \langle g \rangle \oplus N$. Поэтому найдется гомоморфизм $0 \neq f: N \rightarrow \langle g \rangle$. Данное противоречие показывает, что $G[p] \subseteq N$. Пусть $G[p^{n-1}] \subseteq N$, но $G[p^n] \not\subseteq N$ (если $G[p^m] \subseteq N$ для каждого натурального m , то $N = G$, что противоречит нетривиальности N).

Если $x \in G[p^n] \setminus N$, то $px \in N$. Так как группа N неограниченная, найдется такой ее элемент c , что $\langle c \rangle$ — прямое слагаемое в N и $o(c) > p^n$; $N = \langle c \rangle \oplus B$. Тогда $px = p^k(lc) + b$, где $k > 1$, $1 \leq l \leq p-1$, $a \in B$ и $b = py$ для некоторого $y \in G$. Далее $x - p^{k-1}(lc) - y \in G[p] \subseteq N$ и $y \notin N$ (так как $x \notin N$). Заметим, что $\langle N, y \rangle = \langle c \rangle \oplus \langle B, y \rangle$. Действительно, если $\langle c \rangle \cap \langle B, y \rangle \neq 0$, то $mc = z + y$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $z \in B$ и $mc \neq 0$. Имеем $pmc = pz + py \in B$ и $mc - z - y \in G[p] \subseteq N$, откуда $y \in N$; противоречие.

Итак, $\langle N, y \rangle = \langle c \rangle \oplus \langle B, y \rangle$, а поскольку $o(c) > o(y)$, существует гомоморфизм $f: \langle c \rangle \rightarrow \langle y \rangle$ со свойством $f(c) = y$, f продолжается до эндоморфизма подгруппы $\langle N, y \rangle$ и $fN \not\subseteq N$. Следовательно, случай неограниченности N невозможен.

П. 2 вытекает из п. 1 и предложения 1. П. 3 следует из того, что делимые группы без кручения не имеют нетривиальных вполне инвариантных подгрупп. $\square$

В частности, из теоремы 1 следуют описание *ifi*-подгрупп периодических групп, а также тот факт, что *ifi*-подгруппы редуцированной p -группы образуют цепь. В нередуцированном случае пересечение *ifi*-подгрупп может не являться *ifi*-подгруппой. Действительно, пусть $G = D \oplus R$, где $D \neq 0$ — делимая, а $R \neq 0$ — редуцированная p -группы. Тогда D и $G[p] = D[p] \oplus R[p]$ — *ifi*-подгруппы, однако подгруппа $D \cap G[p] = D[p]$ не вполне инвариантна в $G[p]$, поэтому $D[p] \not\subseteq \text{ifi } G$. Заметим, что $D[p] \leq \text{ifi } D$ и $D \leq \text{ifi } G$.

Пересечение *ifi*-подгрупп может не являться *ifi*-подгруппой и в группе без кручения.

ПРИМЕР 4. Пусть $E_1, \dots, E_4$ — группы без кручения ранга 1, p, q, p_2, p_3 — различные простые числа, типы групп E_1, E_2, E_3 попарно не сравнимы и

$$E_1 \cong E_4, \quad p_2 E_2 = E_2, \quad p_3 E_3 = E_3, \quad p E_1 \neq E_1, \quad p E_2 \neq E_2, \quad p E_3 \neq E_3,$$

$$p_2 E_1 \neq E_1, \quad p_2 E_3 \neq E_3, \quad p_3 E_1 \neq E_1, \quad p_3 E_2 \neq E_2,$$

$$q E_1 \neq E_1, \quad q E_2 \neq E_2, \quad q E_3 \neq E_3.$$

Группу G будем строить как подгруппу в некоторой делимой группе без кручения с помощью векторного пространства над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Положим

$$A = \langle E_1, E_2, p^{-\infty}(e_1 + e_2) \rangle, \quad B = \langle E_3, E_4, q^{-\infty}(e_3 + e_4) \rangle, \quad G = A \oplus B,$$

