

УДК 514.75

О НОРМАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ЯКОБИ НА CR -ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМАХ КЕНМОЦУ

Р. Абди, Э. Абеди

Аннотация. Изучаются CR -гиперповерхности конформного пространства типа Кенмоцу для ξ -параллельного оператора Якоби. Дан пример трехмерного конформного многообразия Кенмоцу, не являющегося многообразием Кенмоцу.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.601

Ключевые слова: многообразие Кенмоцу, конформное многообразие Кенмоцу, конформная пространственная форма Кенмоцу.

1. Введение

Пусть (M^{2n}, J, g) — $2n$ -мерное эрмитово многообразие, где J и g — его комплексная структура и эрмитова метрика соответственно. Тогда (M^{2n}, J, g) — локально конформное кэлерово многообразие, если имеются открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ многообразия M^{2n} и семейство $\{f_i\}_{i \in I}$ гладких функций $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что каждая локальная метрика $g_i = \exp(-f_i)g|_{U_i}$ кэлерова. Здесь $g|_{U_i} = \iota_i^* g$, где $\iota_i : U_i \rightarrow M^{2n}$ — отображение включения. Кроме того, (M^{2n}, J, g) — глобально конформное кэлерово многообразие, если существует C^∞ -функция $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что метрика $\exp(f)g$ кэлерова [1]. Локально конформные кэлеровы многообразия впервые были исследованы Либерманном в 1955 г. [2]. В [3] Вайсман ввел геометрическое условие того, что локально конформное кэлерово многообразие кэлерово, а в 1982 г. в [4] Тричерри привел различные примеры. В 2001 г. в [5] М. Б. Банару успешно классифицировал 16 классов почти эрмитовых многообразий с использованием так называемых тензоров Кириченко. В [6] исследованы свойства этих тензоров. Класс локально конформных кэлеровых многообразий представляет собой один из 16 классов локально конформных кэлеровых многообразий (см., например, [7, 8]). Подмногообразия локально конформных кэлеровых многообразий изучались несколькими авторами (см., например, [9–11]). В [12] Кенмоцу ввел класс контактных метрических пространств, названных многообразиями Кенмоцу.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 наводятся некоторые предварительные определения. Затем дается пример конформного многообразия Кенмоцу, не являющегося многообразием Кенмоцу. В § 3 содержатся предварительные леммы о подмногообразиях конформных многообразий Кенмоцу, касательных к ξ . В § 4 доказано, что CR -гиперповерхность конформной пространственной формы Кенмоцу $M(c)$, нормальная к векторному полю Ли с ξ -параллельным нормальным оператором Якоби или ξ -параллельным в левом

смысле нормальным оператором Якоби, тотально омбилическая. Также доказывается, что не существует CR -гиперповерхностей конформной пространственной формы Кенмоцу $M(c)$ ($c \neq -1$), касательных к векторному полю Ли с ξ -параллельным нормальным оператором Якоби.

2. Конформные многообразия Кенмоцу

$(2n+1)$ -Мерное дифференцируемое многообразие M называется *почти контактным метрическим многообразием*, если оно допускает почти контактную метрическую структуру (φ, ξ, η, g) , состоящую из тензорного поля φ типа $(1, 1)$, векторного поля ξ , 1-формы η и римановой метрики g и удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\varphi^2 = -\text{Id} + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

для любых векторных полей X, Y на M . Из этих уравнений имеем

$$\varphi\xi = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(X) = g(X, \xi), \quad g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) = 0$$

для любых векторных полей X, Y на M (см. [13, 14]).

