

УДК 517.54+519.216.22

О ДИНАМИКЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ СДВИГА С КАНТОРОВОЙ СТРУКТУРОЙ

Н. С. Аркашов, В. А. Селезнев

Аннотация. Для стационарных процессов, порожденных преобразованиями сдвига на самоподобных множествах, исследуются преобразования их спектральной плотности и устанавливается закон обмена энергии. Перенос энергии моделируется взаимодействием квазичастиц, представляющих упомянутые процессы, в гиперболической геометрии.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.502

Ключевые слова: самоподобные множества, мера Хаусдорфа, псевдоевклидово пространство, эффект Комптона, спектральная плотность, стационарный процесс.

1. Введение

Вопросы моделирования процессов переноса в сингулярных фазовых пространствах ставились в работах [1–4] и др., где исследовалось моделирование процессов переноса в сплошных средах с фрактальной структурой, рассматриваемых как подмножества нулевой лебеговой и некоторой ненулевой хаусдорфовой меры. В качестве инструмента моделирования в этих работах применялся аппарат дробного интегродифференциального исчисления.

В данной работе мы отходим от парадигмы, согласно которой процессы переноса моделируются в сплошных средах с фрактальной структурой. В построенной модели сингулярные фазовые пространства появляются как носители меры изменения энергии и импульса стационарных процессов сдвига. Строится преобразование спектральной плотности, которое оказывается изометрией гиперболической геометрии, и на основании этого преобразования выводится уравнение динамики для рассматриваемых процессов сдвига (см. предложение 4 и теорему 1).

Формат динамики в виде процессов сдвига на символьном пространстве возник в данной работе не случайно. Именно в этом формате исследовались свойства хаотичности и эргодичности динамических систем (см., например, [5]).

В работе отмечена аналогия построенной модели с эффектом Комптона (см., например, [6]). Эта аналогия основана на реализации процессов сдвига квазичастицами в гиперболической геометрии. В частности, уравнение динамики, на котором основано описание эффекта Комптона, совпадает с уравнением динамики для квазичастиц. Установлено, что преобразование процессов сдвига при «взаимодействии» с белым шумом происходит в определенном диапазоне мощности шума, а мерой потери энергии процесса сдвига является изменение хаусдорфовой размерности канторова континуума.

Данную работу можно рассматривать как частичное решение проблемы моделирования переноса импульса и энергии в сингулярных фазовых пространствах.

Структура работы. В разд. 2 устанавливается связь между преобразованиями сдвига на множествах с самоподобной структурой и некоторым классом стационарных процессов. В случае, когда множества с самоподобной структурой представляют собой канторовские множества на числовой прямой, для соответствующих им стационарных процессов выводится гиперболическое соотношение между спектральными плотностями этих процессов (см. предложение 4).

В разд. 3 устанавливается соответствие между вышеуказанным классом стационарных процессов и отображениями со значениями в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой.

В разд. 4 вводится понятие квазичастицы как некоторого класса стационарных процессов. Для таких квазичастиц устанавливаются динамические соотношения, аналогичные тем, что возникают при взаимодействии фотона с покоящимся электроном (эффект Комптона). Кроме того, приводится геометрическая модель потери энергии при взаимодействии квазичастиц.

В разд. 5 приводятся доказательства всех основных утверждений.

2. Преобразования сдвига и стационарные процессы

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ . На множестве подмножеств пространства X будем рассматривать семейство внешних мер Хаусдорфа $\{\mu^d\}_{d \geq 0}$ (см., например, [7]).

Отметим, что для любого множества $A \subseteq X$ существует такое $d_0 \in [0, +\infty]$, что $\mu^d(A) = 0$ при всех $d > d_0$ и $\mu^d(A) = +\infty$ при всех $d < d_0$ (см. теорему 6.1.6 в [8]). Число d_0 называется *хаусдорфовой размерностью* A . Хаусдорфову размерность множества A будем обозначать через $\dim(A)$.

Напомним, что отображение $T : X \rightarrow X$ называется *преобразованием подобия*, если существует положительное r такое, что $\rho(T(x), T(y)) = r\rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Если $r < 1$, то такое преобразование подобия называется *сжимающим преобразованием подобия*.

Выделим класс так называемых самоподобных множеств. Следуя [8], будем называть непустое компактное множество A *самоподобным*, если существуют такие сжимающие преобразования подобия $T_1, \dots, T_N$, что имеет место представление

$$A = \bigcup_{i=1}^N T_i(A),$$

при этом $\mu^{\dim(A)}(T_i(A) \cap T_j(A)) = 0$ для всех $i \neq j$.

В дальнейшем будем рассматривать класс самоподобных множеств $\mathcal{S}$ таких, что $\mu^{\dim(A)}(A) = 1$ для всех $A \in \mathcal{S}$.

Борелевскую σ -алгебру множеств в X будем обозначать через $\mathcal{B}$. Поскольку все представители класса $\mathcal{S}$ являются самоподобными, а следовательно, компактными множествами, имеем $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. Отметим, что сужение хаусдорфовой меры μ^d на $\mathcal{B}$ является борелевской мерой (см., например, [8]).

Зафиксируем $E \in \mathcal{S}$ такое, что $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$, где $T_1, \dots, T_N$ — сжимающие преобразования подобия с коэффициентом r .

Пространство последовательностей Σ на N элементах $\{1, 2, \dots, N\}$ определим как множество всех бесконечных последовательностей $\sigma_1\sigma_2\dots, \sigma_k \in \{1, 2, \dots, N\}, k = 1, 2, \dots$. Расстояние между $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ и $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$ определяется следующим образом: если $\sigma_1 \neq \tau_1$, то $d(\sigma, \tau) = 1$; если $\sigma_1 = \tau_1, \dots, \sigma_k = \tau_k$ и $\sigma_{k+1} \neq \tau_{k+1}$ для некоторого $k \geq 1$, то $d(\sigma, \tau) = r^k$; если $\sigma_k = \tau_k$ для всех $k \geq 1$, то $d(\sigma, \tau) = 0$. Пространство последовательностей (Σ, d) является метрическим пространством (см. [5, § 4.1; 8, § 4.2]). Пространство (Σ, d) будем называть *символьным пространством* (см., например, [9]).

Следующее предложение (см. теорему 4.2.3 в [8]) позволяет «кодировать» каждую точку из E некоторой последовательностью из символьного пространства.

Предложение 1. *Существует единственное непрерывное отображение $\Phi : (\Sigma, d) \rightarrow (E, \rho)$ такое, что для любого $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Sigma$ выполняется*

$$\Phi(\sigma) = T_{\sigma_1}(\Phi(\sigma_2\sigma_3\dots)).$$

Кроме того, $\Phi(\Sigma) = E$.

Заметим, что если $T_i(E) \cap T_j(E) = \emptyset$ для всех $i \neq j$, то Φ является гомеоморфизмом пространств (Σ, d) и (E, ρ) (см. [10]).

Отображение $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенное следующим образом:

$$S(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots) = \sigma_2\sigma_3\dots,$$

будем называть *преобразованием сдвига*.

В обозначении меры $\mu^{\dim(E)}(\cdot)$ в дальнейшем будем опускать верхний индекс.

Через $\mathcal{B}(E)$ будем обозначать σ -алгебру борелевских множеств в E , т. е. $\mathcal{B}(E) = \{B \cap E : B \in \mathcal{B}\}$.

Пусть B_0 — множество всех точек из E таких, что для каждого $x \in B_0$ прообраз $\Phi^{-1}(x)$ состоит из более чем одной точки (структура множества B_0 представлена в [10]). Отметим, что $\mu(B_0) = 0$ и $B_0 \in \mathcal{B}(E)$ (см. [10]). Выбрав в каждом из прообразов $\Phi^{-1}(x)$, $x \in B_0$, ровно одну любую точку, в итоге получим множество $\Sigma_{B_0} \subseteq \Phi^{-1}(B_0)$. Обозначим $\Phi^{-1}(E \setminus B_0)$ через $\Sigma_{E \setminus B_0}$ и $\Sigma_{B_0} \cup \Sigma_{E \setminus B_0}$ через Σ' . Отображение $\Phi : \Sigma' \rightarrow E$ взаимно однозначное (при этом заметим, что отображение Φ , действующее из $(\Sigma_{E \setminus B_0}, d)$ на $(E \setminus B_0, \rho)$, является гомеоморфизмом, см. [10]). Сужение отображения Φ на множество Σ' будем обозначать через Φ_0 .