где $0 \neq e_i \in E_i, i = 1, \dots, 4$, а $p^{-\infty}a$ обозначает бесконечное множество элементов $p^{-1}a, p^{-2}a, \dots$. Заметим, что $\text{Hom}(A, B) = 0$. Действительно, в группе A элементы подгруппы E_2 делятся на любую степень числа p_2 , а в группе B нет ненулевых элементов с таким свойством, поэтому если $f \in \text{Hom}(A, B)$, то E_2 содержится в ядре $\ker f$ гомоморфизма f . Тогда $f(e_1) \in p^{-\infty}B = 0$, т. е. $E_1 \subseteq \ker f$ и, значит, $f = 0$. Тем самым $A \leq \text{ifi } G$. Заметим, что $E_1 \leq \text{ifi } A$. Далее $E_1 \oplus E_4 = G(t(E_1)) \leq \text{ifi } G$. Однако $E_1 = A \cap G(t(E_1)) \not\leq \text{ifi } G$, так как подгруппа E_1 не вполне инвариантна в $E_1 \oplus E_4$. Аналогично $B \leq \text{ifi } G$ и $E_4 = B \cap G(t(E_1)) \not\leq \text{ifi } G$.

Итак, множество всех ifi -подгрупп в общем случае не образует подрешетки в полной решетке вполне инвариантных подгрупп группы. Кроме того, из условия $H \leq \text{ifi } K \leq \text{ifi } G$ не обязательно следует, что $H \leq \text{ifi } G$.

Предложение 2. 1. Всякая однородная сепарабельная группа без кручения G ранга ≥ 2 является ifi -простой.

2. Если G — вполне разложимая группа без кручения, каждая однородная компонента которой имеет ранг ≥ 2 , то всякая ifi -подгруппа группы G совпадает с некоторым ее (вполне инвариантным) прямым слагаемым.

3. Если $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$, где все группы G_i ifi -просты, то всякая ifi -подгруппа группы G совпадает с некоторым ее (вполне инвариантным) прямым слагаемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $0 \neq N \leq \text{ifi } G$ и $a \in G \setminus N$. Имеем $G = \langle a \rangle_* \oplus B$ и $N = (N \cap \langle a \rangle_*) \oplus (N \cap B)$. Из сепарабельности и однородности группы G следует, что $N \cap \langle a \rangle_* \neq 0$ и $N \cap \langle a \rangle_* \neq \langle a \rangle_*$. Согласно предложению 1 $N \cap \langle a \rangle_* \leq \text{ifi } \langle a \rangle_*$. Однако $\langle a \rangle_*$ как группа ранга 1 si -проста, а каждый элемент группы B можно вложить в прямое слагаемое, изоморфное $\langle a \rangle_*$, поэтому подгруппа N не будет вполне инвариантной в группе $(N \cap \langle a \rangle_*) \oplus B$; противоречие.

2. Пусть $G = \bigoplus_{t \in \Omega} G_t$ — вполне разложимая группа без кручения, где G_t — однородные типа t компоненты группы G . Если $N \leq \text{ifi } G$, то $N = \bigoplus_{t \in \Omega} (N \cap G_t)$, где $N \cap G_t \leq \text{ifi } G_t$ для каждого $t \in \Omega$. Согласно п. 1 $N \cap G_t = G_t$ при $N \cap G_t \neq 0$. Поэтому $N = \bigoplus_{t \in \Delta} G_t$ — прямое слагаемое группы G , где $\Delta = \{t \in \Omega \mid N \cap G_t \neq 0\}$.

П. 3 доказывается аналогично п. 2. $\square$

Предложение 3. 1. Пусть G — сепарабельная группа без кручения такая, что для каждого ее прямого слагаемого A ранга 1 в дополнительном прямом слагаемом имеется прямое слагаемое, изоморфное A , а Ω — множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы G . Тогда всякая *ifi*-подгруппа группы G чиста в G и имеет вид $\sum_{t \in \Delta} G(t)$, где $\Delta \subseteq \Omega$.

2. Если G — алгебраически компактная группа без кручения, каждая ненулевая p -адическая компонента которой разложима, то всякая *ifi*-подгруппа группы G является плотной чистой *ifi*-подгруппой некоторого вполне инвариантного прямого слагаемого в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $N \leq \text{ifi } G$ и $a \in N$. Тогда $G = X \oplus Y$, где $a \in X = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ и $r(G_i) = 1$. Имеем $N \cap X = (N \cap G_1) \oplus \dots \oplus (N \cap G_n)$. Если $N \cap G_i \neq 0$, то $G_i \subseteq N$ (это следует из доказательства п. 1 предложения 2 и условия на прямые слагаемые ранга 1 группы G) и G_i — прямое слагаемое в N . Допустим, что $N \cap G_i \neq 0$ при всех $i = 1, \dots, n$ (напомним, что $\pi G = N \cap \pi G$ для всякой проекции π группы G). Тогда X — прямое слагаемое в N . Отсюда, в частности, следует чистота N . Подгруппа N также является сепарабельной группой (всякая вполне инвариантная подгруппа сепарабельной группы сепарабельна).