Почти контактное метрическое многообразие $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ называется *многообразием Кенмоцу*, если на M выполняется соотношение

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X, \quad (2.1)$$

где ∇ — риманова связность метрики g . Из (2.1) имеем

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi. \quad (2.2)$$

Пусть M — многообразие Кенмоцу. Плоское сечение в $T_m M$ называется φ -сечением, если существует вектор $X \in T_m M$, ортогональный к ξ и такой, что сечение натянуто на $\{X, \varphi X\}$. Секционная кривизна $K(X, \varphi X)$, обозначаемая символом s , называется φ -голоморфной секционной кривизной. Многообразие Кенмоцу M постоянной φ -голоморфной секционной кривизны s называется *пространственной формой Кенмоцу* и обозначается символом $M(c)$. Следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы M имело постоянную φ -голоморфную секционную кривизну s :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \frac{c-3}{4}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & + \frac{c+1}{4}\{[\eta(X)Y - \eta(Y)X]\eta(Z) + [\eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z)]\xi \\ & + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y - 2g(\varphi X, Y)\varphi Z\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к M , где R — тензор кривизны многообразия M (см. [12]).

$(2n+1)$ -Мерное гладкое многообразие M с почти контактной метрической структурой (φ, η, ξ, g) называется *конформным многообразием Кенмоцу*, если найдется положительная гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\tilde{g} = \exp(f)g, \quad \tilde{\xi} = (\exp(-f))^{\frac{1}{2}}\xi, \quad \tilde{\eta} = (\exp(f))^{\frac{1}{2}}\eta, \quad \tilde{\varphi} = \varphi$$

— структура Кенмоцу на M [15, 16]. Кроме того, M называется *конформным пространством Кенмоцу*, если оно является пространством Кенмоцу с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$, и обозначается символом $M(c)$.

Пусть M — конформное многообразие Кенмоцу и $\tilde{\nabla}$ и ∇ — римановы связности M относительно метрик $\tilde{g}$ и g соответственно.

Риманова связность ∇ метрики g задается формулой

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \quad (2.4)$$

известной как *формула Кошуля*. Используя (2.4) и равенство $\tilde{g} = \exp(f)g$, получаем следующее соотношение между $\tilde{\nabla}$ и ∇ :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\{\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp\} \quad (2.5)$$

для любых векторных полей X, Y на M , где $\omega(X) = g(\text{grad } f, X) = X(f)$. Заметим, что векторное поле $\omega^\sharp = \text{grad } f$ называется *векторным полем Ли* на конформном многообразии Кенмоцу M .

Пусть $\tilde{R}$ и R — тензоры кривизны многообразий $(M, \varphi, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ и $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ соответственно. Тогда соотношение между $\tilde{R}$ и R задается формулой

$$\begin{aligned} \exp(-f)\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &+ \frac{1}{2}\{B(X, Z)g(Y, W) - B(Y, Z)g(X, W) + B(Y, W)g(X, Z) - B(X, W)g(Y, Z)\} \\ &+ \frac{1}{4}\|\omega^\sharp\|^2\{g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

для всех векторных полей X, Y, Z, W на M , где

$$B := \nabla\omega - \frac{1}{2}\omega \otimes \omega. \quad (2.7)$$

Очевидно, что B — симметрический тензор. С другой стороны, из равенств (2.1), (2.2) и (2.5) имеем

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)Y &= (\exp(f))^{\frac{1}{2}}\{-g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\} \\ &- \frac{1}{2}\{\omega(\varphi Y)X - \omega(Y)\varphi X + g(X, Y)\varphi\omega^\sharp - g(X, \varphi Y)\omega^\sharp\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\nabla_X \xi = (\exp(f))^{\frac{1}{2}}\{X - \eta(X)\xi\} - \frac{1}{2}\{\omega(\xi)X - \eta(X)\omega^\sharp\} \quad (2.9)$$

для любых векторных полей X, Y на M .

2.1. Пример. Построим пример конформного многообразия Кенмоцу, не являющегося многообразием Кенмоцу. Рассмотрим трехмерное многообразие $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ с линейно независимыми векторными полями

$$e_1 = x \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = -(\exp(x))^{\frac{1}{2}} x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Пусть g — риманова метрика, заданная формулами

$$g(e_1, e_2) = g(e_1, e_3) = g(e_2, e_3) = 0, \quad g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = \exp(-x), \quad g(e_3, e_3) = 1.$$

Пусть η — 1-форма, определенная равенствами

$$\eta(e_3) = 1, \quad \eta(e_2) = 0, \quad \eta(e_1) = 0.$$

Определим поле $(1, 1)$ -тензоров φ соотношениями $\varphi e_1 = e_2$, $\varphi e_2 = -e_1$ и $\varphi e_3 = 0$. Используя линейность φ и g , получаем

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)e_3, \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

для всех X, Y на M . Таким образом, для $e_3 = \xi$ ввиду определения почти контактного метрического многообразия (φ, ξ, η, g) определяет почти контактную метрическую структуру на M . С другой стороны, имеем

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = (\exp(x))^{\frac{1}{2}} e_1, \quad [e_2, e_3] = (\exp(x))^{\frac{1}{2}} e_2.$$

Используя формулу Кошуля (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= 0, \quad \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2}(\exp(x))^{\frac{1}{2}}(x+2)e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = -\frac{1}{2}(\exp(-x))^{\frac{1}{2}}(x+2)e_3, \\ \nabla_{e_2} e_3 &= \frac{1}{2}(\exp(x))^{\frac{1}{2}}(x+2)e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1}{2}(\exp(-x))^{\frac{1}{2}}(x+2)e_3, \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0, \\ \nabla_{e_3} e_3 &= 0, \quad \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2}(\exp(x))^{\frac{1}{2}} x e_2, \quad \nabla_{e_3} e_1 = \frac{1}{2}(\exp(x))^{\frac{1}{2}} x e_1. \end{aligned}$$

В силу конформного преобразования

$$\tilde{g} = \exp(x)g, \quad \tilde{\xi} = (\exp(-x))^{\frac{1}{2}} \xi, \quad \tilde{\eta} = (\exp(x))^{\frac{1}{2}} \eta, \quad \tilde{\varphi} = \varphi$$

$(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ есть многообразие Кенмоцу (см. [17]). Значит, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ — конформное многообразие Кенмоцу, не являющееся многообразием Кенмоцу, поскольку

$$(\nabla_X \varphi)Y \neq -g(X, \varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

для всех векторных полей X, Y на M (например, $(\nabla_{e_2} \varphi)e_1 \neq -g(e_2, \varphi e_1)\xi - \eta(e_1)\varphi e_2$). В силу полученных выше результатов можем легко получить, что

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_2 &= -\frac{1}{4}(x+2)^2 e_1, \quad R(e_2, e_3)e_3 = -\exp(x)e_2, \\ R(e_1, e_2)e_3 &= 0, \quad R(e_1, e_3)e_3 = -\exp(x)e_1, \\ R(e_3, e_1)e_1 &= -e_3, \quad R(e_3, e_2)e_1 = 0, \quad R(e_3, e_1)e_2 = 0, \\ R(e_2, e_1)e_1 &= -\frac{1}{4}(x+2)^2 e_2, \quad R(e_3, e_2)e_2 = -e_3. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что

$$K(X, e_3) = -\exp(x), \quad K(X, Y) = -\frac{1}{4}\exp(x)(x+2)^2$$

для всех векторных полей X, Y , ортогональных e_3 . Заметим, что $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ является многообразием Кенмоцу постоянной φ -голоморфной секционной кривизны -1 [17].

3. Подмногообразия конформных многообразий Кенмоцу

Пусть $(\dot{M}, \dot{g})$ — m -мерное подмногообразие в $(2n+1)$ -мерном конформном многообразии Кенмоцу (M, g) . Формулы Гаусса и Вейнгартена имеют вид

$$\nabla_X Y = \dot{\nabla}_X Y + h(X, Y), \quad \nabla_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N$$

для всех векторных полей X, Y , касательных к $\dot{M}$, и нормального векторного поля N на $\dot{M}$, где $\dot{\nabla}$ — риманова связность на $\dot{M}$, определяемая индуцированной метрикой $\dot{g}$, и $\nabla^\perp$ — нормальная связность на $T^\perp \dot{M}$ многообразия $\dot{M}$. Известно, что $g(h(X, Y), N) = \dot{g}(AX, Y)$, где A называется оператором формы на $\dot{M}$ относительно нормального векторного поля N .

В данной статье полагаем, что поле ξ касательно к $\dot{M}$.