Пополним σ -алгебру $\mathcal{B}(E)$, а именно обозначим через $\mathcal{B}^*(E)$ совокупность всех множеств вида $B \cup C$, где $B \in \mathcal{B}(E)$ и $C \subset B_0$. Очевидно, что $\mathcal{B}^*(E)$ является σ -алгеброй (см. [10]). Итак, $(E, \mathcal{B}^*(E), \mu)$ — пространство с мерой.

Рассмотрим отображение $\Pi = \Phi \circ S \circ \Phi_0^{-1} : E \rightarrow E$. Определим функцию $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $\nu(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sigma_1$. С помощью ν определим функцию $\eta : E \rightarrow \mathbb{R}$, положив $\eta(\omega) = \nu(\Phi_0^{-1}(\omega))$. Зададим последовательность функций $\xi_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 0$, следующим образом: $\xi_n(\omega) = \eta(\Pi^n(\omega))$. В предложении 2 утверждается, что функции $\xi_n : (E, \mathcal{B}^*(E), \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \geq 0$, измеримы, кроме того, μ является вероятностной мерой, поэтому в дальнейшем функции ξ_n будем называть *случайными величинами*.

Рассмотрим последовательность отображений $Z_n = \Pi^n : E \rightarrow E$, $n \geq 0$. Отметим, что отображение Z_n , $n \geq 0$, можно понимать как случайный элемент, действующий из вероятностного пространства $(E, \mathcal{B}^*(E), \mu)$ в $(E, \mathcal{B}^*(E))$.

Предложение 2. Функции $\xi_n : (E, \mathcal{B}^*(E), \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \geq 0$, измеримы. Случайные величины $(\xi_n)_{n \geq 0}$ независимые одинаково распределенные, при этом ξ_0 имеет равномерное распределение на множестве $\{1, 2, \dots, N\}$. Кроме того, для всех $\omega \in E \setminus B_0$ выполняется равенство

$$Z_n(\omega) = \Phi(\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), \dots). \quad (1)$$

Последовательность $(Z_n)_{n \geq 0}$ будем называть *процессом сдвига*. В дальнейшем при вычислении спектральных характеристик процесса $(Z_n)_{n \geq 0}$ будем использовать именно равенство (1) (верное с точностью до множества меры нуль).

Отметим следующее утверждение (см. [10]).

Предложение 3. Для почти всех $\omega \in E$ траектория точки ω (т. е. последовательность $(Z_n(\omega))$) всюду плотна в E .

Выделим из класса самоподобных множеств класс канторовских множеств $\{S_\alpha\}_{0 < \alpha < 1/2}$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$ пространства $(\mathbb{R}, \rho)$, где $\rho(x, y) = |x - y|$. Множество S_α определяется двумя преобразованиями подобия $T_1(x) = \alpha x + \alpha/2 - 1/2$ и $T_2(x) = \alpha x - \alpha/2 + 1/2$ такими, что $S_\alpha = T_1(S_\alpha) \cup T_2(S_\alpha)$ и $T_1(S_\alpha) \cap T_2(S_\alpha) = \emptyset$. Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $d = -\ln 2 / \ln \alpha$, при этом $\mu^d(K) = 1$, где μ^d — соответствующая мера Хаусдорфа (см., например, [9]). Множество $S_{1/3}$ — классическое канторово множество. Отметим, что множество $S_{1/2}$ совпадает с отрезком $[-1/2, 1/2]$. В дальнейшем E будем выбирать из класса множеств $\{S_\alpha\}_{0 < \alpha \leq 1/2}$.

Лемма 1. Отображение Φ пространства (Σ, d) на множество S_α , $0 < \alpha \leq 1/2$, имеет вид

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\sigma_{j+1} - 1) - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) выводим, что преобразование Z_n множества S_α можно представить в виде случайной величины

$$Z_{n,\alpha} = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\xi_{n+j}^{(\alpha)} - 1) - \frac{1}{2},$$

где $0 < \alpha \leq 1/2$, $(\xi_n^{(\alpha)})$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (индексом α будем подчеркивать, что случайные величины заданы на вероятностном пространстве $(S_\alpha, \mu_\alpha, \mathcal{B}^*(S_\alpha))$, напомним, что $\mu_\alpha = \mu^d$, $d = -\ln 2 / \ln \alpha$). Из предложения 2 следует, что $\mu_\alpha(\xi_0^{(\alpha)} = 1) = \mu_\alpha(\xi_0^{(\alpha)} = 2) = 1/2$.

Представим $Z_{n,\alpha}$ в виде

$$Z_{n,\alpha} = \frac{1 - \alpha}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{n+j}^{(\alpha)}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_n^{(\alpha)} = 2\xi_n^{(\alpha)} - 3$, и отметим, что $\mu_\alpha(\varepsilon_0^{(\alpha)} = -1) = \mu_\alpha(\varepsilon_0^{(\alpha)} = 1) = 1/2$. Последовательность $(\varepsilon_n^{(\alpha)})$, в частности, является *белым шумом*, т. е. последовательностью некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией.

Для каждого $1/2 < \alpha < 1$ рассмотрим последовательности вида (3)

$$\frac{1-\alpha}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{n+j}^{(\alpha)}, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

заданные на некоторых вероятностных пространствах, где $(\varepsilon_n^{(\alpha)})$ — последовательность, являющаяся белым шумом. Формально обозначим эти последовательности также через $(Z_{n,\alpha})$.

Отметим, что $(Z_{n,\alpha})_{n \geq 0}$ является стационарной последовательностью случайных величин (см., например, [11]).

Приведем следующий общий результат. Пусть (X_n) — стационарная последовательность случайных величин с нулевым средним. Напомним, что найдется такая конечная мера $G = G(\Delta)$ на $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$, что ковариационная функция $R(n) = \text{cov}(X_0, X_n)$ допускает спектральное представление (см., например, [11])

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} G(d\lambda).$$

Плотность меры G , если таковая существует, называется *спектральной плотностью*, обозначим ее через $g(\lambda)$. Отметим, что $R(0) = \mathbf{D}X_0 = \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda$.

Заметим, что спектральная плотность последовательности $(Z_{n,\alpha})$ (см. (3)) существует (см. ниже теорему 2).

Величину

$$E = \varsigma^2 \mathbf{D}X_0, \quad (5)$$

где ς — некоторая положительная константа, смысл которой разъяснится позже, будем интерпретировать как энергию процесса (X_n) (см. замечание 1), при этом $f(\lambda) = \varsigma^2 g(\lambda)$ является плотностью распределения энергии процесса по частотам, поскольку $E = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda$. Всюду в дальнейшем константу ς будем считать универсальной для всех встречающихся в данной работе процессов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сделаем некоторые пояснения приведенной интерпретации энергии процесса как величины, пропорциональной дисперсии этого процесса (см., например, [12, гл. 3, § 7]).

Рассмотрим некоторое вероятностное пространство, меру на нем обозначим через P . Пусть (X_n) — стационарная последовательность на этом пространстве. Существует такая ортогональная стохастическая мера $H = H(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$, что для каждого $n \geq 0$ (почти всюду относительно меры P)

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} H(d\lambda), \quad (6)$$

при этом $\mathbf{E}|H(\Delta)|^2 = G(\Delta)$ (см., например, [13]). Рассмотрим дискретное представление интеграла (6), а именно $X_n^{(d)} = \sum_k e^{i\lambda_k n} \Phi_k$, где $\Phi_k = H([\lambda_k, \lambda_{k+1}])$.