Обозначим через Δ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы N . Покажем, что $\Delta \subseteq \Omega$. Пусть $N = C \oplus K$, где $r(C) = 1$, $0 \neq x \in C$ и $x \in H = G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, где H — прямое слагаемое в G , а $r(G_i) = 1$. Тогда $t(C) = t(x) \leq t(G_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$ (предполагаем, что $\pi_i x \neq 0$ при всех $i = 1, \dots, n$, где π_i — проекции группы G на G_i , значит, как и выше, $G_i \subseteq N$ для всех $i = 1, \dots, n$). Если θ — проекция группы N на C , то $\theta(G_{i_0}) \neq 0$ хотя бы для одного $1 \leq i_0 \leq n$. В противном случае $G_i \subseteq K$ для всех $i = 1, \dots, n$, $H \subseteq K$ и, значит, $C \subseteq K$; противоречие. Итак, $\theta(G_{i_0}) \neq 0$ для некоторого i_0 , значит, $t(G_{i_0}) \leq t(\theta(G_{i_0})) \leq t(C)$. Отсюда $t(C) = t(\theta(G_{i_0}))$ и включение $\Delta \subseteq \Omega$ доказано. Группа G_{i_0} — прямое слагаемое в N и в G . Для каждого $y \in G(t(C))$ найдутся $z \in G_{i_0}$ и гомоморфизм $f : G_{i_0} \rightarrow G$ со свойством $fz = y$, f продолжается до эндоморфизма группы G , поэтому $G(t(C)) \subseteq N$. Следовательно, $N = \sum_{t \in \Delta} G(t)$.

2. Пусть $G = D \oplus R$, где D — делимая, R — редуцированная части группы G , а $0 \neq N \leq \text{ifi } G$. Имеем $N = (N \cap D) \oplus (N \cap R)$. Если $N \cap D \neq 0$ или $N \cap R \neq 0$, то $D \subseteq N$ и $N = D \oplus (N \cap R)$. Если $R = 0$, то $N = D$, так как делимые группы без кручения *ifi*-просты. Поэтому считаем далее, что $D = 0$ и $G = R$. Как редуцированная алгебраически группа без кручения R имеет вид $R = \prod_{p \in \pi} R_p$, где R_p — p -адические компоненты группы R , а π — некоторое множество простых чисел. Каждая группа R_p является однородной идемпотентного типа вполне транзитивной группой, а ее вполне инвариантные подгруппы имеют вид nR_p , где $n \in \mathbb{N}$. По условию группа R_p разложима, $R_p = H \oplus K$, где $H, K \neq 0$. Если $n > 1$, то подгруппа $nH \oplus nK$ не вполне инвариантна в $nH \oplus nK$, что непосредственно следует из строения p -адических алгебраически компактных групп. Поэтому $R_p \subseteq N$ при $N \cap R_p \neq 0$. Если $\sigma = \{p \in \pi \mid N \cap R_p \neq 0\}$, то $\bigoplus_{p \in \sigma} R_p \subseteq N \subseteq R' = \prod_{p \in \sigma} R_p$ и R' — вполне инвариантное прямое слагаемое в R . Поскольку $\bigoplus_{p \in \sigma} R_p$ — плотная подгруппа в R' , подгруппа N плотна в R' . Покажем, что N — чистая подгруппа в R' . Пусть $a \in N$ и $a = pb$ для некоторых

простого числа p и $b \in R'$. Так как рассматриваются группы без кручения, достаточно показать, что $b \in N$. Если $pR' \neq R'$, то $R_p \subseteq R'$ и $R' = R_p \oplus B$, $a = x + y$, $b = u + v$, где $x, u \in R_p$, $y, v \in B$, а $B = \prod_{q \in \sigma \setminus \{p\}} R_q$. Имеем $N = R_p \oplus A$, где $A = N \cap B$ и $x = pu$, $y = pv$. Осталось заметить, что $v \in N$. Действительно, если $v \notin N$, то $A \neq pA$. Группа B p -делима, значит, можно определить эндоморфизм $f \in E(R')$ следующим образом: f действует на R_p как тождественный эндоморфизм, а на B — как деление на p . Тогда $fN \not\subseteq N$; противоречие. $\square$

ПРИМЕР 5. 1. В группе без кручения G ранга 1 всякая подгруппа промежуточно инертна.

