Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 512.542

ЗАМЕЧАНИЯ О РАНГЕ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Л. Чжан, В. Го, А. Н. Скиба

Аннотация. Пусть G — конечная группа и $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$. Тогда G называется *σ-нильпотентной*, если $G = A_1 \times \dots \times A_r$, где A_i — σ_{i_j}-группа для некоторого $i_j = i_j(A_i)$. Множество $\mathscr{H}$ подгрупп из G называется *полным холловым σ-множеством* в G, если каждый член $\neq 1$ из $\mathscr{H}$ является холловой σ_i-подгруппой в G для некоторого $i \in I$ и $\mathscr{H}$ содержит в точности одну холлову σ_i-подгруппу из G для каждого такого i, что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing$. Подгруппа A из G называется *σ-квазинормальной* или *σ-перестановочной* [1] в G, если G содержит такое полное холлово σ-множество $\mathscr{H}$, что $AH^x = H^xA$ для всех $H \in \mathscr{H}$ и всякого $x \in G$. Символ $r(G)$ (соответственно $r_p(G)$) обозначает *ранг* (соответственно *p-ранг*) G.

Пусть $\mathscr{H}$ — полное холлово σ-множество из G. Доказано, что: (i) если G разрешима, $r(H) \leq r \in \mathbb{N}$ для всех $H \in \mathscr{H}$ и каждая n-максимальная подгруппа из G $(n > 1)$ σ-квазинормальна в G, то $r(G) \leq n + r - 2$; (ii) если каждый член из $\mathscr{H}$ разрешим и каждая n-минимальная подгруппа из G σ-квазинормальна в G, то G разрешима и $r_p(G) \leq n + r_p(H) - 1$ для всех $H \in \mathscr{H}$ и нечетных $p \in \pi(H)$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.519

Ключевые слова: конечная группа, p-ранг разрешимой группы, σ-квазинормальная подгруппа, n-максимальная подгруппа, n-минимальная подгруппа.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны, символ G обозначает конечную группу, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, и $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Группа G называется [1] *σ-примарной*, если G — σ_i-группа для некоторого i; *σ-нильпотентной*, если $G = A_1 \times \dots \times A_r$, где A_i — σ-примарная группа для всех $i = 1, \dots, r$; *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор из G σ-примарный.

Пусть $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{r-1} < G_r = G$ — *максимальная цепь*, т. е. G_{i-1} — максимальная подгруппа в G_i для всех $i = 1, \dots, r$. Если $n < r$, то член G_n называется *$(r-n)$-максимальной подгруппой* в G; если $n > 0$, то G_n называется *n-минимальной подгруппой* в G. 1-Максимальная подгруппа называется *максимальной подгруппой*, 1-минимальная подгруппа называется *минимальной подгруппой в G*.

Если G разрешима, то *ранг* G (обозначается символом $r(G)$) — это наибольшее целое число k такое, что G содержит главный фактор порядка p^k для некоторого простого числа p; если G p-разрешима, то *p-ранг* G (обозначается

The authors were supported by NNSF of China (Grant #11771409) and Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics of Chinese Academy of Sciences.

символом $r_p(G)$) — это наибольшее целое число k такое, что G содержит главный фактор порядка p^k (см. [2, VI, определение 5.2]).

Хупперт установил [3], что если каждая 2-максимальная подгруппа из G нормальна в G, то G сверхразрешима; если каждая 3-максимальная подгруппа из G нормальна в G, то G — разрешимая группа, ранг которой $r(G)$ не превышает двух. Первый из этих результатов был обобщен Агравалем [4] (см. также теорему 6.5 в [5, гл. 1]): *если каждая 2-максимальная подгруппа L из G S-квазинормальна в G* (т. е. $LP = PL$ для всех силовских подгрупп P из G [6, 7]), *то G сверхразрешима*. В множестве всех разрешимых групп отмеченные наблюдения Хупперта и некоторые похожие результаты из [8] представляют собой частные случаи следующего общего результата (Манн [9]): *если G разрешима и каждая n-максимальная подгруппа L из G ($n > 1$) квазинормальна* (т. е. L перестановочна со всеми подгруппами из G), *то $r(G) \leq n - 1$*.

Ввиду последнего отмеченного выше результата естествен следующий вопрос: *что можно сказать о ранге разрешимой группы G в случае, когда n-максимальные подгруппы из G перестановочны со всеми членами некоторых специальных систем подгрупп из G?*

Прежде чем продолжить, напомним некоторые определения.