Процесс $(X_n^{(d)})_{n \geq 0}$ имеет своими составляющими элементарные гармонические колебания $e^{i\lambda_k n} \Phi_k$ со случайными амплитудами Φ_k . Как известно, полная энергия гармонических колебаний пропорциональна квадрату амплитуды этих колебаний. В этом смысле естественно, что $\mathbf{D}X_n^{(d)} = \sum_k \mathbf{E}|\Phi_k|^2$ интерпретируется как

энергия процесса $(X_n^{(d)})$ (с точностью до некоторой константы) и соответственно $\mathbf{D}X_n$ интерпретируется как энергия процесса (X_n) (с точностью до некоторой константы).

Для каждого $0 < \alpha < 1$ определим процесс $(Z_n^{(\alpha)} := \frac{2\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha} Z_{n,\alpha})_{n \geq 0}$, где случайная величина $Z_{n,\alpha}$ определена в (3) или (4). В дальнейшем будем рассматривать семейство

$$\Gamma = \left\{ \left(Z_n^{(\alpha)} = \sqrt{2\pi/\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{j+1} \varepsilon_{n+j}^{(\alpha)} \right)_{n \geq 0} : 0 < \alpha < 1 \right\}. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Почти для каждого $\omega \in E = S_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1/2$, (относительно меры μ_α) последовательность $(Z_n^{(\alpha)}(\omega))$ является всюду плотной на множестве $\frac{2\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha} \cdot S_\alpha$ (см. предложение 3).

Предложение 4. Пусть f_α и f_β — плотности энергии некоторых процессов из семейства Γ . Тогда при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\varsigma^2} (|f_\alpha(\lambda) - f_\beta(\lambda)| + \mu \varsigma^2)^2 - \left(\left(\frac{f_\alpha(\lambda)}{\varsigma} \right)^2 + \left(\frac{f_\beta(\lambda)}{\varsigma} \right)^2 - \frac{2\Delta f_\alpha(\lambda) f_\beta(\lambda)}{\varsigma^2} \right) = \mu^2 \varsigma^2, \quad (8)$$

где $\mu = \frac{\min\{\beta, \alpha\}}{1-\alpha\beta}$, $\Delta = \min\left\{\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}\right\}$. Кроме того, функция $|f_\alpha(\lambda) - f_\beta(\lambda)| + \mu \varsigma^2$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, является плотностью энергии стационарного процесса, заданного на некотором вероятностном пространстве

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi\alpha\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j} + \sqrt{2\pi\mu} \eta_n, \quad n \geq 0, \quad (9)$$

где $(\eta_n)_{n \geq 0}$ и $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ — некоррелируемые последовательности, являющиеся белым шумом, $d = \sqrt{(1-\Delta)/\mu}$ и $c_j = \sum_{k=0}^j (\max\{\alpha, \beta\})^{j-k+1} (\min\{\beta, \alpha\})^{k+1}$, $j \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что плотности энергии $|f_\alpha(\lambda) - f_\beta(\lambda)| + \mu \varsigma^2$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, где $\mu = \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{1-\alpha\beta}$, соответствует целый класс стационарных процессов. Через $(B_n^{(\alpha, \beta)})$ в дальнейшем будем обозначать некоторый представитель этого класса.

3. Представление стационарных процессов в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой

Рассмотрим гильбертово пространство вещественнозначных последовательностей $l_2 = \left\{ \vec{x} = (x_0, x_1, \dots) : \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\}$. Для всех $\vec{x}, \vec{y} \in l_2$ определены скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ и норма $\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

В пространстве l_2 определим также индефинитное скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \frac{1}{\varsigma^2} x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$, где ς — константа, определенная в (5). В дальнейшем

пространство l_2 с так определенным индефинитным скалярным произведением будем обозначать через l_2^i .

Введем в рассмотрение псевдоевклидово пространство $\mathcal{R}_{1,m}^{m+1} = \{\vec{u} = (u_0, \dots, u_m, 0, \dots, 0, \dots)\}$, являющееся подпространством пространства l_2^i .

Пусть $\vec{u} = (u_0, u_1, \dots) \in l_2^i$ — произвольный вектор. Определим отображения $\pi : l_2^i \rightarrow l_2$ и $\pi_0 : l_2^i \rightarrow \mathbb{R}$, положив для этого $\pi(\vec{u}) = (u_1, u_2, \dots)$ и $\pi_0(\vec{u}) = u_0$. В некоторых случаях координаты вектора $\vec{u}$ будем представлять в виде пары

$$\vec{u} = (\pi_0(\vec{u}), \pi(\vec{u})). \quad (10)$$

Лемма 2. Для любых $\vec{u}, \vec{w} \in \mathcal{R}_{1,m}^{m+1}$ таких, что $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$ и $\pi_0(\vec{u}) \neq \pi_0(\vec{w})$, выполняется равенство

$$\langle \vec{u} - \vec{w} + \mu \zeta^2 \vec{e}, \vec{u} - \vec{w} + \mu \zeta^2 \vec{e} \rangle = \mu^2 \zeta^2, \quad (11)$$

где $\vec{e} = (1, 0, 0, \dots)$, $\mu = \frac{\pi_0(\vec{u})\pi_0(\vec{w})(1-\cos\varphi)}{\zeta^2(\pi_0(\vec{u})-\pi_0(\vec{w}))}$, $\cos\varphi = \frac{(\pi(\vec{u}), \pi(\vec{w}))}{\|\pi(\vec{u})\| \cdot \|\pi(\vec{w})\|}$.

Введем обозначения.

I. Значение $\cos\varphi$ в лемме 2 будем обозначать через $\Delta(\vec{u}, \vec{w})$, кроме того, положим $\mu(\vec{u}, \vec{w}) := |\mu|$, где μ также определен в лемме 2.

II. Положим $\mu(\alpha, \beta) := \min\{\beta, \alpha\}/(1 - \alpha\beta)$ и $\Delta(\alpha, \beta) := \min\{\beta/\alpha, \alpha/\beta\}$. Отметим, что функции $\mu(\cdot, \cdot)$ и $\Delta(\cdot, \cdot)$ соответствуют параметрам μ и Δ в предложении 4.

В дальнейшем будет установлена связь между функциями $\Delta(\cdot, \cdot)$ (между функциями $\mu(\cdot, \cdot)$) векторных и скалярных аргументов (см. ниже предложения 5 и 6).

III. Класс всех отображений $u : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}_{1,m}^{m+1}$, удовлетворяющих равенству $\langle u(\lambda), u(\lambda) \rangle = 0$ при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$, будем обозначать через $\mathcal{K}_m$.

Пусть $d_1, d_2, \dots, d_m$, $m \geq 2$, — некоторые различные действительные числа такие, что $0 < d_1, d_2, \dots, d_m < 1$. Для каждого $i = 1, \dots, m$ рассмотрим случайный процесс $Z_n^{(d_i)} = \sqrt{2\pi/d_i} \sum_{j=0}^{\infty} d_i^{j+1} \varepsilon_{n+j}^{(d_i)}$, где $n \geq 0$, пусть f_{d_i} — плотность

энергии этого процесса. Каждой паре процессов $(Z_n^{(d_i)})$ и $(Z_n^{(d_j)})$ соответствуют значения $\Delta(d_i, d_j)$ и $\mu(d_i, d_j)$.

Обозначим $Z_m := \{(Z_n^{(d_i)}) : i = 1, \dots, m\}$.

Для двух отображений g и f , определенных на $[-\pi, \pi]$, будем писать $g \equiv f$, опуская аргумент и подразумевая, что $g(\lambda) = f(\lambda)$ при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Под обозначением $g \equiv f$ будем понимать, что отображение g определяется через отображение f .

Предложение 5. Существует отображение $Q : Z_m \rightarrow \mathcal{K}_m$ такое, что при всех $1 \leq i \leq m$ выполняются соотношения $\pi_0(Q(Z_n^{(d_i)})) \equiv f_{d_i}$. Кроме того, при всех $1 \leq i \neq j \leq m$ имеют место равенства $\Delta(Q(Z_n^{(d_i)}), Q(Z_n^{(d_j)})) \equiv \Delta(d_i, d_j)$ и $\mu(Q(Z_n^{(d_i)}), Q(Z_n^{(d_j)})) \equiv \mu(d_i, d_j)$.