2. В группе без кручения конечного ранга всякая конечно порожденная подгруппа N максимального ранга промежуточно инертна.

Действительно, пусть $N \leq H \leq G$ и $f \in E(H)$ — ненулевой эндоморфизм. В п. 1 f продолжается до автоморфизма группы $\mathbb{Q}$, поэтому f действует как умножение на некоторое рациональное число m/n . Имеем $n(N + fN) \subseteq N$. Значит, фактор-группа $(N + fN)/N \cong fN/(N \cap fN)$ конечна как ограниченный гомоморфный образ группы fN ранга ≤ 1 . В п. 2 подгруппа N существенна, тем самым фактор-группа $fN/(N \cap fN)$ конечна как периодический гомоморфный образ свободной группы N конечного ранга.

Предложение 4. 1. В группе без кручения G ранга 1 всякая промежуточно инертная подгруппа соизмерима с некоторой *ифи*-подгруппой тогда и только тогда, когда $pG \neq G$ для всякого простого числа p .

2. Если G — группа без кручения конечного ранга > 1 , имеющая ненулевые эндоморфизмы с ненулевыми ядрами, то всякая ее промежуточно инертная подгруппа соизмерима с некоторой *ифи*-подгруппой тогда и только тогда, когда G является свободной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. **НЕОБХОДИМОСТЬ.** Если $pG = G$ для некоторого простого p , то каждая *ифи*-подгруппа группы G будет p -делимой; p -делимой будет и соизмеримая с ней подгруппа, что противоречит примеру 5.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $N \leq H \leq G$ и $pG \neq G$ для всякого простого числа p . Группа H тоже является группой ранга 1, и $pH \neq H$ для всякого простого числа p , поэтому ее кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу целых чисел, значит, подгруппа N будет вполне инвариантной в H .

2. **НЕОБХОДИМОСТЬ.** Свободная существенная подгруппа N группы G промежуточно инертна. Если она соизмерима с *ифи*-подгруппой F , то $nF \subseteq N$ для некоторого натурального n . Подгруппа свободной группы свободна, значит, свободна и F . Пусть $H \leq G$ и ранг подгруппы H меньше ранга G . Найдется $K \leq G$ такая, что $K \cap H = 0$ и подгруппа $K \oplus H$ существенна в G . Если K_1 и H_1 — свободные существенные подгруппы в K и H соответственно, то $K_1 \oplus H_1$ — существенная промежуточно инертная подгруппа в G и $K_1 \oplus H_1 \leq K \oplus H$; $K_1 \oplus H_1$ соизмерима с некоторой свободной *ифи*-подгруппой X , которая также существенна в G . Поэтому в силу конечного ранга $mX \subseteq (X \cap K_1) \oplus (X \cap H_1)$ для некоторого натурального m . Отсюда ввиду свободы подгруппы $X \cap K_1$ следует, что некоторое натуральное кратное подгруппы H содержится в X . Значит, подгруппа H свободна. Итак, всякая подгруппа группы G ранга, меньшего, чем ранг самой G , свободна. По условию в G существует эндоморфизм f с ненулевым ядром. Тогда $\ker f$ — свободное прямое слагаемое в G с дополнительным свободным прямым слагаемым. Поэтому свободна и группа G .

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Как подгруппа свободной группы промежуточно инертная подгруппа N группы G является свободной того же ранга, что и G . Поэтому фактор-группа G/N конечна как периодическая группа конечного ранга. $\square$

В [12] несвободные группы без кручения, у которых все собственные сервантные подгруппы свободны, названы *сервантно свободными* (в [12] чистые подгруппы называются *сервантными*). Ранг таких групп конечен, они сильно неразложимы, а их алгебра квазиэндоморфизмов является полем алгебраических чисел [12, следствие 5.3] (см. также [13]).