Лемма 3.1. Пусть $\dot{M}$ — подмногообразие конформного многообразия Кенмоцу M , нормальное к $\omega^\sharp$. Тогда

$$B(X, Y) = -\omega(h(X, Y)), \quad (3.1)$$

$$h(X, \xi) = \frac{1}{2}\eta(X)\omega^\sharp, \quad (3.2)$$

$$\dot{\nabla}_X \xi = (\exp(f))^{\frac{1}{2}}\{X - \eta(X)\xi\} \quad (3.3)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к $\dot{M}$.

Доказательство. Из (2.7) следует, что

$$B(X, Y) = (\nabla_X \omega)Y - \frac{1}{2}\omega(X)\omega(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}\omega(X)\omega(Y)$$

для всех X, Y , касательных к $\dot{M}$. Поскольку $\omega^\sharp$ нормальна к $\dot{M}$, приведенное выше уравнение можно переписать в виде

$$B(X, Y) = -\omega(\nabla_X Y)$$

для всех X, Y на $\dot{M}$. Применение формулы Гаусса дает (3.1).

Полагая в формуле Гаусса $Y = \xi$ и используя (2.9), имеем

$$\dot{\nabla}_X \xi + h(X, \xi) = \nabla_X \xi = (\exp(f))^{\frac{1}{2}}\{X - \eta(X)\xi\} - \frac{1}{2}\{\omega(\xi)X - \eta(X)\omega^\sharp\}$$

для каждого X , касательного к $\dot{M}$. Так как $\omega^\sharp$ нормально к $\dot{M}$, сравним касательную и нормальную составляющие в приведенном выше уравнении и придем к соотношениям (3.2) и (3.3). $\square$

Лемма 3.2. Пусть $\dot{M}$ — подмногообразие конформного многообразия M , касательное к $\omega^\sharp$. Тогда

$$B(X, Y) = \dot{g}(\dot{\nabla}_X \omega^\sharp, Y) - \frac{1}{2}\omega(X)\omega(Y), \quad (3.4)$$

$$h(X, \xi) = 0, \quad (3.5)$$

$$\dot{\nabla}_X \xi = (\exp(f))^{\frac{1}{2}}\{X - \eta(X)\xi\} - \frac{1}{2}\{\omega(\xi)X - \eta(X)\omega^\sharp\} \quad (3.6)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к $\dot{M}$.

Доказательство. Так же, как и в лемме 3.1, соотношения (3.4)–(3.6) немедленно получаются из (2.7), (2.9) и формулы Гаусса. $\square$

4. CR -гиперповерхности с ξ -параллельным нормальным оператором Якоби

В этом разделе рассмотрим CR -гиперповерхности конформной пространственной формы Кенмоцу. Напомним, что в разд. 2 дан пример конформной пространственной формы Кенмоцу.

m -Мерное риманово подмногообразие $\dot{M}$ конформной пространственной формы Кенмоцу M называется CR -подмногообразием [18], если ξ касательно к $\dot{M}$ и существует дифференцируемое распределение $D : x \in \dot{M} \rightarrow D_x \subset T_x \dot{M}$ такое, что

(1) распределение D_x инвариантно относительно φ , т. е. $\varphi(D_x) \subset D_x$ для любого $x \in \dot{M}$;

(2) дополнительное ортогональное распределение $D^\perp : x \in \dot{M} \longrightarrow D_x^\perp \subset T_x \dot{M}$ к распределению D антиинвариантно относительно φ , т. е. $\varphi D_x^\perp \subset T_x^\perp \dot{M}$ для всех $x \in \dot{M}$, где $T_x \dot{M}$ и $T_x^\perp \dot{M}$ — касательное и нормальное пространства к $\dot{M}$ в точке x соответственно.

Предположим, что $\dot{M}$ — гиперповерхность в конформной пространственной форме Кенмоцу M такой, что векторное поле ξ принадлежит касательному расслоению к $\dot{M}$. Пусть $\dot{g}$ — индуцированная метрика на $\dot{M}$. Пусть также N — единичное нормальное векторное поле к $\dot{M}$. Положим $\varphi N = -U$. Ясно, что U — единичное касательное векторное поле на $\dot{M}$. Обозначим символом $D^\perp = \text{span}\{U, \xi\}$ двумерное распределение, порожденное U, ξ , и символом D — ортогональное дополнение к $D^\perp$ в $T\dot{M}$. Таким образом, имеем следующие разложения:

$$TM = D \oplus D^\perp \oplus \text{span}\{N\}, \quad (4.1)$$

$$T\dot{M} = D \oplus D^\perp, \quad (4.2)$$

значит, $\dot{M}$ — CR -гиперповерхность в M .

Пусть $\dot{M}$ — CR -гиперповерхность в конформной пространственной форме Кенмоцу M . Обозначим символами ∇ и $\dot{\nabla}$ риманову связность многообразия M и индуцированную риманову связность на $\dot{M}$ соответственно. Применяя (4.1) и (4.2), перепишем формулы Гаусса и Вейнгартена в виде

$$\nabla_X Y = \dot{\nabla}_X Y + h(X, Y), \quad \nabla_X N = -AX$$

для всех векторных полей X, Y , касательных к $\dot{M}$, где A — оператор формы многообразия $\dot{M}$ относительно единичного нормального векторного поля N . Известно, что $h(X, Y) = \dot{g}(AX, Y)N$ для любых векторных полей X, Y на $\dot{M}$.

Обычным образом, используя (2.3) и (2.6), выводим уравнения Кодацци

$$\begin{aligned} (\dot{\nabla}_X A)Y - (\dot{\nabla}_Y A)X &= \frac{c+1}{4} \exp(f) \{ \dot{g}(X, U)\varphi Y - \dot{g}(Y, U)\varphi X \\ &\quad - 2g(\varphi X, Y)U \} + \frac{1}{2} \{ B(X, N)Y - B(Y, N)X \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к $\dot{M}$.

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Оператор Якоби R_X определяется для каждого векторного поля X в точке $x \in M$ формулой

$$(R_X Y)(x) = (R(Y, X)X)(x)$$

для любого векторного поля Y , ортогонального X в точке $x \in M$. Оператор Якоби становится самосопряженным эндоморфизмом касательного пространства к многообразию M , где R — тензор кривизны многообразия (M, g) .

Нормальный оператор Якоби R_N [19] для нормального векторного поля N на CR -гиперповерхности $\dot{M}$ в конформной пространственной форме Кенмоцу M может быть получен из (2.3) и (2.6), если положить $Y = N$ и $Z = N$. Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{g}(R_N(X), Y) &= \exp(f) \left\{ \frac{c-3}{4} \dot{g}(X, Y) - \frac{c+1}{4} (\eta(X)\eta(Y) - 3\dot{g}(X, U)\dot{g}(Y, U)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ B(N, N)\dot{g}(X, Y) + B(X, Y) \} + \frac{1}{4} \|\omega^\sharp\|^2 \dot{g}(X, Y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

для любых векторных полей X, Y на $\dot{M}$.

Получаем следующие результаты.

Теорема 4.1. Пусть $\dot{M}$ — CR -гиперповерхность на конформной пространственной форме Кенмоцу $M(c)$, нормальная к $\omega^\sharp$ с ξ -параллельным нормальным оператором Якоби. Тогда $\dot{M}$ вполне омбилическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\omega^\sharp$ ортогонально $\dot{M}$, полагаем $\omega^\sharp = N$. Тогда из (2.7) следует, что

$$B(N, N) = -\frac{1}{2}, \quad (4.5)$$

$$B(X, N) = 0 \quad (4.6)$$

для всякого векторного поля X , касательного к $\dot{M}$. Используя соотношения (3.1) и (4.5) в (4.4), получаем

$$R_N(X) = \exp(f) \left\{ \frac{c-3}{4}X - \frac{c+1}{4}(\eta(X)\xi - 3\dot{g}(X, U)U) \right\} - \frac{1}{2}AX \quad (4.7)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. Беря ковариантную производную от равенства (4.7) и используя ее, имеем

$$\begin{aligned} (\dot{\nabla}_\xi R_N)X &= \dot{\nabla}_\xi R_N X - R_N \dot{\nabla}_\xi X = -\exp(f) \frac{c+1}{4} \{ \dot{g}(X, \dot{\nabla}_\xi \xi)\xi + \dot{g}(X, \xi)\dot{\nabla}_\xi \xi \\ &\quad - 3\dot{g}(X, \dot{\nabla}_\xi U)U - 3\dot{g}(X, U)\dot{\nabla}_\xi U \} - \frac{1}{2}(\dot{\nabla}_\xi A)X \end{aligned} \quad (4.8)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. Из соотношений (2.8), (3.2) и (3.3) вытекает, что

$$\dot{\nabla}_\xi \xi = 0, \quad (4.9)$$

$$\dot{\nabla}_\xi U = -(\nabla_\xi \varphi)N - \varphi \nabla_\xi N + g(A\xi, \varphi N)N = 0. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.9) и (4.10) в (4.8), находим

$$(\dot{\nabla}_\xi R_N)X = -\frac{1}{2}(\dot{\nabla}_\xi A)X. \quad (4.11)$$

Используя (4.3), имеем

$$\begin{aligned} (\dot{\nabla}_\xi A)X &= (\dot{\nabla}_X A)\xi + \frac{1}{2}\{B(X, N)\xi - B(\xi, N)X\} \\ &= \dot{\nabla}_X A\xi - A\dot{\nabla}_X \xi + \frac{1}{2}\{B(X, N)\xi - B(\xi, N)X\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подставляя соотношения (3.2), (3.3) и (4.6) в (4.12), получаем

$$(\dot{\nabla}_\xi A)X = (\exp(f))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}X - AX \right) \quad (4.13)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. Поскольку $\dot{\nabla}_\xi R_N = 0$, с использованием (4.13) в равенстве (4.11) приходим к равенству

$$AX = \frac{1}{2}X$$

для каждого векторного поля X на $\dot{M}$. Полученное равенство завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $\dot{M}$ — CR -гиперповерхность в конформной пространственной форме Кенмоцу $M(c)$, нормальная к $\omega^\sharp$, с ξ -параллельным в лиевом смысле нормальным оператором Якоби. Тогда $\dot{M}$ тотально омбилична.

Доказательство. Поскольку нормальный оператор Якоби на $\dot{M}$ ξ -параллелен в лиевом смысле, имеем

$$(L_\xi R_N)X = L_\xi R_N X - R_N(L_\xi X) = (\dot{\nabla}_\xi R_N)X - \dot{\nabla}_{R_N(X)}\xi + R_N(\dot{\nabla}_X \xi) \quad (4.14)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$, где L_ξ обозначает производную Ли по ξ . Из (3.3) и (4.7) получаем

$$-\dot{\nabla}_{R_N(X)}\xi + R_N(\dot{\nabla}_X \xi) = 0 \quad (4.15)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. Подстановка (4.11) и (4.15) в (4.14) дает

$$(L_\xi R_N)X = -\frac{1}{2}(\dot{\nabla}_\xi A)X. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.13) в (4.16), находим

$$(L_\xi R_N)X = -\frac{1}{2}(\exp(f))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}X - AX \right)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. С другой стороны, имеем $L_\xi R_N = 0$. Значит, данное выше определение завершает доказательство теоремы. $\square$

Пусть $\dot{M}$ — CR -гиперповерхность конформной пространственной формы Кенмоцу $M(c)$, касательной к $\omega^\sharp$. Из (2.7) имеем

$$B(N, N) = -\omega(\nabla_N N). \quad (4.17)$$

Подставляя (3.4) и (4.17) в (4.4), получаем

$$\begin{aligned} R_N(X) = \exp(f) \left\{ \frac{c-3}{4}X - \frac{c+1}{4}(\eta(X)\xi - 3\dot{g}(X, U)U) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left\{ \omega(\nabla_N N)X - \dot{\nabla}_X \omega^\sharp + \frac{1}{2}\omega(X)\omega^\sharp - \|\omega^\sharp\|^2 X \right\} \end{aligned}$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. Предположим, что $\omega^\sharp$ параллельно на $\dot{M}$; тогда из предыдущего уравнения следует, что

$$\begin{aligned} R_N(X) = \exp(f) \left\{ \frac{c-3}{4}X - \frac{c+1}{4}(\eta(X)\xi - 3\dot{g}(X, U)U) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left\{ \omega(\nabla_N N)X + \frac{1}{2}\omega(X)\omega^\sharp - \|\omega^\sharp\|^2 X \right\}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Беря ковариантную производную соотношения (4.18) по ξ , имеем

$$\begin{aligned} (\dot{\nabla}_\xi R_N)X &= \dot{\nabla}_\xi R_N(X) - R_N \dot{\nabla}_\xi X \\ &= \exp(f)\omega(\xi) \left\{ \frac{c-3}{4}X - \frac{c+1}{4}(\eta(X)\xi - 3\dot{g}(X, U)U) \right\} \\ &\quad - \frac{c+1}{4} \exp(f) \{ \dot{g}(X, \dot{\nabla}_\xi \xi)\xi + \eta(X)\dot{\nabla}_\xi \xi - 3\dot{g}(X, \dot{\nabla}_\xi U)U \\ &\quad - 3\dot{g}(X, U)\dot{\nabla}_\xi U \} - \frac{1}{2}\omega(\dot{\nabla}_\xi \nabla_N N)X \quad (4.19) \end{aligned}$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$. С другой стороны, из (3.6) вытекает, что

$$\dot{\nabla}_\xi \xi = -\frac{1}{2}\{\omega(\xi)\xi - \omega^\sharp\}. \quad (4.20)$$

Применяя (2.8) и формулы Гаусса и Вейнгартена, получаем

$$\dot{\nabla}_Y U = -(\exp(f))^{\frac{1}{2}}\dot{g}(Y, U)\xi - \frac{1}{2}\omega(U)Y - \frac{1}{2}\dot{g}(Y, U)\omega^\sharp + \tan(\varphi)AY).$$

Используя указанное выше уравнение и (3.5), находим

$$\dot{\nabla}_\xi U = -\frac{1}{2}\omega(U)\xi. \quad (4.21)$$

Подставляя соотношения (4.20) и (4.21) в (4.18), имеем

$$\begin{aligned} (\dot{\nabla}_\xi R_N)X &= \exp(f)\omega(\xi)\left\{\frac{c-3}{4}X - \frac{c+1}{4}(\eta(X)\xi - 3\dot{g}(X, U)U)\right\} \\ &\quad - \frac{c+1}{8}\exp(f)\{\omega(X)\xi - 2\omega(\xi)\eta(X)\xi + \eta(X)\omega^\sharp \\ &\quad + 3\eta(X)\omega(U)U + 3\dot{g}(X, U)\omega(U)\xi\} - \frac{1}{2}\omega(\dot{\nabla}_\xi \nabla_N N)X \end{aligned} \quad (4.22)$$

для всякого векторного поля X на $\dot{M}$.

Имеет место

Теорема 4.3. *Не существует CR -гиперповерхностей $\dot{M}$ в конформной пространственной форме Кенмоцу $M(c)$ ($c \neq -1$), касательных к $\omega^\sharp$, с ξ -параллельным оператором Якоби.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство $\dot{\nabla}_\xi R_N = 0$ и полагая $X = \xi$ в (4.22), находим

$$0 = -\exp(f)\omega(\xi)\xi - \frac{c+1}{8}\exp(f)\{\omega^\sharp - \omega(\xi)\xi + 3\omega(U)U\} - \frac{1}{2}\omega(\dot{\nabla}_\xi \nabla_N N)\xi. \quad (4.23)$$

Вычисляя скалярное произведение равенства (4.23) и векторного поля ξ , получаем

$$\exp(f)\omega(\xi) = -\frac{1}{2}\omega(\dot{\nabla}_\xi \nabla_N N). \quad (4.24)$$

Полагая $X = U$ в (4.22), имеем

$$c\exp(f)\omega(\xi)U - \frac{c+1}{2}\exp(f)\omega(U)\xi - \frac{1}{2}\omega(\dot{\nabla}_\xi \nabla_N N)U = 0. \quad (4.25)$$

Подставляя (4.24) в (4.25), получаем

$$(c+1)\left(\omega(\xi)U - \frac{1}{2}\omega(U)\xi\right) = 0.$$

Поскольку $c \neq -1$, можем написать

$$\omega(\xi)U - \frac{1}{2}\omega(U)\xi = 0.$$

Так как множество $\{\xi, U\}$ линейно независимо, $\omega(\xi) = 0$ и $\omega(U) = 0$. Значит, ввиду (4.23) и (4.24) получаем, что $c = -1$; противоречие. Теорема доказана. $\square$

Пусть $\dot{M}$ — CR -гиперповерхность в конформной пространственной форме Кенмоцу $M(c)$, нормальная к $\omega^\sharp$, с ξ -параллельным нормальным оператором Якоби. Если $c \neq -1$, то мы приходим к противоречию (см. доказательство теоремы 4.3). Следовательно, если имеется такая CR -гиперповерхность в M , то $c = -1$.

Имеет место

Следствие 4.4. Пусть $\acute{M}$ — CR -гиперповерхность в конформной пространственной форме Кенмотцу $M(c)$, касательная к $\omega^\sharp$, с ξ -параллельным нормальным оператором Якоби. Тогда $c = -1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dragomir S., Ornea L. Locally conformal Kähler geometry. Boston: Birkhäuser, 1998. (Progr. Math.; V. 175).
2. Libermann P. On the infinitesimals regular structure // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 195–224.
3. Vaisman I. A geometric condition for an l.c.K. to be Kähler // Geom. Dedicata. 1981. V. 10. P. 129–134.
4. Tricerri F. Some examples of locally conformal Kähler manifolds // Rend. Sem. Mat. Tôrino. 1982. V. 40. P. 81–92.
5. Banaru M. A new characterization of the Gray–Hervella classes of almost Hermitian manifolds // 8th Inter. conf. differential geometry and its applications. Opava, Czech Republic, 2001. P. 27–31.
6. Abood H. M. Holomorphic-geodesic transformations of almost Hermitian manifold: Ph. D. Thes., Moscow State Pedagogical University, Moscow, 2002.
7. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V. 123, N 4. P. 35–58.
8. Hernández-Lamonedá L. Curvature vs. almost Hermitian structures // Geom. Dedicata. 2000. V. 79, N 2. P. 205–218.
9. Bonanzinga V., Matsumoto K. Warped product CR -submanifolds in locally conformal Kähler manifolds // Period. Math. Hung. 2004. V. 48, N 1–2. P. 207–221.
10. Kamishima Y., Ornea L. Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds // Tôhoku Math. J. 2005. V. 57. P. 201–221.
11. Papaghiuc N. Some remarks on CR -submanifolds of a locally conformal Kähler manifold with parallel Lee form // Publ. Math. Debrecen. 1993. V. 43, N 3–4. P. 337–341.
12. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
13. Blair D. E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2002.
14. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1976. (Lect. Notes Math.; V. 509).
15. Abdi R., Abedi E. Invariant and anti-invariant submanifolds of a conformal Kenmotsu manifold // Azerbaijan J. Math. 2017. V. 5, N 1. P. 54–63.
16. Abdi R., Abedi E. CR -hypersurfaces of a conformal Kenmotsu manifold satisfying certain shape operator conditions // Period. Math. Hung. 2016. V. 73, N 1. P. 83–92.
17. Shukla S. S., Shukla M. K. On φ -Ricci symmetric Kenmotsu manifolds // Novi Sad. J. Math. 2008. V. 2. P. 89–95.
18. Bejancu A. Geometry of CR -submanifolds. Dordrecht: D. Reidel Publ., 1986.
19. Berndt J. Real hypersurfaces in quaternionic space forms // Z. Reine Angew. Math. 1991. V. 419. P. 9–26.

Статья поступила 17 марта 2016 г.

Roghayeh Abdi (Абди Руфайе), Esmail Abedi (Абеди Эсмаил)
 Department of Mathematics
 Azarbaijan Shahid Madani University,
 Tabriz 53751 71379, Iran
 rabdi@azaruniv.edu, esabedi@azaruniv.edu