Множество $\mathscr{H}$ подгрупп из G называется *полным холловым σ-множеством* в G [10], если каждый член $\neq 1$ из $\mathscr{H}$ является холловой σ_i-подгруппой в G для некоторого $i \in I$ и $\mathscr{H}$ содержит в точности одну холлову σ_i-подгруппу из G для каждого такого i, что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing$. Подгруппа A из G называется *σ-квазинормальной* или *σ-перестановочной* в G [1], если G содержит такое полное холлово σ-множество $\mathscr{H}$, что $AH^x = H^xA$ для всех $H \in \mathscr{H}$ и всякого $x \in G$.

Теорема 1.1. *Пусть G разрешима и каждая n-максимальная подгруппа из G ($n > 1$) σ-квазинормальна в G. Если $\mathscr{H}$ — полное холлово σ-множество из G и $r(H) \leq r \in \mathbb{N}$ для всех $H \in \mathscr{H}$, то $r(G) \leq n + r - 2$.*

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, из теоремы 1.1 получаем следствие, которое обобщает отмеченный выше результат из [9].

Следствие 1.2. *Пусть G разрешима и каждая n-максимальная подгруппа из G ($n > 1$) S-квазинормальна в G. Тогда $r(G) \leq n - 1$.*

Предложение 1.3. *Если каждая 2-максимальная подгруппа из G или каждая 3-максимальная подгруппа из G σ-квазинормальна в G, то G σ-разрешима.*

Отмеченный выше результат работы [4] является следствием предложения 1.3 и следствия 1.2.

Теорема 1.4. *Пусть G содержит такое полное холлово σ-множество $\mathscr{H}$, что каждый член из $\mathscr{H}$ разрешим. Если каждая n-минимальная подгруппа из G σ-квазинормальна в G, то G разрешима и $r_p(G) \leq n + r_p(H) - 1$ для всех $H \in \mathscr{H}$ и нечетных $p \in \pi(H)$.*

Заметим, что если G p-разрешима и $r_p(G) = 1$, то G p-сверхразрешима, следовательно, G' p-нильпотентна. Поэтому в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, из теоремы 1.4 получаем следующий факт.

Следствие 1.5 (Гашютц, Ито [2, IV, 5.7]). *Если каждая минимальная подгруппа из G нормальна в G, то G разрешима и коммутант G' группы G 2-замкнуто.*

Следствие 1.6 (Бакли [11]). *Если G имеет нечетный порядок и каждая минимальная подгруппа из G нормальна в G, то G сверхразрешима.*

В случае, когда $\sigma = \{\pi, \pi'\}$, из теоремы 1.4 также получаем следующий результат.

Следствие 1.7. *Пусть $G = AB$ — произведение сверхразрешимых групп A и B, где A — холлова π-подгруппа и B — холлова π'-подгруппа из G.*

(i) Если каждая минимальная подгруппа из G перестановочна со всеми холловыми π-подгруппами и со всеми холловыми π'-подгруппами из G и G имеет нечетный порядок, то G сверхразрешима.

(ii) Если каждая 2-минимальная подгруппа из G перестановочна со всеми холловыми π-подгруппами и со всеми холловыми π'-подгруппами из G, то G разрешима и $r_p(G) \leq 2$ для всех нечетных простых чисел p.

2. Доказательство теоремы 1.1

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.1. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $E \trianglelefteq G$. Если $E/E \cap \Phi(G)$ π-замкнутая, то E также π-замкнутая.*

Ниже понадобится следующая модификация одного из наблюдений работы Баера [12].

Лемма 2.2. *Пусть G — p-разрешимая группа и $R \leq O_p(G)$ — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда в G найдется такая подгруппа U, что $G = C_G(R)U$ и $R \cap U = 1$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Сначала предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда ввиду выбора G в $G/O_{p'}(G)$ существует такая подгруппа $U/O_{p'}(G)$, что

$$\begin{aligned} G/O_{p'}(G) &= C_{G/O_{p'}(G)}(RO_{p'}(G)/O_{p'}(G))(U/O_{p'}(G)) \\ &= (C_G(R)/O_{p'}(G))(U/O_{p'}(G) \end{aligned}$$

и $(RO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) \cap (U/O_{p'}(G)) = 1$. Следовательно, $G = C_G(R)U$ и $RO_{p'}(G) \cap U = O_{p'}(G)(R \cap U) \leq O_{p'}(G)$, откуда $R \cap U = 1$, что противоречит выбору G. Поэтому $O_{p'}(G) = 1$. Следовательно, $O_p(G) \nleq \Phi(G)$ по лемме 2.1. Но тогда $C_G(R) \nleq \Phi(G)$. Пусть U — минимальное добавление к $C_G(R)$ в G. Тем самым $U < G$ и R — минимальная нормальная подгруппа в RU. Поэтому если $R \cap U \neq 1$, то $R \leq U$, откуда ввиду выбора G получаем, что в U существует такая подгруппа U_0, что $U = C_U(R)U_0$ и $R \cap U_0 = 1$. Но тогда $G = C_G(R)U_0$, что противоречит выбору G. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть H, K и R — подгруппы из G, где H σ-квазинормальна в G и R нормальна в G.*