Лемма 1. Пусть $K \leq H$ — подгруппы группы G такие, что фактор-группа H/K конечна. Подгруппа K промежуточно инертна в G тогда и только тогда, когда H — промежуточно инертная подгруппа в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \leq A$ и $\varphi \in E(A)$. Из конечности фактор-групп H/K и $\varphi H/\varphi K$ следует конечность фактор-группы $(H + \varphi H)/(K + \varphi K)$. Поскольку $(H + \varphi H)/(K + \varphi K) \cong ((H + \varphi H)/K)/((K + \varphi K)/K)$, конечность $(K + \varphi K)/K$ влечет конечность $(H + \varphi H)/K$, откуда вытекает конечность $(H + \varphi H)/H$. Если конечна $(H + \varphi H)/H$, то конечна $(H + \varphi H)/K$. Так как $K + \varphi K \subseteq H + \varphi H$, конечна и фактор-группа $(K + \varphi K)/K$. $\square$

Лемма 2. Подгруппа H периодической группы G промежуточно инертна в G тогда и только тогда, когда каждая p -компонента H_p подгруппы H промежуточно инертна в G_p , причем почти все H_p промежуточно вполне инвариантны в G_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Утверждение о промежуточной инертности очевидно, поскольку каждая H_p — прямое слагаемое в H и $\varphi(H_p) \subseteq G_p$ для всех эндоморфизмов φ всякой подгруппы $K \leq G$, содержащей H . Если $H_p \not\leq \text{if } G$ для некоторого бесконечного множества Π простых p , то для каждого такого p найдутся подгруппа $K_p \leq G_p$, где $H_p \leq K_p$, и $\psi_p \in E(K_p)$ такие, что $\psi_p(H_p) \not\subseteq H_p$. Если $\psi = \bigoplus_p \psi_p$, где $\psi_p(H_p) = 0$ при $p \notin \Pi$, то фактор-группа $(H + \psi H)/H$ бесконечна; противоречие.

ДОСТАТОЧНОСТЬ очевидна. $\square$

Предложение 5 [8, предложение 1.4]. Если G — p -группа, то ее подгруппы H и K соизмеримы тогда и только тогда, когда для некоторой подгруппы $C \leq G$ имеют место равенства $H = F \oplus C$ и $K = F' \oplus C$, где подгруппы F и F' конечны.

Предложение 6. Всякая ограниченная промежуточно инертная подгруппа H p -группы G соизмерима с промежуточно вполне инвариантной подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p^n H = 0$ для некоторого минимального натурального n . Тогда $H = \bigoplus_{k=1}^n \left(\bigoplus_{i \in I_k} C_i \right)$, где C_i для каждого $i \in I_k$ суть циклические группы порядка p^k . Если группа H бесконечна, то для некоторого максимального $m \leq n$ множество I_m также бесконечно, а подгруппа $H' = \bigoplus_{k=1}^m \left(\bigoplus_{i \in I_k} C_i \right)$ имеет конечный индекс в H . Далее $H' \subseteq G[p^m]$ и как ограниченная чистая подгруппа $\bigoplus_{i \in I_m} C_i$ — прямое слагаемое в $G[p^m]$. Если H' не соизмерима с подгруппой $G[p^m]$, то найдется счетное множество элементов $x_n \in G[p^m] \setminus H'$. Подгруппа $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ является эпиморфным образом группы $\bigoplus_{i \in I_m} C_i$, и этот эпи-

морфизм f продолжается до эндоморфизма φ группы $G[p^m]$, причем H' имеет бесконечный индекс в $H' + \varphi(H')$. Полученное противоречие показывает, что подгруппа H конечна или соизмерима некоторой подгруппе $G[p^m]$. $\square$

Лемма 3 [9, свойство 5]. Пусть H — вполне инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, $\pi : G \rightarrow A$ и $\theta : G \rightarrow B$ — соответствующие проекции. Тогда подгруппа $H \cap A$ вполне инертна в A , подгруппы $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ и $\pi H \oplus \theta H$ соизмеримы с H , а если $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$, то подгруппа $H \cap A + \varphi(H \cap B)$ соизмерима с $H \cap A$.