Рассмотрим процесс $(Z_n^{(\beta)})$, $\beta \notin \{d_1, \dots, d_m\}$. Пусть f_β — плотность энергии процесса $(Z_n^{(\beta)})$. Обозначим $Z_{m+1} := Z_m \cup \{(Z_n^{(\beta)})\}$.

Предложение 6. Отображение Q может быть продолжено с Z_m на Z_{m+1} так, что $Q(Z_n^{(\beta)}) \in \mathcal{K}_{m+1} \setminus \mathcal{K}_m$, выполняется равенство $\pi_0(Q(Z_n^{(\beta)})) \equiv f_\beta$ и для

всех $i = 1, \dots, m$ имеют место соотношения $\Delta(Q(Z_n^{(\beta)}), Q(Z_n^{(d_i)})) \equiv \Delta(\beta, d_i)$ и $\mu(Q(Z_n^{(\beta)}), Q(Z_n^{(d_i)})) \equiv \mu(\beta, d_i)$.

3.1. Операции над векторами и процессами. Определим операцию $*$ над векторами $\vec{u}$ и $\vec{w}$, удовлетворяющими условиям леммы 2. Если $\pi_0(\vec{u}) > \pi_0(\vec{w})$, то

$$\vec{u} * \vec{w} := \vec{u} - \vec{w} + \mu \zeta^2 \vec{e}, \quad (12)$$

если $\pi_0(\vec{w}) > \pi_0(\vec{u})$, то

$$\vec{u} * \vec{w} := \vec{w} - \vec{u} + \mu \zeta^2 \vec{e},$$

где $\vec{e} = (1, 0, 0, \dots)$, $\mu = \mu(\vec{u}, \vec{w})$. Отметим, что $\vec{u} * \vec{w} = \vec{w} * \vec{u}$.

Через Z обозначим множество всех процессов сдвига, для которых определили отображение Q (соответственно выполняется утверждение предложения 5).

Далее, пусть $(Z_n^{(a)}) \in Z$. Обозначим $w := Q(Z_n^{(a)})$. Доопределим операцию $*$ для векторов $w(\lambda)$ и $w(\lambda)$. Для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]$ положим

$$w(\lambda) * w(\lambda) := \mu(a, a) \zeta^2 \vec{e}. \quad (13)$$

Прежде чем перейти к процессам, сформулируем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть f_α и f_β — плотности энергии некоторых процессов из класса Γ (см. (7)), при этом $\alpha > \beta$. Тогда при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство $f_\alpha(\lambda) > f_\beta(\lambda)$.

Рассмотрим семейство стационарных процессов $\Sigma = \{(B_n^{(\alpha, \beta)})_{n \geq 0} : 0 < \beta, \alpha < 1\}$, напомним, что каждый из процессов $(B_n^{(\alpha, \beta)})$ имеет плотность энергии $|f_\alpha(\lambda) - f_\beta(\lambda)| + \mu \zeta^2$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, где $\mu = \mu(\alpha, \beta)$ (см. предложение 4 и замечание 3).

Определим операцию $\star$ над процессами $(Z_n^{(\alpha)})$ и $(Z_n^{(\beta)})$. Положим

$$(Z_n^{(\alpha)}) \star (Z_n^{(\beta)}) := (B_n^{(\alpha, \beta)})$$

и отметим, что $(Z_n^{(\beta)}) \star (Z_n^{(\alpha)}) = (Z_n^{(\alpha)}) \star (Z_n^{(\beta)})$. Рассмотрим множество процессов

$$\mathcal{L} = Z \cup \{(Z_n^{(a)}) \star (Z_n^{(b)}) : (Z_n^{(a)}), (Z_n^{(b)}) \in Z\}.$$

Продолжим отображение Q с множества Z на $\mathcal{L}$. Пусть сначала $a \neq b$. Выполняются соотношения $\pi_0(Z_n^{(a)}) \equiv f_a$ и $\pi_0(Z_n^{(b)}) \equiv f_b$, при этом $f_a(\lambda) \neq f_b(\lambda)$ для всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$, поэтому определено $Q(Z_n^{(a)}) * Q(Z_n^{(b)})$ (см. (12) и лемму 3). Положим

$$Q((Z_n^{(a)}) \star (Z_n^{(b)})) := Q(Z_n^{(a)}) * Q(Z_n^{(b)}).$$

В случае, когда $a = b$, полагаем $Q((Z_n^{(a)}) \star (Z_n^{(a)})) := Q(Z_n^{(a)}) * Q(Z_n^{(a)})$ (см. соотношение (13)).

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, напомним, что процесс $(B_n^{(\alpha, \beta)})$ совпадает с $(Z_n^{(\alpha)}) \star (Z_n^{(\beta)})$.

Теорема 1. Пусть μ — произвольное положительное число, $\alpha \in [2\mu/(1 + \sqrt{1 + 4\mu^2}), 1)$ и $\beta = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\mu}}$. Пусть для процессов $(Z_n^{(\alpha)})$, $(Z_n^{(\beta)})$ определено отображение Q . Тогда выполняется равенство

$$\langle Q(B_n^{(\alpha, \beta)}), Q(B_n^{(\alpha, \beta)}) \rangle \equiv \mu^2 \zeta^2, \quad (14)$$

при этом $\pi_0(Q(B_n^{(\alpha,\beta)})) \equiv f_\alpha - f_\beta + \mu\varsigma^2$ и $\pi(Q(B_n^{(\alpha,\beta)})) \equiv \pi(Q(Z_n^{(\alpha)})) - \pi(Q(Z_n^{(\beta)}))$. Также имеет место соотношение

$$Q(Z_n^{(\alpha)}) + Q(B_n^{(e,e)}) \equiv Q(Z_n^{(\beta)}) + Q(B_n^{(\alpha,\beta)}), \quad (15)$$

где $e = 2\mu/(1 + \sqrt{1 + 4\mu^2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $0 < \alpha < 1$, μ — произвольное положительное действительное число. Пусть $\beta = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\mu}}$, тогда для всех $\alpha \in (2\mu/(1 + \sqrt{1 + 4\mu^2}), 1)$, и только для них, выполняется неравенство $\beta < \alpha$. Равенство $\alpha = \beta$ выполняется при $\alpha = 2\mu/(1 + \sqrt{1 + 4\mu^2})$.

Отметим, что если имеются два произвольных $0 < \beta < \alpha < 1$, то β представляется в виде $\frac{1}{\alpha + \frac{1}{\mu}}$, для этого достаточно взять $\mu = \beta/(1 - \alpha\beta)$.

Заметим, что $B_n^{(e,e)} = \sqrt{2\pi e/(1 - e^2)}\eta_n$, $n \geq 0$. Если $e = 2\mu/(1 + \sqrt{1 + 4\mu^2})$, то $e/(1 - e^2) = \mu$ (см. замечание 4).

В дальнейшем будем обозначать $B_n^{(\mu)} := \sqrt{2\pi\mu}\eta_n$, $n \geq 0$.

4. Квазичастицы

Семейство процессов $\Gamma = \{(Z_n^{(\alpha)})_{n \geq 0} : 0 < \alpha < 1\}$ назовем γ -квазичастицей, а семейство процессов $\Sigma(\mu) = \{(B_n^{(\alpha,\beta)})_{n \geq 0} : 0 < \alpha, \beta < 1, \mu(\alpha, \beta) = \mu\}$ — ε -квазичастицей с параметром μ . Будем говорить, что каждый процесс из этих семейств является состоянием соответствующей квазичастицы.