(1) *HR/R σ-квазинормальна в G/R.*

(2) *Если H является σ_i-подгруппой в G, то $O^{\sigma_i}(G) \leq N_G(H)$.*

(3) *Если $H \leq K$ и G σ-разрешима, то H σ-квазинормальна в K.*

(4) *$H \cap R$ σ-квазинормальна в R.*

(5) *Если $A \neq 1$ является холловой σ_i-подгруппой в G и H не является σ_i'-группой, то $A \cap H$ является холловой σ_i-подгруппой в H.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) следуют из лемм 2.8 и 3.1 в [1]. Утверждение (5) вытекает из теоремы В и леммы 2.6 в [1].

(4) Пусть $\mathscr{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ — полное холлово σ-множество из G такое, что $HA^x = A^xH$ для всех $A \in \mathscr{H}$ и всякого $x \in G$. Тогда $\{H_1 \cap R, \dots, H_t \cap R\}$ — полное холлово σ-множество из R, и если H_i — холлова σ_{i_k}-подгруппа в G, то $H_i \cap R$ — холлова σ_{i_k}-подгруппа в R. Более того,

$$HH_i^x \cap R = (H \cap R)\big(H_i^x \cap R\big) = (H \cap R)(H_i \cap R)^x = (H_i \cap R)^x(H \cap R)$$

для всех $x \in R$. Следовательно, $H \cap R$ σ-квазинормальна в R.

Лемма доказана.

Лемма 2.4 (см. теорему B в [13]). *Пусть G — σ-разрешимая группа. Если H — σ_i-подгруппа из G и E — холлова σ_i-подгруппа из G, то H содержится в некотором сопряжении к E.*

Лемма 2.5. *Пусть G — σ-разрешимая группа. Пусть $\mathscr{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ — полное холлово σ-множество из G. Если каждая максимальная подгруппа M из G с $G = MH_1$ σ-квазинормальна в G, то H_1 содержит нормальное дополнение в G.*

Доказательство. Если $t = 1$, то $G = H_1$, и утверждение леммы справедливо. Предположим, что $t > 1$. Пусть $\pi = \pi(H_1)$ и R — минимальная нормальная нормальная подгруппа из G. По лемме 2.3(1) условие леммы справедливо для G/R, поэтому G/R π'-замкнута по индукции. Тем самым можно предполагать, что R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $R \nleq O_{\pi'}(G)$ и ввиду леммы 2.1 $R \nleq \Phi(G)$. Поскольку G является σ-разрешимой группой, R — π-группа, поэтому $R \leq H_1$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $RM = G$. Тогда по условию леммы M σ-квазинормальна в G. Максимальность M влечет, что $H_2^x \leq M$ для всех $x \in G$. Следовательно, $H_2 \leq M_G = 1$, а это противоречит тому, что $t > 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 2.6. *Если G — p-разрешимая группа и $r_p(G) > n + r - 2$ для некоторых целых чисел $n > 1$ и $r > 0$, то G содержит такую n-максимальную подгруппу L и такую $(n-1)$-максимальную подгруппу R, что p делит $|G : L|$ и p делит $|G : R|$.*

Доказательство. Очевидно, что p делит $|G|$. Следовательно, G содержит такую максимальную подгруппу M, что $|G : M|$ — степень числа p. Поскольку $r_p(G) > r + n - 2$, каждый композиционный ряд $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$ из G содержит по крайней мере n различных факторов порядка p. Поэтому если $M = G_{m-1}$, то заключение леммы справедливо.

Предположим, что $O^p(G) = G$, и пусть $O = O^{p'}(G)$. Тогда $O < G$, и если O/V — простая группа, то $|O/V| = p$. Поэтому если O — k-максимальная подгруппа из G для некоторого $k < n - 1$, то для некоторой n-максимальной подгруппы L из G и некоторой $(n-1)$-максимальной подгруппы R из G получаем $L, R \leq V$, что и требовалось. Предположим, наконец, что для всякой максимальной цепи $O = M_0 < M_1 < \dots < M_m = G$ имеем $n - 1 \leq m$. Тогда ввиду изоморфизма $G/O = OM/O \simeq M/M \cap O$ получаем, что для некоторой n-максимальной подгруппы L и некоторой $(n-1)$-максимальной подгруппы R из G имеем $L, R \leq M$, что и требовалось. Лемма доказана.

Теорема 1.1 вытекает из следующего общего результата.

Теорема 2.7. *Пусть σ-разрешимая группа G содержит такое полное холлово σ-множество $\mathscr{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$, что $p \in \pi(H_1)$ и H_1 p-разрешима. Если* *каждая n-максимальная подгруппа H из G ($n > 1$) с $\pi(|G : H|) \cap \pi(H_1) \neq \varnothing$ σ-квазинормальна в G, то G p-разрешима и $r_p(G) \leq n + r_p(H_1) - 2$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда $t > 1$. Также очевидно, что G p-разрешима. Пусть $r = r_p(H_1)$ и $\pi = \pi(H_1)$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа из G.

(1) $r_p(G/R) \leq n + r - 2$.

Предположим, что $r_p(G/R) > n + r - 2$. Тогда p делит $|G/R|$, поэтому $\{H_1R/R, \dots, H_tR/R\}$ — полное холлово σ-множество из G/R такое, что $p \in \pi(H_1R/R)$, H_1R/R — p-разрешимая группа и ввиду [2, VI, 5.3(a)] $r_p(H_1R/R) \leq r$. Более того, G/R является σ-разрешимой группой и по лемме 2.6 содержит такую n-максимальную подгруппу L, что $\pi(|G : L|) \cap \pi \neq \varnothing$. Поэтому по лемме 2.3(1) условие теоремы справедливо для G/R. Выбор G влечет, что $r_p(G/R) \leq n + r_p(H_1R/R) - 2 \leq n + r - 2$; противоречие. Следовательно, приходим к (1).

(2) $O_{p'}(G) = 1$. Так как $|R| = p^m$ — степень числа p, имеем $R \leq H_1$ (поскольку $r_p(G/O_{p'}(G)) = r_p(G)$, данное утверждение следует из утверждения (1) и выбора G).

(3) $m > n + r - 2$. *В этом случае R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G.*

Заметим, что ввиду теоремы Жордана — Гёльдера, утверждения (1) и выбора G имеем $m > n + r - 2$. Если G содержит минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$, то $r_p(G/N) \leq n + r - 2$ по утверждению (1), поэтому ввиду G-изоморфизма $R \simeq RN/N$ получаем $m \leq n + r - 2$; противоречие. Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G.

(4) *Если M — собственная подгруппа в G, то $r_p(M) \leq n + r - 2$.*

Достаточно рассмотреть случай, когда M является максимальной подгруппой в G. Предположим, что $r_p(M) > n + r - 2$. Тогда p делит $|M|$ и M не имеет нормального π-дополнения (если M_π — холлова π-подгруппа в M и $M_{\pi'}$ — нормальное π-дополнение M, то по лемме 2.4 $M_\pi \leq H_1^x$, откуда $r_p(M_\pi) \leq r_p(H_1^x) \leq n + r - 2$ (см. [2, VI, 6.4(3)]). Поскольку $M_{\pi'} \trianglelefteq M$, то $M/M_{\pi'} \simeq M_\pi$, поэтому $r_p(M) \leq n + r - 2$; противоречие. Тем самым $n > 2$ ввиду лемм 2.3(3) и 2.5. Более того, по лемме 2.4 M содержит такое полное холлово σ-множество $\{M_1, \dots, M_t\}$, что $M_i = H_i \cap M$ для всех $i = 1, \dots, t$. Следовательно, $r_p(M_1) \leq r$ по [2, VI, 5.3(b)]. В силу лемм 2.2(3) и 2.6 M удовлетворяет условию теоремы с $n - 1$ вместо n, поэтому ввиду выбора G будет $r_p(M) \leq n - 1 + r_p(M_1) - 2 \leq n + r - 2$; противоречие. Следовательно, (4) доказано.

(5) $R \nleq \Phi(G)$.

Предположим, что $R \leq \Phi(G)$. Тогда для минимального добавления H к $C_G(R)$ в G имеем $H \cap R = 1$ по лемме 2.2, тем самым $RH \neq G$ и R — минимальная нормальная подгруппа в RH. Но из утверждения (4) вытекает, что $r_p(RH) \leq n + r - 2$, поэтому $m \leq n + r - 2$, что противоречит утверждению (3). Следовательно, получаем (5).

Заключительное противоречие. Поскольку G σ-разрешима, из утверждения (5) и леммы 2.4 следует, что в G найдется такая максимальная подгруппа M, что $G = RM$ и $H_2 \leq M$. Тогда $M_G = 1$ по утверждениям (3) и (5), поэтому $C_G(R) = C_G(R) \cap RM = R(C_G(R) \cap M) = R$. Пусть $H_2 = M_s$ —

член максимальной цепи $1 = M_l < M_{l-1} < \dots < M_1 < M_0 = M$ из M. Тогда R — l-максимальная подгруппа в G. Предположим, что $l > n-1$. Пусть также $H_2 \leq M_{n-1}$. По условию теоремы M_{n-1} σ-квазинормальна в G. Стало быть, $H_2^x \leq M_{n-1}$ для всякого $x \in G$ по лемме 2.3(5). Следовательно, $(H_2)^G \leq M_G = 1$, поэтому $H_2 = 1$; противоречие. Тогда $n \leq s$, т. е. для n-максимальной подгруппы $H = M_{n-1}$ из G, содержащейся в H_2, имеем $H \neq 1$. Снова применяя лемму 2.3(5), получаем $H^x \cap H_2 = H^x \leq H_2$. Тем самым $H \leq (H_2)_G \leq O_{\pi(H_2)}(G)$. Но $R \cap O_{\pi(H_2)}(G) = 1$, поскольку $R \leq H_1$, следовательно, $1 < H \leq O_{\pi(H_2)}(G) \leq C_G(R) = R$; противоречие.

Значит, $n-1 \leq l$, поэтому M содержит максимальную цепь $1 = M_k < M_{k-1} < \dots < M_1 < M_0 = M$, где $k < n$. Тогда R является k-максимальной подгруппой в G. Таким образом, каждая l-максимальная подгруппа из R является $(k+l)$-максимальной подгруппой в G. Пусть R_0 — минимальная нормальная подгруппа из H_1, содержащаяся в R, и $|R_0| = p^a$. Пусть L — $(n-k)$-максимальная подгруппа из R с $|L| = p^b$ такая, что $L \leq R_0$ в случае, если $b < a$, и $R_0 \leq L$, если $a \leq b$. Тогда L является n-максимальной подгруппой в G, поэтому L является σ-квазинормальной подгруппой в G.

Предположим, что $L \leq R_0$. Тогда

$$L^G = L^{H_1 N_G(L)} = L^{H_1} \leq (R_0)_G = R$$

по лемме 2.3(2). Следовательно, $R_0 = R$. Тогда $m = a \leq r$, откуда $m \leq r+n-2$, поскольку $n > 1$, что противоречит утверждению (3). Значит, $R_0 \leq L$, поэтому

$$R_0^G = R_0^{H_1 N_G(L)} = R_0^{N_G(L)} \leq L,$$

откуда $L = R$; противоречие. Теорема доказана.

3. Доказательство предложения 1.3

Напомним, что подгруппа A из G называется *σ-субнормальной* в G [1], если существует такая цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ σ-примарна для всех $i = 1, \dots, n$.

Лемма 3.1 (см. лемму 2.6 в [1]). *Пусть A, K и N — подгруппы из G. Предположим, что A σ-субнормальна в G и N нормальна в G. Тогда*

(1) *$A \cap K$ σ-субнормальна в K,*

(2) *AN/N σ-субнормальна в G/N,*

(3) *если A — σ_i-группа, то $A \leq O_{\sigma_i}(G)$.*

Поскольку каждая σ-квазинормальная подгруппа σ-субнормальна [1], предложение 1.3 является частным случаем следующего результата.

Предложение 3.2. *Если для всякой цепи $G_0 < G_1 < G_2 < G_3 = G$, где G_i — максимальная подгруппа в G_{i+1} для всех $i = 0, 1, 2$, одна из подгрупп G_0, либо G_1, либо G_2, σ-субнормальна в G, то G σ-разрешима.*

Доказательство. Предположим, что предложение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Прежде заметим, что если R — минимальная нормальная подгруппа в G, то G/R σ-разрешима. Действительно, если R — максимальная или 2-максимальная подгруппа в G, это очевидно. В противном случае условие предложения справедливо для G/R по лемме 3.1(2), поэтому выбор G влечет, что G/R σ-разрешима. Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Значит, $C_G(R) = 1$, и R не σ-примарна.

Пусть p — нечетное простое число, делящее $|R|$, и R_p — силовская p-подгруппа из R. Ввиду леммы Фраттини в G существует такая максимальная подгруппа M, что $N_G(R_p) \leq M$ и $G = RM$. Очевидно, что $M_G = 1$, поэтому M не σ-субнормальна в G, поскольку $G/M_G \simeq G$ не σ-примарна. Пусть $D = M \cap R$. Тогда R_p — силовская p-подгруппа в D.

(1) *D не нильпотентна. Следовательно, $D \nleq \Phi(M)$ и D не является p-группой.*

Предположим, что D нильпотентна. Тогда R_p нормальна в M. Следовательно, $Z(J(R_p))$ нормальна в M. Поскольку $M_G = 1$, то $N_G(Z(J(R_p))) = M$, поэтому $N_R(Z(J(R_p))) = D$ нильпотентна. Значит, R p-нильпотентна по теореме Глаубермана — Томпсона о нормальных p-дополнениях. Но тогда R является p-группой; противоречие. Следовательно, приходим к (1).

(2) $R < G$.

Пусть $R = G$ — простая неабелева группа. Предположим, что некоторая собственная неединичная подгруппа A из G σ-субнормальна в G. Тогда найдется такая цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ σ-примарна для всех $i = 1, \dots, t$. Не нарушая общности доказательства, можно предполагать, что $M = A_{n-1} < G$. Тогда $M_G = 1$, поскольку $G = R$ — простая группа, поэтому $G \simeq G/1$ σ-примарна; противоречие. Следовательно, каждая собственная σ-субнормальная подгруппа из G тривиальна.

Пусть P — силовская p-подгруппа из G, где p — наименьшее простое число, делящее $|G|$, и пусть L — максимальная подгруппа из G, содержащая P. Тогда ввиду [2, IV, 2.8] $|P| > p$. Пусть V — максимальная подгруппа из P. Если $|V| = p$, то P абелева, поэтому $P < L$ по [2, IV, 7.4]. Следовательно, в G существует такая 3-максимальная подгруппа W, что $V \leq W$. Но тогда некоторая собственная неединичная подгруппа из G σ-субнормальна в G по условию предложения; противоречие. Поэтому $|V| > p$, что снова влечет σ-субнормальность некоторой собственной неединичной подгруппы из G. Полученное противоречие показывает, что выполнено (2).

(3) *M σ-разрешима.*

Пусть $L < T < M$, где L — максимальная подгруппа из T и T — максимальная подгруппа из M. Поскольку M не σ-субнормальна в G, либо L, либо T σ-субнормальна в G, поэтому одна из этих подгрупп σ-субнормальна в M по лемме 3.1(1). Следовательно, условие предложения справедливо для M, поэтому M σ-разрешима ввиду выбора G.

(4) *$M = D \rtimes T$, где T — максимальная подгруппа простого порядка из M.*

Ввиду утверждения (1) в M найдется такая максимальная подгруппа T, что $M = DT$. Тогда $G = RM = R(DT) = RT$, поэтому ввиду утверждения (2) $T \neq 1$. Предположим, что $|T|$ не является простым числом, и пусть V — максимальная подгруппа из T. Поскольку M не σ-субнормальна в G, по крайней мере одна из подгрупп T или V σ-субнормальна в G по условию предложения. Утверждение (3) влечет, что группы V и T σ-разрешимы. Рассмотрим, например, случай, когда V σ-субнормальна в G. Так как $V \neq 1$ и V σ-разрешима, для некоторого i имеем $O_{\sigma_i}(V) \neq 1$. Но $O_{\sigma_i}(V) \leq O_{\sigma_i}(G)$ по лемме 3.1(3), поэтому R σ-примарна; противоречие. Следовательно, $|T|$ — простое число, откуда $M = D \rtimes T$.

Заключительное противоречие. Поскольку T — максимальная подгруппа в M и T циклическая, M разрешима (см. [2, IV, 7.4]), поэтому $|D|$ является простым числом, что противоречит (1). Предложение доказано.

4. Доказательство теоремы 1.4

Лемма 4.1. *Пусть $P \neq 1$ — нормальная p-подгруппа из G экспоненты p^e, где p — нечетное простое число. Предположим, что каждая подгруппа порядка p из P нормальна в G. Тогда каждый член ряда*

$$1 = \Omega_0(P) \leq \Omega_1(P) \leq \dots \leq \Omega_e(P) = P$$

нормален в G, $\Omega_{i+1}(P)/\Omega_i(P)$ — элементарная абелева группа и каждая подгруппа из $\Omega_{i+1}(P)/\Omega_i(P)$ нормальна в $G/\Omega_i(P)$ для всех $i = 0, 1, \dots, e-1$.

Доказательство. См. доказательство теоремы 2 из [11].

Лемма 4.2 (см. теорему B(i) из [1]). *Если подгруппа H из G σ-квазинормальна в G, то H σ-субнормальна в G.*

Теорема 1.4 вытекает из следующего общего результата.

Теорема 4.3. *Пусть G содержит такое полное холлово σ-множество $\mathscr{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$, что $p \in \pi(H_1) \setminus \{2\}$ и H_1 — p-разрешимая группа. Если каждая n-минимальная p-подгруппа из G σ-квазинормальна в G, то G p-разрешима и $r_p(G) \leq n + r_p(H_1) - 1$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть H_1 — σ_i-группа и $r = r_p(H_1)$. Пусть $D = O^{\sigma_i}(G)$. Пусть P — силовская p-подгруппа из D и R — минимальная нормальная подгруппа из G.

(1) $O_{p'}(G) = 1$. *В таком случае* $O_{p'}(D) = 1$ (поскольку $r_p(H_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G)) = r_p(H_1/H_1 \cap O_{p'}(G))$, утверждение следует из леммы 2.3(1) и выбора G).

(2) $n > 1$.

Предположим, что $n = 1$. Тогда по лемме 2.3(4) условие теоремы справедливо для каждой такой нормальной подгруппы E из G, что p делит $|E|$. Следовательно, каждая собственная нормальная подгруппа из G p-разрешима.

(a) *D p-разрешима. В этом случае G p-разрешима и $C_D(O_p(D)) \leq O_p(D)$.*

Предположим, что это не так. Тогда D не p-нильпотентна и $D = G$. Следовательно, всякая подгруппа порядка p из G нормальна в G по лемме 2.3(2). Из [2, IV, 5.4] следует, что G имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = H_p \rtimes H_q$, где H_p — силовская p-подгруппа из H экспоненты p и H_p — наименьшая нормальная подгруппа из H с нильпотентным фактором. Пусть $L = \langle a \rangle$ — подгруппа порядка p из H_p, где $a \in H_p \setminus \Phi(H_p)$. Тогда L нормальна в G, поэтому $H_p = L$ и $L \leq C_G(L) \neq G$. Значит, условие теоремы справедливо для $C_G(L)$, тем самым $C_G(L)$ p-разрешима. Следовательно, G p-разрешима, поскольку $G/C_G(L)$ циклична. Наконец, из утверждения (1) и [14, гл. 6, 3.2] имеем $C_D(O_p(D)) \leq O_p(D)$.

(b) *$P = O_p(D)$ и найдется такой главный ряд $1 = P_0 < P_1 < \dots < P_{l-1} < P_l = P$ из G ниже P, что каждая подгруппа из P_i/P_{i-1} нормальна в D/P_{i-1} для всех $i = 1, \dots, l$.*

Ввиду леммы 2.3(2) каждая подгруппа порядка p из D нормальна в D. По лемме 4.1 найдется такой главный ряд $1 = P_0 < P_1 < \dots < P_{l-1} < P_l = O_p(D)$ из G ниже $O_p(D)$, что каждая подгруппа из P_i/P_{i-1} нормальна в D/P_{i-1} для всех $i = 1, \dots, l$. Пусть $C = C_1 \cap \dots \cap C_l$, где $C_i = C_D(P_i/P_{i-1})$ для всех $i = 1, \dots, l$. Очевидно, что D/C_i — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$, поэтому D/C — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. С другой стороны, ввиду [14, гл. 5, 3.2] $C/C_D(O_p(D))$ — p-группа. Поэтому $C = O_p(G)$ по утверждению (a), следовательно, $D/O_p(D)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Из [5, гл. 1, 1.9] следует, что D сверхразрешима. Поскольку при этом $O_{p'}(D)=1$ по утверждению (1), $P=O_p(D)$.

Пусть H/K — главный фактор из G с $|H/K|=p^m$. Тогда $m\le r\le n+r-1$. Действительно, если $D\le K$, это следует из изоморфизма $G/D\simeq H_1/H_1\cap D$. Предположим теперь, что $H\le D$. Ввиду теоремы Жордана — Гёльдера, не нарушая общности доказательства, можно предполагать, что $P_{i-1}\le K<H\le P_i$ для некоторого i, поскольку $P=O_p(D)$. Поэтому если T/L — главный фактор из H_1 такой, что $K\le L<T\le H$, то L и T нормальны в G, поскольку $G=H_1D$ и L, T нормальны в D. Стало быть, $L=K$ и $T=H$, откуда снова получаем, что $m\le r$. Значит, $r_p(G)\le n+r-1$; противоречие. Следовательно, выполнено (2).

(3) $|R|=p^k$, *где* $k\le n+r-1$.