Лемма 4 [10, лемма 7]. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ и $\pi_i : G \rightarrow G_i$ — соответствующие проекции. Тогда если H — вполне инертная подгруппа в G , то H имеет конечный индекс в подгруппе $\sum_{i \in I} \pi_i(H)$.

Теорема 2. Если G — периодическая группа, являющаяся прямой суммой циклических групп, то ее подгруппа H промежуточно инертна тогда и только тогда, когда H соизмерима с некоторой промежуточно вполне инвариантной подгруппой.

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. По лемме 2 почти все p -компоненты группы H промежуточно вполне инвариантны в G_p . Поэтому достаточно показать, что каждая не промежуточно вполне инвариантная p -компонента H_p соизмерима с некоторой промежуточно вполне инвариантной подгруппой. Пусть H_p — неограниченная редуцированная группа (см. предложение 6). Запишем G_p в виде $G_p = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_n$, где C_n — прямая сумма некоторого числа циклических групп порядка p^n . Ввиду лемм 1 и 4 можно считать, что $H_p = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (H_p \cap C_n)$. Допустим, что индекс подгруппы H_p в G_p бесконечен. Тогда выберем такие возрастающие последовательности натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots$ и $m_1 < m_2 < \dots$, что $H_p \cap C_{n_k} \neq C_{n_k}$, $n_k \neq m_s$ для всех $k, s \in \mathbb{N}$, причем подгруппа $H' = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} (H_p \cap C_{m_s})$ неограниченная. Если $x_{n_k} \in C_{n_k} \setminus H_p$, то $\{x_{n_k}\} \subseteq f(H')$ для некоторого гомоморфизма $f \in \text{Hom}(H', K)$, где $K = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} C_{n_k}$. Полагая $f|_K = 0$, имеем $f \in E(H' \oplus K)$, и индекс подгруппы H_p в $H_p + f(H_p)$ бесконечен; противоречие.

Достаточность. Пусть H соизмерима с *ифи*-подгруппой K . Тогда $H_p = K_p$ для почти всех p . Если $H_p \neq K_p$, то по предложению 5 $H_p = F_p \oplus C_p$, $K_p = F'_p \oplus C_p$, где подгруппы F_p и F'_p конечны. По лемме 1 подгруппа $C_p \leq K_p$ промежуточно инертна, поэтому по этой же лемме промежуточно инертна и подгруппа H_p . Ссылка на лемму 2 заканчивает доказательство. $\square$

Теорема 3. 1. Пусть $G = \bigoplus_{p \in \Pi} (D_p \oplus R_p)$ — периодическая группа, где D_p — делимая, а R_p — редуцированная части ее p -компоненты G_p . В группе G все вполне инвариантные подгруппы служат *ифи*-подгруппами тогда и только тогда, когда каждая R_p является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка, причем если $D_p \neq 0$, то $R_p = 0$.

2. В группе без кручения G все вполне инвариантные подгруппы служат *ифи*-подгруппами тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная часть R .

3. Пусть $G = A \oplus T$ — смешанная расщепляющаяся группа с периодической частью T . В группе G всякая вполне инвариантная подгруппа является *ифи*-

подгруппой тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы A и T , причем $pA = A$ для всякого простого числа p со свойством $pT_p \neq T_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. П. 1 сводится к случаю, когда G является p -группой. Итак, пусть $G = D \oplus R$ — p -группа, где D — делимая, а R — ее редуцированная часть.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Если $D, R \neq 0$, то для каждого натурального n подгруппа $D[p^n]$ вполне инвариантна в G , но не является вполне инвариантной подгруппой в $D[p^n] \oplus R$. Поэтому перейдем к группе R . В p -группе R ее подгруппа $R^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n R$ будет промежуточно инвариантной только в том случае,

когда R^1 совпадает с делимой частью группы R . Тем самым группа R сепарабельная. Если группа R неограниченная, то она имеет и неограниченные вполне инвариантные подгруппы, что противоречит теореме 1, согласно которой *ifi*-подгруппы группы R имеют вид $R[p^n]$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, R — ограниченная группа. Если элементы ее цоколя имеют разную высоту, то из примера 3 следует, что такая группа R содержит вполне инвариантные подгруппы, не являющиеся *ifi*-подгруппами.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. В делимой p -группе D всякая вполне инвариантная подгруппа имеет вид $D[p^n]$, $n \in \mathbb{N}$, и все они являются *ifi*-подгруппами. Если $D = 0$ и R — редуцированная p -группа, то по условию R — прямая сумма циклических групп фиксированного порядка p^n . Вполне инвариантные подгруппы такой группы имеют вид $R[p^m]$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m \leq n$, и все они являются *ifi*-подгруппами.