Рассмотрим процесс $B_n^{(\mu_0)} = \sqrt{2\pi\mu_0}\eta_n$, $n \geq 0$, где $\mu_0 > 0$. Поскольку $(B_n^{(\mu_0)})$ совпадает с $(B_n^{(\alpha,\alpha)})$ при $\alpha = 2\mu_0/(1 + \sqrt{1 + 4\mu_0^2})$, имеем $(B_n^{(\mu_0)}) \in \Sigma(\mu_0)$. Зафиксируем $d_0 \in (2\mu_0/(1 + \sqrt{1 + 4\mu_0^2}), 1)$ и вычислим

$$d_{-1} := \frac{1}{d_0 + \frac{1}{\mu_0}} \quad (16)$$

(отметим, что $d_0 > d_{-1}$, см. замечание 4). В соответствии с предложением 5 построим отображение $Q : Z_2 \rightarrow \mathcal{X}_2$, где $Z_2 = \{(Z_n^{(d_0)}), (Z_n^{(d_{-1})})\}$. Обозначим $f_0 := \pi_0(Q(Z_n^{(d_0)}))$, $f_{-1} := \pi_0(Q(Z_n^{(d_{-1})}))$ и $p_0 := \pi(Q(Z_n^{(d_0)}))$, $p_{-1} := \pi(Q(Z_n^{(d_{-1})}))$. Из теоремы 1 получаем, что $\pi_0(Q(B_n^{(d_0, d_{-1})})) \equiv f_0 - f_{-1} + \mu_0\varsigma^2$ и $\pi(Q(B_n^{(d_0, d_{-1})})) \equiv p_0 - p_{-1}$, кроме того, $\pi_0(Q(B_n^{(\mu_0)})) \equiv \mu_0\varsigma^2$ и $\pi(Q(B_n^{(\mu_0)})) \equiv \vec{0}$.

Представим отображения $Q(B_n^{(\mu_0)})$, $Q(Z_n^{(d_0)})$, $Q(Z_n^{(d_{-1})})$, $Q(B_n^{(d_0, d_{-1})})$ в виде пар (см. (10)) $(\mu_0\varsigma^2, \vec{0})$, (f_0, p_0) , (f_{-1}, p_{-1}) , $(f_0 - f_{-1} + \mu_0\varsigma^2, p_0 - p_{-1})$ соответственно. Первая компонента этих пар является плотностью распределения энергии процесса, представляющего состояние соответствующей квазичастицы. Второй компоненте придадим смысл плотности распределения импульса квазичастицы. Если у квазичастицы вторая (импульсная) компонента равна $\vec{0}$, то будем называть ее *покоящейся*. Заметим, что покоящейся может быть только ε -квазичастица.

Выполняется равенство (см. теорему 1)

$$Q(Z_n^{(d_0)}) + Q(B_n^{(\mu_0)}) \equiv Q(Z_n^{(d_{-1})}) + Q(B_n^{(d_0, d_{-1})}), \quad (17)$$

а также следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle Q(Z_n^{(d_0)}), Q(Z_n^{(d_0)}) \rangle &\equiv \langle Q(Z_n^{(d_{-1})}), Q(Z_n^{(d_{-1})}) \rangle \equiv 0, \\ \langle Q(B_n^{(\mu_0)}), Q(B_n^{(\mu_0)}) \rangle &\equiv \langle Q(B_n^{(d_0, d_{-1})}), Q(B_n^{(d_0, d_{-1})}) \rangle \equiv \mu_0^2\varsigma^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Равенство (17) объединяет в себе закон сохранения энергии и импульса взаимодействия γ -частицы и покоящейся ε -квазичастицы с параметром μ_0 . Кроме того, равенства (18) выражают аналог связи энергии и импульса в релятивистской механике (γ -квазичастица является аналогом фотона, а ε -квазичастица — аналогом некоторой частицы, обладающей массой покоя).

Результатом взаимодействия γ -квазичастицы, находящейся в состоянии $(Z_n^{(d_0)})$, с покоящейся ε -квазичастицей, находящейся в состоянии $(B_n^{(\mu_0)})$, являются изменение состояния γ -квазичастицы и переход ее в состояние $(Z_n^{(d-1)})$, при этом ε -квазичастица переходит в состояние $(B_n^{(d_0, d-1)})$.

Отметим, что динамические соотношения, возникающие при описании взаимодействия фотона с покоящимся электроном (эффект Комптона), аналогичны приведенным соотношениям (17) и (18) (см., например, [6, гл. 4]).

Далее, для d_{-1} выберем $\mu_{-1} > 0$ такое, что $d_{-1} \in (2\mu_{-1}/(1+\sqrt{1+4\mu_{-1}^2}), 1)$, и определим

$$d_{-2} = \frac{1}{d_{-1} + \frac{1}{\mu_{-1}}}. \quad (19)$$

Выполняется неравенство $d_{-1} > d_{-2}$. Как и ранее, квазичастицы, находящиеся в состоянии $(B_n^{(\mu_{-1})}) = \sqrt{2\pi\mu_{-1}\eta_n}$ и $(Z_n^{(d-1)})$, после взаимодействия изменяют свое состояние на $(B_n^{(d-2, d-1)})$ и $(Z_n^{(d-2)})$ соответственно. Отметим, что из предложения 6 следует, что отображение Q можно продолжить с Z_2 на $Z_3 = \{(Z_n^{(d_0)}), (Z_n^{(d-1)}), (Z_n^{(d-2)})\}$. Через f_{-2} обозначим плотность энергии процесса $(Z_n^{(d-2)})$.

Отображения $Q(B_n^{(\mu_{-1})})$, $Q(Z_n^{(d-1)})$, $Q(Z_n^{(d-2)})$, $Q(B_n^{(d-1, d-2)})$ представляем в виде пар $(\mu_{-1}\varsigma^2, \vec{0})$, (f_{-1}, p_{-1}) , (f_{-2}, p_{-2}) , $(f_{-1} - f_{-2} + \mu_{-1}\varsigma^2, p_{-1} - p_{-2})$ соответственно, где первая компонента пары энергетическая, а вторая — импульсная. Для отображений $Q(B_n^{(\mu_{-1})})$, $Q(Z_n^{(d-1)})$, $Q(Z_n^{(d-2)})$, $Q(B_n^{(d-1, d-2)})$ выполняются соотношения (17) и (18) с точностью до замены d_0 , d_{-1} , μ_0 на d_{-1} , d_{-2} , μ_{-1} соответственно.

Предложение 7. Для построенных параметров μ_{-1} и μ_0 выполняется неравенство $\mu_{-1} < \mu_0$.

Описанный процесс взаимодействия γ - и ε -квазичастиц можно продолжать сколь угодно большое число раз.

В итоге можем получить цепочку $(Z_n^{(d_0)}) \rightarrow (Z_n^{(d-1)}) \rightarrow (Z_n^{(d-2)}) \rightarrow \dots$ переходов γ -квазичастицы из одного состояния в другое. Из предложения 7 следует, что необходимым условием возникновения цепочки переходов γ -квазичастицы является появление на каждом следующем шаге ε -квазичастицы с параметром меньшим, чем на предыдущем шаге.

Замечание 5. Для каждого $i = 0, 1, \dots$ обозначим $h_i := 1/\mu_{-i}$ и $\psi_i(x) := \frac{1}{h_i + x}$, $x \in \mathbb{R}$. Имея в виду (16) и (19), значение d_{-k} , $k = 1, 2, \dots$, можно представить в виде композиции дробно-линейных преобразований

$$d_{-k} = \psi_{k-1} \circ \psi_{k-2} \circ \dots \circ \psi_0(d_0),$$

при этом из предложения 7 следует, что $h_{k-1} > h_{k-2} > \dots > h_0$.

Если при некотором $i_0 \geq 0$ окажется, что $d_{-i_0} \leq 1/2$, то при всех $i \geq i_0$ для почти всех ω множество $(Z_n^{(d-i)}(\omega))_{n \geq 0}$ всюду плотно в множестве Кантора $\frac{2\sqrt{2\pi d-i}}{1-d-i} \cdot S_{d-i}$ (см. замечание 2), размерность которого равна $-\frac{\ln 2}{\ln d-i}$,

$i = i_0, i_0 + 1, \dots$. Это означает, что с каждым переходом множество, на котором сосредоточены траектории процесса, становится менее плотным в том смысле, что размерность Хаусдорфа этого множества уменьшается, кроме того, уменьшается диаметр этого множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что $\lambda = 0$ является точкой максимума плотности энергии процессов $(Z_n^{(d_0)})$, $(Z_n^{(d-1)})$ и $(B_n^{(d_0, d-1)})$ (см. лемму 6 и соотношение (26)). Это означает, что в этих процессах преобладают «элементарные колебания» с параметрами λ , близкими к 0 (см. замечание 1). Взяв в соотношениях (17) и (18) значение $\lambda = 0$, получим классические динамические соотношения, возникающие при описании эффекта Комптона. В частности, последнее равенство в (18) примет вид

$$\frac{1}{\zeta^2}(f_0(0) + \mu_0 \zeta^2 - f_{-1}(0))^2 - \|p_0(0) - p_{-1}(0)\|^2 = \mu_0^2 \zeta^2,$$

при этом $\|p_0(0)\| = f_0(0)/\zeta$, $\|p_{-1}(0)\| = f_{-1}(0)/\zeta$ и $\cos \angle(p_0(0), p_{-1}(0)) = d_{-1}/d_0$.

5. Доказательство основных результатов

Предложение 8 [10, предложение 2]. Для любого множества $A \in \mathcal{B}^*(E)$ выполняется соотношение

$$\Pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}^*(E).$$

Лемма 4 [8, теорема 6.1.9]. Пусть $T : X \rightarrow X$ — преобразование подобия с коэффициентом r , пусть также d — действительное положительное число. Тогда $\mu^d(T(A)) = r^d \mu^d(A)$ для всех $A \subseteq X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Докажем, что ξ_n , $n \geq 0$, — измеримая функция, для этого достаточно доказать измеримость функции η (поскольку измеримость отображения Π сразу вытекает из предложения 8). Пусть j — произвольное число из множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Из определения η следует, что $T_j(E) \setminus B_0 \subseteq \{\omega : \eta(\omega) = j\} \subseteq T_j(E)$, откуда получаем, что $\{\omega : \eta(\omega) = j\} \in \mathcal{B}^*(E)$. Этим и завершается доказательство измеримости ξ_n .

Поскольку $E \in \mathcal{S}$, то $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$, где $T_1, \dots, T_N$ — сжимающие преобразования подобия с коэффициентом r и, кроме того, $\mu^{\dim(E)}(E) = 1$. Следовательно, используя лемму 4, получаем, что $\dim(E) = -\ln N / \ln r$. Стало быть, $\mu(T(A)) = \frac{1}{N} \mu(A)$ для любого $A \subseteq X$. Воспользовавшись этим фактом, найдем вероятность $\mu(\omega : \xi_{n_1}(\omega) = k_1, \dots, \xi_{n_m}(\omega) = k_m)$ (напомним, что верхний индекс $\dim(E)$ в обозначении меры $\mu^{\dim(E)}$ опускаем). Пусть для определенности $n_1 < n_2 < \dots < n_m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mu(\omega : \xi_{n_1}(\omega) = k_1, \dots, \xi_{n_m}(\omega) = k_m) \\ &= \mu \left(\bigcup_{i_1=1, \dots, i_{n_1-1}=1, \dots, i_{n_m-1}=1}^N (T_{i_1} \dots T_{i_{n_1-1}} T_{k_1} \dots T_{i_{n_m-1}} T_{k_m}(E)) \right) \\ &= \frac{1}{N^m} \sum_{i_1=1, \dots, i_{n_1-1}=1, \dots, i_{n_m-1}=1}^N \frac{1}{N^{n_m-m}} = \frac{1}{N^m}. \quad (20) \end{aligned}$$

В частности получаем, что $\mu(\omega : \xi_{n_j}(\omega) = k_j) = 1/N$, откуда и из (20) следуют независимость $(\xi_n)_{n \geq 0}$, а также равномерность распределения случайной величины ξ_0 на множестве $\{1, 2, \dots, N\}$.

Обозначим $\Phi^{-1}(E \setminus B_0)$ через $\Sigma_{E \setminus B_0}$. Покажем, что

$$S(\Sigma_{E \setminus B_0}) \subseteq \Sigma_{E \setminus B_0}. \quad (21)$$

Пусть существует последовательность $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma_{E \setminus B_0}$ такая, что $\tau := S(\sigma) \notin \Sigma_{E \setminus B_0}$. Тогда существует последовательность $\tau' = (\tau'_1, \tau'_2, \dots) \in \Phi^{-1}(\Phi(\tau))$ и $\tau \neq \tau'$. Рассмотрим последовательность $\sigma' = (\sigma_1, \tau'_1, \tau'_2, \dots)$. Из предложения 1 следует, что $\Phi(\sigma') = T_{\sigma_1} \circ \Phi(\tau') = T_{\sigma_1} \circ \Phi(\tau) = \Phi(\sigma)$; получаем противоречие, так как $\sigma \neq \sigma'$ и $\sigma \in \Sigma_{E \setminus B_0}$. Стало быть, имеет место (21). Следовательно, для всех $\omega \in E \setminus B_0$ выполняется равенство $\Pi^n(\omega) = \Phi \circ S^n \circ \Phi^{-1}(\omega)$, осталось заметить, что $S^n \circ \Phi^{-1}(\omega) = (\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), \dots)$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Покажем, что Φ , определенное в условии леммы, удовлетворяет предложению 1. Пусть сначала $\sigma_1 = 1$. Нужно доказать, что

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = T_{\sigma_1}(\Phi(\sigma_2, \sigma_3, \dots))$$

или, что то же самое,

$$q \cdot \left(\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \Phi(\sigma_2, \sigma_3, \dots). \quad (22)$$

Поскольку имеет место равенство

$$\Phi(\sigma_2, \sigma_3, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q-1}{q^{j+1}} (\sigma_{j+2} - 1) - \frac{1}{2},$$

сразу получаем (22). Аналогично рассматривается случай $\sigma_1 = 2$. Лемма доказана.

Отметим следующий общий результат (см. [11]).

Теорема 2. Спектральная плотность $g(\lambda)$ стационарной последовательности $(X_n)_{n \geq 0}$ существует тогда и только тогда, когда X_n получается с помощью скользящего суммирования, т. е. если

$$X_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varepsilon_{n+m},$$

где последовательность (ε_n) является белым шумом и (a_n) — неслучайная последовательность такая, что $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 < \infty$, при этом $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(\lambda)|^2$, где

$$\varphi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} a_m.$$

Лемма 5. Пусть (a_n) и (b_n) — последовательности суммируемых с квадратом действительных чисел таких, что для всех целых n сумма

$$c_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} b_m \quad (23)$$

существует и конечна, кроме того, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$. Пусть $g_a(\lambda)$ и $g_b(\lambda)$ — спек-

тральные плотности последовательностей $\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varepsilon_{n+m} \right)$ и $\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \varepsilon_{n+m} \right)$ соответственно.

Тогда спектральная плотность последовательности $\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \varepsilon_{n+m}\right)$ имеет вид $2\pi g_a(\lambda)g_b(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_a(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} a_m$, $\varphi_b(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} b_m$ и $\varphi_c(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} c_m$. Поскольку выражение (23) является сверткой последовательностей (a_n) и (b_n) , для всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$ выполняется соотношение $\varphi_c(\lambda) = \varphi_a(\lambda)\varphi_b(\lambda)$. Из теоремы 2 следует, что спектральная плотность $g_c(\lambda)$ последовательности $\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \varepsilon_{n+m}\right)$ равна $\frac{1}{2\pi} |\varphi_a(\lambda)\varphi_b(\lambda)|^2$. С другой стороны, $g_a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi_a(\lambda)|^2$ и $g_b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi_b(\lambda)|^2$, откуда и из найденного представления для g_c сразу получаем утверждение леммы.

Лемма 6. Спектральная плотность процесса $(Z_n^{(\alpha)})$ имеет вид

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что

$$\varphi(\lambda) = \sqrt{2\pi/\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\lambda m} \alpha^{m+1} = \sqrt{2\pi\alpha} \frac{1}{1 - \alpha e^{i\lambda}}.$$

Из того, что $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(\lambda)|^2$, сразу получаем утверждение леммы.

Лемма 7. Спектральные плотности g_α и g_β процессов $(Z_n^{(\alpha)})$ и $(Z_n^{(\beta)})$ соответственно связаны между собой дробно-линейным преобразованием

$$g_\beta(\lambda) = \frac{g_\alpha(\lambda)}{(1 - \beta/\alpha)((1 - \alpha\beta)/\beta)g_\alpha(\lambda) + 1}$$

при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6 следует, что $g_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda}$ и $g_\beta(\lambda) = \frac{\beta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \lambda}$. Исключая из этих двух равенств $\cos \lambda$, получаем утверждение леммы.

Лемма 8. Для спектральных плотностей g_α и g_β процессов $(Z_n^{(\alpha)})$ и $(Z_n^{(\beta)})$ соответственно при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$ выполняется соотношение

$$(g_\alpha(\lambda) + \mu - g_\beta(\lambda))^2 - (g_\alpha^2(\lambda) + g_\beta^2(\lambda) - 2(\beta/\alpha)g_\alpha(\lambda)g_\beta(\lambda)) = \mu^2, \quad (24)$$

где $\mu = \beta/(1 - \alpha\beta)$. Кроме того, если $\alpha \geq \beta$, то функция $g_\alpha(\lambda) + \mu - g_\beta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, является спектральной плотностью последовательности

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi\alpha\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j} + \sqrt{2\pi\mu} \eta_n, \quad n \geq 0, \quad (25)$$

где $(\eta_n)_{n \geq 0}$ и $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ — некоррелируемые последовательности, являющиеся белым шумом, $d = \sqrt{(1 - \beta/\alpha)/\mu}$ и $c_j = \sum_{k=0}^j \alpha^{j-k+1} \beta^{k+1}$, $j \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего непосредственно проверяется, что соотношение (24) эквивалентно соотношению, доказанному в лемме 7.

Пусть $\beta \leq \alpha$. Используя явный вид g_α и g_β (см. лемму 6), выводим, что для всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$ выполняется равенство

$$g_\alpha(\lambda) - g_\beta(\lambda) = d^2 g_\alpha(\lambda) g_\beta(\lambda). \quad (26)$$

Из леммы 5 следует, что $2\pi g_\alpha(\lambda) g_\beta(\lambda)$ — спектральная плотность процесса $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j}$. Тогда спектральной плотностью процесса

$$\frac{d}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j} \quad (27)$$

является правая часть соотношения (26). Спектральной же плотностью процесса $\sqrt{2\pi\mu\eta_n}$ будет μ , откуда и из (27) получаем, что $g_\alpha(\lambda) + \mu - g_\beta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, — спектральная плотность процесса, определенного в (25). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Из соотношения (26) следует, что $g_\alpha(\lambda) > g_\beta(\lambda)$ при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Осталось вспомнить, что $f_\alpha(\lambda) = \zeta^2 g_\alpha(\lambda)$ и $f_\beta(\lambda) = \zeta^2 g_\beta(\lambda)$ при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Рассмотрим случай $\alpha \geq \beta$ (противоположный случай рассматривается аналогично). Используя равенства $f_\alpha(\lambda) = \zeta^2 g_\alpha(\lambda)$ и $f_\beta(\lambda) = \zeta^2 g_\beta(\lambda)$, имеющие место при всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$, а также то, что в силу леммы 3 для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство $f_\alpha(\lambda) \geq f_\beta(\lambda)$, сразу получаем, что соотношение (8) эквивалентно соотношению (24).

Далее, поскольку $g_\alpha(\lambda) + \mu - g_\beta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, — спектральная плотность процесса, определенного в (25), то $f_\alpha(\lambda) + \mu\zeta^2 - f_\beta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, является плотностью энергии этого процесса. Подчеркнем, что в случае $\alpha \geq \beta$ процесс, определенный в (9), совпадает с процессом, определенным в (25). Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Обозначим $u_0 = \pi_0(\vec{u})$, $w_0 = \pi_0(\vec{w})$ и $\vec{p} = \pi(\vec{u})$, $\vec{q} = \pi(\vec{w})$. Из равенств $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$ получаем $\|\vec{p}\| = u_0/\zeta$ и $\|\vec{q}\| = w_0/\zeta$. Следовательно, равенство (11) можно переписать в эквивалентном виде:

$$(u_0 - w_0 + \mu\zeta^2)^2 - \left(\left(\frac{u_0}{\zeta} \right)^2 + \left(\frac{w_0}{\zeta} \right)^2 - 2 \cos \varphi \frac{u_0 w_0}{\zeta^2} \right) = \mu^2 \zeta^2, \quad (28)$$

где $\cos \varphi = \cos \angle(\vec{p}, \vec{q})$. Равенство (28) также перепишем в эквивалентном виде:

$$w_0 = \frac{u_0}{1 + (u_0/\mu\zeta^2)(1 - \cos \varphi)}. \quad (29)$$

Подставляя в (29) значения

$$\cos \varphi = \frac{(\pi(\vec{u}), \pi(\vec{w}))}{\|\pi(\vec{u})\| \cdot \|\pi(\vec{w})\|}, \quad \mu = \frac{\pi_0(\vec{u})\pi_0(\vec{w})(1 - \cos \varphi)}{\zeta^2(\pi_0(\vec{u}) - \pi_0(\vec{w}))}$$

(см. условие леммы 2), получаем верное равенство. Лемма доказана.

Конечномерное подпространство $\{\vec{u} = (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0, \dots) : (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m\}$ пространства l_2 будем обозначать через $\mathcal{R}^m$.

Пусть $d_1, d_2, \dots, d_m$, $m \geq 2$, — различные действительные числа такие, что $0 < d_1, d_2, \dots, d_m < 1$. В дальнейшем будем считать, что $d_1 < d_2 < \dots < d_m$.

Лемма 9. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_m$ — определенные выше действительные числа. Тогда можно построить базис в $\mathcal{R}^m$, состоящий из m ортов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ таких, что $(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = d_i/d_j$, $1 \leq i < j \leq m$.

Доказательство. Пусть координатное представление вектора $\vec{y}_k$ имеет вид $(y_k^{(1)}, \dots, y_k^{(m)}, 0, \dots)$. В качестве $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ можно взять следующие векторы:

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 &= (1, 0, \dots, 0, \dots), \quad \vec{y}_2 = (d_1/d_2, \sqrt{1 - d_1^2/d_2^2}, 0, \dots, 0, \dots), \\ \vec{y}_k &= (y_{k-1}^{(1)}d_{k-1}/d_k, \dots, y_{k-1}^{(k-1)}d_{k-1}/d_k, \sqrt{1 - d_{k-1}^2/d_k^2}, 0, \dots, 0, \dots), \quad k = 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Лемма 10. Пусть $Y = \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m\}$ и $Z = \{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m\}$ — две системы линейно независимых ортов в $\mathcal{R}^{m+1}$ такие, что $(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = (\vec{z}_i, \vec{z}_j)$ для всех i, j . Тогда существует ортогональное преобразование пространства $\mathcal{R}^{m+1}$ такое, что $S(\vec{y}_i) = \vec{z}_i$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. Построим векторы $\vec{y}_{m+1}$ и $\vec{z}_{m+1}$, ортогональные системам Y и Z соответственно. Получим системы векторов $Y' = \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m+1}\}$ и $Z' = \{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{m+1}\}$, являющиеся базисами в пространстве $\mathcal{R}^{m+1}$. Существует невырожденное линейное преобразование $S : \mathcal{R}^{m+1} \rightarrow \mathcal{R}^{m+1}$ такое, что $S(\vec{y}_i) = \vec{z}_i$ для всех $i = 1, \dots, m+1$. По условию $(S(\vec{y}_i), S(\vec{y}_j)) = (\vec{y}_i, \vec{y}_j)$ для всех i, j , откуда выводим, что линейное преобразование S сохраняет скалярное произведение. Следовательно, преобразование S ортогонально.

Доказательство предложения 5. Построим m ортов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ в пространстве $\mathcal{R}^m$, удовлетворяющих лемме 9. Для каждого $i = 1, \dots, m$ определим отображение $w_i : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}_{1,m}^{m+1}$ по формуле $w_i(\lambda) = (f_{d_i}(\lambda), \frac{f_{d_i}(\lambda)}{\varsigma} \vec{y}_i)$. Очевидно, что для всех $i = 1, \dots, m$ выполняется равенство $\langle w_i, w_i \rangle \equiv 0$. Кроме того, непосредственно из определения функции $\Delta(\cdot, \cdot)$ получаем соотношение $\Delta(w_i, w_j) \equiv (\vec{y}_i, \vec{y}_j)$. Из построения ортов $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ следует, что $(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = d_i/d_j$, поэтому $\Delta(w_i, w_j) \equiv d_i/d_j$.

Покажем, что $\mu(w_i, w_j) \equiv \mu(d_i, d_j)$ при всех $i < j$. Прежде всего выполняется равенство $\mu(w_i, w_j) \equiv \frac{f_{d_i} f_{d_j} (1 - d_i/d_j)}{\varsigma^2 (f_{d_j} - f_{d_i})}$ (см. обозначение I после формулировки леммы 2). Из явных выражений для f_{d_i} и f_{d_j} (см. лемму 6) выведем соотношение $f_{d_j} - f_{d_i} \equiv \varsigma^{-2} (1 - d_i/d_j) ((1 - d_i d_j)/d_i) f_{d_i} f_{d_j}$. Следовательно, $\mu(w_i, w_j) \equiv d_i/(1 - d_i d_j)$, но правая часть последнего равенства совпадает с $\mu(d_i, d_j)$.

Далее, для каждого $i = 1, \dots, m$ положим $Q(Z_n^{(d_i)}) \equiv w_i$. Предложение доказано.

Доказательство предложения 6. Построим те же орты $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$, что и в предложении 5. Положим $d_0 = 0$ и $d_{m+1} = 1$. Пусть $\beta \in (d_{k-1}, d_k)$ при некотором $1 \leq k \leq m+1$. Перенумеровав в порядке возрастания β , $d_1, \dots, d_m$, получим набор $\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_{m+1}$. В соответствии с леммой 9 построим $m+1$ ортов $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_{m+1}$, являющихся базисом в $\mathcal{R}^{m+1}$, таких, что $(\vec{z}_i, \vec{z}_j) = \delta_i/\delta_j$, $i < j$. Далее, положим $\vec{x}_i := \vec{z}_i$ для всех $i = 1, \dots, k-1$ и $\vec{x}_{i-1} := \vec{z}_i$ для всех $i = k+1, \dots, m+1$. Стало быть, $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = d_i/d_j$, $1 \leq i < j \leq m$. Из леммы 10 следует, что существует ортогональное преобразование S пространства $\mathcal{R}^{m+1}$ такое, что $S(\vec{x}_i) = \vec{y}_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда вектор $\vec{z} := S(\vec{z}_k)$ является ортом,

удовлетворяющим условиям: $(\vec{z}, \vec{y}_i) = \beta/d_i$ при всех $i = k, \dots, m$ и $(\vec{z}, \vec{y}_j) = d_j/\beta$ при всех $j = 1, \dots, k-1$.

Определим отображение $u : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}_{1,m+1}^{m+2}$, положив

$$u(\lambda) := \left(f_\beta(\lambda), \frac{f_\beta(\lambda)}{\varsigma} \vec{z} \right).$$

В силу построения для отображения u выполняются следующие соотношения: $\Delta(w_i, u) \equiv \Delta(\beta, d_i)$ и $\mu(w_i, u) \equiv \mu(d_i, \beta)$ при всех $i = 1, \dots, m$ (отображения w_i , $i = 1, \dots, m$, определены в предложении 5). Доопределим отображение Q , положив $Q(Z_n^{(\beta)}) \equiv u$, и в итоге получим утверждение предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть μ — произвольное положительное действительное число и $\alpha \in [2\mu/(1 + \sqrt{1 + 4\mu^2}), 1)$. Тогда $\beta = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\mu}} \leq \alpha$. Из предыдущего равенства получаем $\mu = \beta/(1 - \alpha\beta)$. Это означает, что мы находимся в условиях предложения 4. Выполняются равенства $\|\pi(Q(Z_n^{(\alpha)}))\| \equiv f_\alpha/\varsigma$ и $\|\pi(Q(Z_n^{(\beta)}))\| \equiv f_\beta/\varsigma$, кроме того, $\Delta(Q(Z_n^{(\alpha)}), Q(Z_n^{(\beta)})) \equiv \Delta(\alpha, \beta)$ и $\mu(Q(Z_n^{(\alpha)}), Q(Z_n^{(\beta)})) \equiv \mu(\alpha, \beta)$. Далее, отметим, что $\Delta(\alpha, \beta) = \beta/\alpha$ и $\mu(\alpha, \beta) = \mu$ (см. замечание 4). Из определения отображения Q на процессе $(B_n^{(\alpha, \beta)})$ получаем

$$\pi_0(Q(B_n^{(\alpha, \beta)})) \equiv f_\alpha - f_\beta + \mu\varsigma^2, \quad (30)$$

$$\pi(Q(B_n^{(\alpha, \beta)})) \equiv \pi(Q(Z_n^{(\alpha)})) - \pi(Q(Z_n^{(\beta)})). \quad (31)$$

Поэтому соотношение (14) эквивалентно соотношению (8), верному при любых $\lambda \in [-\pi, \pi]$, тем самым соотношение (14) доказано.

Выполняются равенства $\pi_0(Q(B_n^{(e, e)})) \equiv \mu\varsigma^2$ и $\pi(Q(B_n^{(e, e)})) \equiv \vec{0}$. Используя эти равенства, а также равенства (30) и (31), получаем

$$\pi_0(Q(Z_n^{(\alpha)})) + \pi_0(Q(B_n^{(e, e)})) \equiv \pi_0(Q(Z_n^{(\beta)})) + \pi_0(Q(B_n^{(\alpha, \beta)})),$$

$$\pi(Q(Z_n^{(\alpha)})) + \pi(Q(B_n^{(e, e)})) \equiv \pi(Q(Z_n^{(\beta)})) + \pi(Q(B_n^{(\alpha, \beta)})).$$

Из последних двух соотношений выводим (15). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Так как $d_0 \in (2\mu_0/(1 + \sqrt{1 + 4\mu_0^2}), 1)$, выполняется следующее очевидное неравенство:

$$d_{-1} = \frac{1}{d_0 + 1/\mu_0} < \frac{2\mu_0}{1 + \sqrt{1 + 4\mu_0^2}}. \quad (32)$$

Далее, μ_{-1} выбрано так, что $d_{-1} \in (2\mu_{-1}/(1 + \sqrt{1 + 4\mu_{-1}^2}), 1)$, следовательно, из (32) получаем $2\mu_{-1}/(1 + \sqrt{1 + 4\mu_{-1}^2}) < 2\mu_0/(1 + \sqrt{1 + 4\mu_0^2})$. Поскольку функция $2x/(1 + \sqrt{1 + 4x^2})$ возрастающая на $[0, +\infty)$, стало быть, $\mu_{-1} < \mu_0$. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
2. Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физ. наук. 2004. Т. 174, № 8. С. 819–852.

3. Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
4. Учайкин В. В. Автомоделная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876.
5. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
6. Вихман Э. Квантовая физика. М.: Наука, 1977.
7. Халмош П. Теория меры. М.: Мир, 1953.
8. Edgar G. Measure, topology, and fractal geometry. New York: Springer-Verl., 2008.
9. Falconer K. Fractal geometry mathematical foundations and applications. London: Wiley, 2008.
10. Аркашов Н. С. Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 163–173.
11. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
12. Розанов Ю. А. Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
13. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 14 января 2016 г.

Аркашов Николай Сергеевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск 630073;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
nicky1978@mail.ru

Селезнев Вадим Александрович
Новосибирский гос. технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск 630073
selvad@ngs.ru