Пусть R_p — силовская p-подгруппа из R и $|R_p|=p^k$. Тогда $k>0$ по утверждению (1). Поэтому для некоторой n-минимальной p-подгруппы H из G имеем $R\cap H\ne 1$. Ввиду леммы 4.2 H σ-субнормальна в G, поэтому $H\le O_{\sigma_i}(G)$ по лемме 3.1(3). Тем самым $R\le O_{\sigma_i}(G)\le H_1$. Значит, R p-разрешима, откуда $R=R_p$ по (1).

Предположим, что $k>n+r-1$. Тогда $k>n$ и $k>r$. Поэтому если L — минимальная нормальная подгруппа из H_1, содержащаяся в R, и $|L|=p^l$, то $l<k$. Более того, поскольку $n<k$, в G существует такая n-минимальная p-подгруппа H, что $H<R$ и либо $L\le H$, либо $H\le L$. В первом случае получаем, что

$$L^G=L^{O^{\sigma_i}(G)H_1}=L^{O^{\sigma_i}(G)}\le H_G\le R$$

по лемме 2.3(2), поэтому $H_G=R$, откуда $H=R$. Полученное противоречие показывает, что $H\le L$. Тогда $H^G=H^{O^{\sigma_i}(G)H_1}\le L^{H_1}\le L_G$, поэтому $L_G=R$. Но тогда $L=R$, откуда $l=k$. Следовательно, имеет место (3).

(4) R *не циклическая.*

Предположим, что $|R|=p$. Пусть $R\le H$, где $|H|=p^n$. Тогда $R<H$ по утверждению (2). По лемме 2.3(1) подгруппа H/R является $(n-1)$-минимальной σ-квазинормальной подгруппой в G/R. Следовательно, G/R ввиду выбора G p-разрешима и $r_p(G)=r_p(G/R)\le n-1+r_p(H_1/R)-1$, где $r_p(H_1/R)=r_p(H_1)=r$. Тем самым G p-разрешима и $r_p(G)\le n+r-1$, что противоречит выбору G. Поэтому R не является циклической группой.

Заключительное противоречие. Покажем, что условие теоремы справедливо для G/R. Если $k<n$, это очевидно. Пусть $n\le k$. Утверждение (3) влечет, что R не является силовской p-подгруппой в H_1. Поэтому $\{H_1R/R,\dots,H_tR/R\}$ — полное холлово σ-множество из G/R такое, что $p\in\pi(H_1R/R)\setminus\{2\}$ и H_1R/R p-разрешима. Пусть $R\le K\le G$, где $|K:R|=p$. Пусть $a\in K\setminus R$ и $H=\langle a\rangle$. Тогда $|H|\le p^2$, поскольку R не циклическая по утверждению (4). Следовательно, ввиду утверждения (2) в K найдется такая n-минимальная p-подгруппа V, что $H\le V$, поэтому $K/R=HR/R=VR/R$ σ-квазинормальна в G/R по лемме 2.3(1). Тем самым каждая подгруппа порядка p из G/R σ-квазинормальна в G/R для $n=1$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G/R, так что G/R p-разрешима и $r_p(G/R)\le 1+r_p(H_1R/R)-1\le n+r-1$ ввиду выбора G. В силу утверждения (3) и теоремы Жордана — Гёльдера G p-разрешима и $r_p(G)\le n+r-1$; противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
3. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
4. *Agrawal R. K.* Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54. P. 13–21.
5. *Between nilpotent and solvable* / M. Weinstein etc., ed. Passaic NJ.: Polygonal Publ. House, 1982.
6. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010.
7. *Guo W.* Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg; Dordrecht; New York: Walter de Gruyter, 2015.
8. *Janko Z.* Finite groups with invariant fourth maximal subgroups // Math. Z. 1963. Bd 83. S. 82–89.
9. *Mann A.* Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal // Trans Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 395–409.
10. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. V. 4. P. 281–312.
11. *Buckley J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Bd 116. S. 15–17.
12. *Baer R.* Nilpotent characteristic subgroups of finite groups // J. Math. 1953. V. 75. P. 633–664.
13. *Skiba A. N.* A generalization of a Hall theorem // J. Algebra Appl. 2015. V. 15, N 4. P. 21–36.
14. *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper & Row Publ., 1968.

Статья поступила 26 июня 2017 г.

Li Zhang (Чжан Ли), Wenbin Guo (Го Веньбинь)
Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
zhang12@mail.ustc.edu.cn, wbguo@ustc.edu.cn

Скиба Александр Николаевич
Факультет математики и технологий программирования,
Гомельский гос. университет имени Франциска Скорины,
Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com