П. 2 следует из того, что если $N \neq 0$ — вполне инвариантная подгруппа в G , то $N = D \oplus (N \cap R)$, где D — делимая часть группы G .

3. НЕОБХОДИМОСТЬ. Поскольку $T \leq \text{ifi } G$, то T должна удовлетворять указанным свойствам. Если $pA \neq A$ и $pT_p \neq T_p$ для некоторого p , то по п. 1 T_p — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^n . Тогда $p^n A$ — вполне инвариантная подгруппа группы G , не являющаяся вполне инвариантной в группе $p^n A \oplus T_p$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть N — вполне инвариантная подгруппа в G . Тогда $N = (N \cap A) \oplus (N \cap T)$, где подгруппы $N \cap A$ и $N \cap T$ вполне инвариантны в A и в T соответственно. По условию $N \cap T \leq \text{ifi } T$. Так как $T \leq \text{si } G$, при условии $N \cap A = 0$ имеем $N \cap T = N \leq \text{ifi } G$. Если $N \cap A \neq 0$, то делимая часть группы G содержится в N ввиду инъективности. Если группа T делима, то $T \subseteq N$ и $N = (N \cap A) \oplus T \leq \text{ifi } G$. Если группа T не делима, то каждая ее неделимая p -компонента T_p есть редуцированная группа, при этом группа A p -делима, значит, p -делима и $N \cap A$. Отсюда следует, что образ всякого гомоморфизма $N \cap A \rightarrow T$ содержится в делимой части группы T , которая, как замечено выше, содержится в $N \cap T$. Поэтому по предложению 1 $N \leq \text{ifi } G$. $\square$

Заметим, что ввиду п. 1 теоремы 3 если в T вполне инвариантные подгруппы служат *ifi*-подгруппами и T — периодическая группа с конечным числом p -компонент, то T выделяется прямым слагаемым во всякой смешанной группе, в которой она служит периодической частью. Отметим, что в [14] изучались группы, все собственные вполне инвариантные подгруппы которых изоморфны, близкие вопросы рассматривались в [15]. Сильно инвариантные подгруппы изучались также в [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Călugăreanu G. Strongly invariant subgroups // Glasg. Math. J. 2015. V. 57, N 2. P. 431–443.
2. Чехлов А. Р. О прямой сумме неприводимых групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 798–800.
3. Чехлов А. Р. О вполне квазитранзитивных абелевых группах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1184–1192.
4. Chekhlov A. R., Danchev P. V. On commutator fully transitive Abelian groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 4. P. 623–647.
5. Chekhlov A. R., Danchev P. V. On projectively Krylov transitive and projectively weakly transitive Abelian p -groups // J. Group Theory. 2017. V. 20, N 1. P. 39–59.
6. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. Fully inert subgroups of divisible Abelian groups // J. Group Theory. 2013. V. 16, N 6. P. 915–939.
7. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar. 2014. V. 69, N 1. P. 69–78.
8. Goldsmith B., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of Abelian p -groups // J. Algebra. 2014. V. 419, N 1. P. 332–349.
9. Чехлов А. Р. Вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп конечного ранга и их соизмеримость // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2016. № 3. С. 42–50.
10. Чехлов А. Р. О вполне инертных подгруппах вполне разложимых групп // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 2. С. 302–312.
11. Беляев В. В. Инертные подгруппы в бесконечных простых группах // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 17–23.
12. Фомин А. А. Сервантно свободные группы // Абелевы группы и модули. Томск, 1986. С. 145–164.
13. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 2. С. 179–187.
14. Chekhlov A. R., Danchev P. V. On Abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 12. P. 5059–5073.
15. Kemoklidze T. Endomorphisms of a cotorsion hull and full transitivity // J. Math. Sci. 2016. V. 216, N 4. P. 558–563.
16. Чехлов А. Р. О сильно инвариантных подгруппах абелевых групп // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 1. С. 125–132.

Статья поступила 5 октября 2016 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru