Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6

УДК 517.5; 517.956.225

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ДЭВИСА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Ф. Г. Авхадиев

Аннотация. Проблема Дэвиса связана с максимальными константами в неравенствах типа Харди. Изучаются обобщения этой задачи на случай неравенств типа Реллиха для полигармонических операторов в областях евклидова пространства. Получены оценки, дающие решение обобщенной проблемы, при минимальном дополнительном требовании на границу области. А именно, для заданной области предполагается существование двух открытых шаров с достаточно малыми радиусами, обладающих следующими свойствами: шары имеют одну общую граничную точку, один из шаров лежит внутри области, а другой шар с областью не пересекается.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.602

Ключевые слова: полигармонический оператор, неравенство типа Реллиха, функция расстояния.

1. Введение

Теория многомерных неравенств типа Харди и связанных с ними неравенств типа Реллиха интенсивно развивается. Этим интегральным неравенствам посвящено большое число работ математиков и специалистов по квантовой механике, интересующихся принципом неопределенности Гейзенберга. Читатель может найти в недавно вышедшей книге [1] базовые результаты по этой тематике с подробными доказательствами.

В настоящей статье будем рассматривать неравенства типа Реллиха в областях Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ при $d \geq 1$. Отметим, что оригинальный результат Реллиха относится к случаю, когда $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, и его неравенство имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\Delta f|^2 \, dx \geq \frac{d^2(d-4)^2}{16} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|f|^2}{|x|^4} \, dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}),$$

где $d \geq 1$ и $d \neq 2$. Кроме того, Реллих обосновал точность константы $d^2(d-4)^2/16$ и показал, что при $d = 2$ это неравенство неверно, даже если заменим соответствующую постоянную 1 сколь угодно малым числом $\varepsilon > 0$ (см. [2]).

Всюду ниже предполагаем, что $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, тогда корректно определено расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы области, т. е.

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) := \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|, \quad x \in \Omega,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17–01–00282–а).

где $\partial\Omega$ — граница области Ω. Ограниченность области не требуется, поэтому $\partial\Omega$ может содержать бесконечно удаленную точку.

Рассматриваем вещественнозначные функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$, т. е. гладкие функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями $\operatorname{supp}(f) \subset \Omega$. Пусть m — фиксированное натуральное число. Для функций f рассмотрим линейные комбинации ее частных производных порядка m, определяемые следующими формулами (см., например, [3]):

$$\Delta^{m/2} f(x) := \begin{cases} \Delta^j f(x), & \text{если } m = 2j \geq 2 \text{ — четное число;} \\ \nabla \Delta^j f(x), & \text{если } m = 2j+1 \text{ — нечетное число.} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь Δ означает, как обычно, оператор Лапласа и ∇f — градиент функции f. Оператор $\Delta^{m/2}$ принято называть *полигармоническим*.

Пусть $p \in [1, \infty)$ и $\sigma \in (1-p, \infty)$ — фиксированные параметры. Целью настоящей статьи является изучение следующего неравенства для полигармонических операторов:

$$\int_\Omega \frac{|\Delta^{m/2} f(x)|^p \, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq X_m(p, \sigma; \Omega) \int_\Omega \frac{|f(x)|^p \, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{mp+\sigma}} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2}$$

где константа $X_m(p, \sigma; \Omega) \in [0, \infty)$ выбрана наибольшей из возможных. А именно, полагаем, что

$$X_m(p, \sigma; \Omega) = \inf_{f \in C_0^\infty(\Omega), f \not\equiv 0} \frac{\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^p (\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{-\sigma} \, dx}{\int_\Omega |f(x)|^p (\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{-mp-\sigma} \, dx}.$$

Согласно результату Реллиха получаем $X_2(2, 0; \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 0$ и $X_2(2, 0; \mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = d^2(d-4)^2/16$ при $d \neq 2$.

Нетрудно проверить, что константы $X_m(p, \sigma; \Omega)$ *инвариантны по отношению к линейным конформным отображениям области*, т. е. для любых $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}^d$ имеют место равенства

$$X_m(p, \sigma; \Omega) = X_m(p, \sigma; a\Omega + b), \tag{3}$$

где $a\Omega + b = \{ax + b : x \in \Omega\}$.

Обозначим

$$C_m(p, \sigma) = \left(\frac{\Gamma(m + \sigma/p + 1 - 1/p)}{\Gamma(\sigma/p + 1 - 1/p)} \right)^p,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что $|\Delta^{1/2} f(x)| \equiv |\nabla f(x)|$ в силу определения (1) и $C_1(2, 0) = 1/4$. В [4] Дэвис доказал следующее утверждение: *если область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет хотя бы одну регулярную в определенном смысле граничную точку, то справедливо неравенство $X_1(2, 0; \Omega) \leq 1/4$.*

Эта оценка точна, так как $X_1(2, 0; \Omega) = 1/4$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ (см., например, [5]). Отметим также, что $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ является областью, не имеющей регулярной граничной точки.

Основной целью настоящей статьи является следующее обобщение теоремы Дэвиса: *при любых допустимых значениях параметров σ, p и $m \geq 2$ справедлива оценка*

$$X_m(p, \sigma; \Omega) \leq C_m(p, \sigma)$$

для любой области Ω, имеющей хотя бы одну регулярную в определенном смысле граничную точку.

Такая оценка оказывается неулучшаемой для ряда наборов допустимых параметров. Следует также отметить, что мы пользуемся определением регулярной граничной точки, отличным от определения Дэвиса.

Задача Дэвиса для градиентных неравенств, соответствующих случаю $m = 1$, изучена в [4, 6]. Поэтому рассматриваем лишь гармонический оператор и полигармонические операторы при $m > 2$.

2. Основной результат

Будем пользоваться геометрически наглядными определениями регулярных граничных точек из [6].

Определение 1. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Граничную точку $y_0 \in \partial\Omega$ назовем *B-регулярной*, если существуют такие шары $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < r_0\} \subset \Omega$ и $B^- = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0'| < r_0\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, что $|y_0 - x_0| = |y_0 - x_0'| = r_0 > 0$ и $y_0 = (x_0 + x_0')/2$.

Очевидно, любая выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, имеет B-регулярные граничные точки, причем множество B-регулярных граничных точек такой области является всюду плотным подмножеством $\partial\Omega$.

Определение 2. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/4)$, и пусть y_0, x_0 — точки $\mathbb{R}^d$, причем $r_0 := |x_0 - y_0| > 0$.

Рассмотрим усеченный конус $S_{y_0}(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^d$, состоящий из таких точек $x \in \mathbb{R}^d$, что выполнены неравенства

$$r_0(1 - 2\sqrt{\varepsilon}) < |x - x_0| < r_0, \quad \cos(\sqrt{\varepsilon}) < \frac{(x - x_0, y_0 - x_0)}{r_0|x - x_0|} \leq 1,$$

где $(\, ,)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Граничную точку $y_0 \in \partial\Omega$ назовем *S-регулярной*, если существуют точка $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{y_0\}$ и постоянные $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ и $C_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливы следующие условия: 1) $S_{y_0}(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$; 2) $r_0 - |x - x_0| \leq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq r_0(1 + C_0\varepsilon) - |x - x_0|$ для $r_0 = |y_0 - x_0|$ и любой точки $x \in S_{y_0}(x_0, \varepsilon)$.

Если точка $y_0 \in \partial\Omega$ B-регулярна и x_0 — центр шара B^+, то условия 1 и 2 для усеченного конуса $S_{y_0}(x_0, \varepsilon)$ выполняются с постоянной $C_0 = 3$. Таким образом, B-регулярная граничная точка является также S-регулярной, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Сравнение S-регулярности и регулярности по Дэвису является непростой задачей, так как их определения основаны на различных подходах к описанию свойств области в окрестности регулярной граничной точки. Данное в [4] определение регулярности основано на существовании специального семейства диффеоморфизмов окрестности регулярной граничной точки. Для полноты изложения приведем определение Дэвиса. Пусть $\delta > 0$. Нам потребуются куб

$$C_\delta = \{\tilde{x} = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} : -\delta < x_2 < \delta, \dots, -\delta < x_d < \delta\}$$

и множество $V_\delta = V_\delta' \cup V_\delta^0$, где

$$V_\delta' = \{(x_1, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d : 0 < x_1 < \delta, \ \tilde{x} \in C_\delta\}, \quad V_\delta^0 = \{(x_1, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0, \ \tilde{x} \in C_\delta\}.$$

Определение 3 (см. [4]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область. Граничная точка $y_0 \in \partial\Omega$ называется *регулярной по Дэвису*, если существуют число $\delta > 0$ и такой гомеоморфизм $\tau : D \to V_\delta$ некоторой окрестности D точки y_0 в $\overline{\Omega}$, что справедливы следующие условия:

1) $\tau(y_0) = 0$ и $\tau(D \cap (\partial\Omega)) = V_\delta^0$;

2) τ диффеоморфно отображает $D \cap \Omega$ на область V_δ';

3) $\lim\limits_{x\to 0} g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ $(1 \le i \le d, 1 \le j \le d)$, где $g_{ij}(x)$ — метрика на V_δ', индуцированная евклидовой метрикой на Ω.

Определение S-регулярной граничной точки, очевидно, сохраняет основную идею определения 3: существует достаточно малая окрестность D точки y_0 в $\overline{\Omega}$, обладающая специальными свойствами.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, \infty)$ и $\sigma \in (1-p, \infty)$, и пусть m и d — натуральные числа, $m \ge 2$. Если область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет хотя бы одну S-регулярную граничную точку, то имеет место оценка*

$$X_m(p, \sigma; \Omega) \le C_m(p, \sigma) = \left(\frac{\Gamma(m + \sigma/p + 1 - 1/p)}{\Gamma(\sigma/p + 1 - 1/p)} \right)^p.$$

Отметим, что в частном случае, когда $p = m = 2$, $\sigma = 0$ и $d \ge 2$, теорема 1 доказана автором в [7], а случай $p = d = 2$, $\sigma = 0$ и $m \ge 2$ рассмотрен в [8].

В доказательстве теоремы 1 будем различать три случая: простой, но важный случай $d = 1$, случаи $d = 2$ и $d \ge 3$.

Доказательство теоремы 1 при $d = 1$. Любая область $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\Omega \ne \mathbb{R}$, является конечным или бесконечным интервалом. В силу равенства (3) достаточно рассмотреть случай, когда $\Omega = \Omega_a := (0, a)$, где a — положительное число или $a = +\infty$. Очевидно, что $y_0 = 0$ является B-регулярной граничной точкой области Ω_a. Оказывается, что $X_m(p, \sigma; \Omega) = C_m(p, \sigma)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\Omega \ne \mathbb{R}$. Этот факт вытекает из следующего утверждения, доказываемого несложным комбинированием результатов и идей Харди.

Предложение 1. *Пусть $p \in [1, \infty)$, $\sigma \in (1-p, \infty)$, m — натуральное число, $m \ge 2$, a — положительное число или $a = +\infty$. Далее, предположим, что функция $f : [0, a) \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно, производная $f^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна на $[1, a)$ и выполнено условие $\int_0^a |f^{(m)}(\tau)|^p \tau^{-\sigma}\, d\tau < \infty$.*

Если $f \not\equiv 0$ и $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$, то имеет место неравенство

$$\int_0^a \frac{|f^{(m)}(\tau)|^p}{\tau^\sigma}\, d\tau > C_m(p, \sigma) \int_0^a \frac{|f(\tau)|^p}{\tau^{mp+\sigma}}\, d\tau. \tag{4}$$

Постоянная $C_m(p, \sigma)$ точная, т. е. максимальная из возможных в этом неравенстве.

Доказательство предложения 1. С учетом условий $f \not\equiv 0$ и $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$ получаем, что $f^{(j)} \not\equiv 0$ для $j = 1, \dots, m$.

Далее, пусть $p \in [1, \infty)$, $s \in (1, \infty)$. Из классических результатов Харди следует, что для любой абсолютно непрерывной функции $u : [0, a) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $u \not\equiv 0$, $u(0) = 0$ и $\int_0^a |u'(\tau)|^p\, \tau^{p-s}\, d\tau < \infty$, имеет место неравенство

$$\int_0^a \frac{|u'(\tau)|^p}{\tau^{s-p}}\,d\tau > \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_0^a \frac{|u(\tau)|^p}{\tau^s}\,d\tau. \tag{5}$$

Применяя неравенство вида (5) к функциям $u = f^{(j)}$ последовательно при $j = m-1, m-2, \dots, 0$, получаем

$$\int_0^a \frac{|f^{(m)}(\tau)|^p}{\tau^\sigma}\,d\tau > \left(\frac{\sigma+p-1}{p}\right)^p \int_0^a \frac{|f^{(m-1)}(\tau)|^p}{\tau^{p+\sigma}}\,d\tau$$
$$> \left(\frac{\sigma+p-1}{p}\right)^p \left(\frac{\sigma+2p-1}{p}\right)^p \int_0^a \frac{|f^{(m-2)}(\tau)|^p}{\tau^{2p+\sigma}}\,d\tau$$
$$> \dots > \left(\prod_{j=1}^m ((\sigma-1)/p+j)^p\right) \int_0^a \frac{|f(\tau)|^p}{\tau^{mp+\sigma}}\,d\tau.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство (4), так как

$$C_m(p,\sigma) = \prod_{j=1}^m ((\sigma-1)/p+j)^p.$$

Остается доказать точность постоянной $C_m(p,\sigma)$ в неравенстве (4). Для краткости параметры и функции f, удовлетворяющие условиям предложения 1, будем называть *допустимыми.*

Предположим, что существуют допустимые параметры, для которых постоянная $C_m(p,\sigma)$ не является максимально возможной в неравенстве (4). Тогда для этих допустимых параметров p, σ, m существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любой допустимой функции f

$$\int_0^a \frac{|f^{(m)}(\tau)|^p}{\tau^\sigma}\,d\tau \geq (C_m(p,\sigma)+\varepsilon_0) \int_0^a \frac{|f(\tau)|^p}{\tau^{mp+\sigma}}\,d\tau. \tag{6}$$

Возьмем числа $\varepsilon > 0$, $b \in (0,a)$, где b — фиксированное число. Рассмотрим допустимые функции f_ε, определяемые равенствами

$$f_\varepsilon^{(m)}(\tau) = c_m(p,\sigma,\varepsilon)\tau^{(\sigma-1+\varepsilon)/p}$$

при $0 \leq \tau \leq b$, где

$$c_m(p,\sigma,\varepsilon) = \prod_{j=1}^m (\sigma-1+\varepsilon)/p+j),$$

и $f_\varepsilon^{(m)}(\tau) = 0$ при $b < \tau < a$. Применяя (6) к допустимой функции $f = f_\varepsilon$, получаем

$$\int_0^b \frac{|f_\varepsilon^{(m)}(\tau)|^p}{\tau^\sigma}\,d\tau \geq (C_m(p,\sigma)+\varepsilon_0) \int_0^b \frac{|f_\varepsilon(\tau)|^p}{\tau^{mp+\sigma}}\,d\tau.$$

Прямые вычисления показывают, что это соотношение равносильно неравенству

$$\frac{(c_m(p,\sigma,\varepsilon))^p}{\varepsilon} b^\varepsilon \geq \frac{C_m(p,\sigma)+\varepsilon_0}{\varepsilon} b^\varepsilon.$$

Но последнее неравенство неверно для достаточно малых $\varepsilon > 0$, так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (c_m(p,\sigma,\varepsilon))^p = C_m(p,\sigma).$$

Полученное противоречие завершает доказательство предложения 1.

Доказательство теоремы 1 в размерностях $d = 2$ и $d \geq 3$. Пусть $y_0 \in \partial\Omega$ — S-регулярная граничная точка области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Из неравенства (2) и из определения 2 следует, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(S_{y_0}(x_0,\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{S_{y_0}(x_0,\varepsilon)} \frac{|\Delta^{m/2} f(x)|^p\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^\sigma} \geq X_m(p,\sigma;\Omega) \int\limits_{S_{y_0}(x_0,\varepsilon)} \frac{|f(x)|^p\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{mp+\sigma}}, \tag{7}$$

где $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq r_0(1 + C_0\varepsilon) - |x - x_0|$, $C_0 > 0$. В силу равенства (3) можно считать без ограничения общности, что $x_0 = (0,0,\dots,0)$ — начало координат, $y_0 = (1,0,\dots,0)$ — S-регулярная граничная точка области Ω. Для простоты эти точки будем обозначать через $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$, а величину $X_m(p,\sigma;\Omega)$ — через X_m. Тогда $r_0 = 1$ и неравенства для функции расстояния приобретают вид $1 - |x| \leq \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq 1 - |x| + C_0\varepsilon$.

Случай, когда размерность $d = 2$. В полярных координатах $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ усеченный конус $S_1(0,\varepsilon) \subset \Omega$ описывается неравенствами

$$\rho := 1 - 2\sqrt{\varepsilon} < r < 1, \quad -\sqrt{\varepsilon} < \theta < \sqrt{\varepsilon}.$$

Возьмем вещественнозначные функции $h \in C_0^\infty((0,2))$ и $g \in C_0^\infty((-1,1))$. В дальнейшем будем считать, что функция g фиксирована, причем $g \not\equiv 0$. Положим $f(x) \equiv h_\varepsilon(r) g_\varepsilon(\theta)$, где

$$h_\varepsilon(r) \equiv h((1-r)/\sqrt{\varepsilon}), \quad g_\varepsilon(\theta) \equiv g(\theta/\sqrt{\varepsilon}). \tag{8}$$

Легко видеть, что $f \in C_0^\infty(S_1(0,\varepsilon))$.

С учетом новых обозначений из неравенства (7) следует, что

$$\iint\limits_{S_1(1,\varepsilon)} \frac{|\Delta^{m/2}(h_\varepsilon g_\varepsilon)|^p r\,dr d\theta}{(\delta_\sigma(r))^\sigma} \geq X_m \iint\limits_{S_1(0,\varepsilon)} \frac{|h_\varepsilon(r) g_\varepsilon(\theta)|^p r\,dr d\theta}{(1 - r + C_0\varepsilon)^{mp+\sigma}}, \tag{9}$$

где $\delta_\sigma(r) = 1 - r$, если $\sigma \geq 0$, и $\delta_\sigma(r) = 1 - r + C_0\varepsilon$, если $\sigma < 0$.

Пусть $m = 2j$, где $j \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\Delta(h_\varepsilon(r) g_\varepsilon(\theta)) = \left(h_\varepsilon''(r) + \frac{h_\varepsilon'(r)}{r}\right) g_\varepsilon(\theta) + \frac{h_\varepsilon(r)}{r^2} g_\varepsilon''(\theta).$$

Методом математической индукции нетрудно получить следующую структурную формулу:

$$\Delta^j(h_\varepsilon(r) g_\varepsilon(\theta)) = h_\varepsilon^{(2j)}(r) g_\varepsilon(\theta) + \sum_{\nu=0}^{2j-1} h_\varepsilon^{(\nu)}(r) \sum_{\mu=0}^{2\mu+\nu\leq 2j} g_\varepsilon^{(2\mu)}(\theta) \sum_{k=0}^{2j} \frac{b_{k\nu\mu}}{r^k}, \tag{10}$$

где коэффициенты $b_{k\nu\mu}$ — некоторые целые числа.

Умножим обе части неравенства (9) на $(\sqrt{\varepsilon})^{2jp+\sigma-1}$, совершим замену переменных $r = 1 - \sqrt{\varepsilon}t$, $\theta = \sqrt{\varepsilon}\varphi$ в интегралах из формулы (9) и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0^+$. Прямые вычисления с учетом формул (8)–(10) приводят к неравенству

$$\int_{-1}^{1} d\varphi \int_{0}^{2} \frac{|G_{2j}(t,\varphi)|^p\,dt}{t^\sigma} \geq X_{2j} \int_{-1}^{1} |g(\varphi)|^p\,d\varphi \int_{0}^{2} \frac{|h(t)|^p\,dt}{t^{2jp+\sigma}}, \tag{11}$$

где $G_{2j}(t,\varphi)$ имеет следующую структуру:

$$G_{2j}(t,\varphi) = h^{(2j)}(t)g(\varphi) + \sum_{\nu=0}^{2j-1} h^{(\nu)}(t) \sum_{\mu=0}^{2\mu+\nu\leq 2j} c_{\nu\mu}(2j)\,g^{(2\mu)}(\varphi).$$

Здесь коэффициенты $c_{\nu\mu}(2j)$ — некоторые целые числа.

Оценим сверху левую часть (11) с помощью неравенства Минковского и поделим обе части на интеграл $\int\limits_{-1}^{1} |g(\varphi)|^p\,d\varphi > 0$. Несложные преобразования с применением равенства

$$M_{2j} := \max_{0\leq\nu\leq 2j-1} \frac{\int\limits_{-1}^{1} \left| \sum\limits_{\mu=0}^{2\mu+\nu\leq 2j} c_{\nu\mu}(2j) g^{(2\mu)}(\varphi)\right|^p d\varphi}{\int\limits_{-1}^{1} |g(\varphi)|^p d\varphi}$$

дают неравенство

$$\left(\int_0^2 \frac{|h^{(2j)}(t)|^p\,dt}{t^\sigma}\right)^{1/p} + M_{2j}^{1/p} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \left(\int_0^2 \frac{|h^{(\nu)}(t)|^p\,dt}{t^\sigma}\right)^{1/p} \geq X_{2j}^{1/p} \left(\int_0^2 \frac{|h(t)|^p\,dt}{t^{2jp+\sigma}}\right)^{1/p}, \tag{12}$$

справедливое для любой функции $h \in C_0^\infty((0,2))$.

Замыканию множества $C_0^\infty((0,2))$ по норме

$$\|h\|_p := \left(\int_0^2 \frac{|h(t)|^p\,dt}{t^{2jp+\sigma}}\right)^{1/p} + \sum_{\nu=0}^{2j} \left(\int_0^2 \frac{|h^{(\nu)}(t)|^p dt}{t^\sigma}\right)^{1/p}$$

принадлежат и функции $H_\varepsilon : [0,2] \to \mathbb{R} \in C^{2j-1}([0,2])$, зависящие от параметра $\varepsilon > 0$ и определяемые равенствами

$$H_\varepsilon(0) = H'_\varepsilon(0) = \cdots = H_\varepsilon^{(2j-1)}(0) = 0, \quad H_\varepsilon^{(2j)}(t) = c_{2j}(p,\sigma,\varepsilon) t^{(\sigma-1+\varepsilon)/p},$$

где $c_{2j}(p,\sigma,\varepsilon) = \prod\limits_{k=1}^{2j} ((\sigma-1+\varepsilon)/p + k)$.

Подставляя $h(t) = H_\varepsilon(t)$ в неравенство (12), получаем

$$\left(\frac{(c_{2j}(p,\sigma,\varepsilon))^p}{\varepsilon}\right)^{1/p} + O(1) \geq \left(\frac{X_{2j}}{\varepsilon}\right)^{1/p}.$$

Отсюда

$$C_{2j}(p,\sigma) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (c_{2j}(p,\sigma,\varepsilon))^p \geq X_{2j} := X_{2j}(p,\sigma;\Omega),$$

что и требовалось доказать.

Пусть $m = 2j + 1$, где $j \in \mathbb{N}$. Имеем

$$|\Delta^{j+1/2} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta^j f)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(\Delta^j f)}{\partial\theta}\right)^2} \le \left|\frac{\partial(\Delta^j f)}{\partial r}\right| + \frac{1}{r}\left|\frac{\partial(\Delta^j f)}{\partial\theta}\right|.$$

Пользуясь этим и структурной формулой (10), получаем

$$|\Delta^{j+1/2}(h_\varepsilon(r)g_\varepsilon(\theta))| \le \left|h_\varepsilon^{(2j+1)}(r)\right||g_\varepsilon(\theta)| + \sum_{\nu=0}^{2j}\left|h_\varepsilon^{(\nu)}(r)\right| \sum_{\mu=0}^{2\mu+\nu\le 2j+1}\left|g_\varepsilon^{(2\mu)}(\theta)\right| \sum_{k=0}^{2j+1}\frac{b_{k\nu\mu}(j)}{r^k}, \quad (13)$$

где коэффициенты $b_{k\nu\mu}(j)$ — некоторые неотрицательные целые числа. Применяя (13) вместо (10) и рассуждая так же, как и в случае $m = 2j$, для случая $m = 2j+1$ приходим к следующему аналогу неравенства (12): для любой функции $h \in C_0^\infty((0,2))$

$$\left(\int_0^2 \frac{|h^{(2j+1)}(t)|^p\,dt}{t^\sigma}\right)^{1/p} + M_{2j+1}^{1/p}\sum_{\nu=0}^{2j}\left(\int_0^2 \frac{|h^{(\nu)}(t)|^p\,dt}{t^\sigma}\right)^{1/p} \ge X_{2j+1}^{1/p}\left(\int_0^2 \frac{|h(t)|^p\,dt}{t^{(2j+1)p+\sigma}}\right)^{1/p}, \quad (14)$$

где M_{2j+1} — некоторое неотрицательное число, зависящее от функции g. Далее рассматриваем функции $H_{j\varepsilon} : [0,2] \to \mathbb{R} \in C^{2j}([0,2])$, зависящие от параметра $\varepsilon > 0$ и определяемые равенствами

$$H_{j\varepsilon}(0) = H'_{j\varepsilon}(0) = \dots = H_{j\varepsilon}^{(2j)}(0) = 0, \quad H_{j\varepsilon}^{(2j+1)}(t) = c_{2j+1}(p,\sigma,\varepsilon)t^{(\sigma-1+\varepsilon)/p},$$

где $c_{2j+1}(p,\sigma,\varepsilon) = \prod_{k=1}^{2j+1}((\sigma-1+\varepsilon)/p+k)$.

Подставляя $h(t) = H_{j\varepsilon}(t)$ в неравенство (14) и рассматривая предельный переход при $\varepsilon \to 0^+$, получаем искомое неравенство.

Случай, когда размерность $d \ge 3$. Схема доказательства остается такой же, что и в случае двумерных областей. Появляются лишь некоторые нюансы, связанные с вычислениями $\Delta^{m/2}(h_\varepsilon(r)g_\varepsilon(\theta))$.

Пользуемся обобщенными полярными координатами $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta\cos\varphi_1$, …, $x_{d-1} = r\sin\theta\sin\varphi_1\dots\cos\varphi_{d-2}$, $x_d = r\sin\theta\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{d-2}$. Усеченный конус $S_1(0,\varepsilon) \subset \Omega$ описывается неравенствами $1 - 2\sqrt{\varepsilon} < r < 1$, $0 \le \theta < \sqrt{\varepsilon}$.

Пусть $h \in C_0^\infty((0,2))$ и $g \in C_0^\infty((0,1))$ — вещественнозначные функции. Функция g фиксирована, причем $g \not\equiv 0$. Вещественнозначную функцию $f \in C_0^\infty(S_1(0,\varepsilon))$ зададим равенством $f(x) \equiv h_\varepsilon(r)g_\varepsilon(\theta)$, где h_ε и g_ε определены равенствами (8).

Снова для краткости пользуемся обозначением $X_m = X_m(p,\sigma;\Omega)$.

Поскольку $f(x) \equiv h_\varepsilon(r)g_\varepsilon(\theta)$ зависит лишь от двух переменных r и θ, из неравенства (7) следует, что

$$\int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon}} \sin^{d-2}\theta\, d\theta \int\limits_{1-2\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{|\Delta^{m/2}(h_\varepsilon g_\varepsilon)|^p r^{d-1}\, dr}{(\delta_\sigma(r))^\sigma}$$
$$\geq X_m \int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon}} |g_\varepsilon(\theta)|^p \sin^{d-2}\theta\, d\theta \int\limits_{1-2\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{|h_\varepsilon(r)|^p r^{d-1}\, dr}{(1-r+C_0\varepsilon)^{mp+\sigma}}, \qquad (15)$$

где $\delta_\sigma(r) = 1-r$, если $\sigma \geq 0$, и $\delta_\sigma(r) = 1-r+C_0\varepsilon$, если $\sigma < 0$.

Для $f = h_\varepsilon(r)g_\varepsilon(\theta)$ имеем

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}|\nabla r|^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial\theta}(\nabla r, \nabla\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}|\nabla\theta|^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial f}{\partial\theta}\Delta\theta.$$

Формулы $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$, $x_1 = r\cos\theta$ позволяют явно вычислить частные производные r и θ. Имеем $|\nabla r| = 1$, $|\nabla\theta| = 1/r$,

$$(\nabla r, \nabla\theta) = 0, \quad \Delta r = \frac{d-1}{r}, \quad \Delta\theta = \frac{(d-2)\cos\theta}{r^2\sin\theta},$$

поэтому справедлива формула

$$\Delta(h_\varepsilon g_\varepsilon) = \left(h_\varepsilon'' + \frac{d-1}{r}h_\varepsilon'\right)g_\varepsilon + \frac{h}{r^2}\left(g_\varepsilon'' + (d-2)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}g_\varepsilon'\right), \qquad (16)$$

где $h_\varepsilon = h_\varepsilon(r)$, $g_\varepsilon = g_\varepsilon(\theta)$.

Очевидно, что для любого натурального числа $j \geq 2$ справедлива следующая структурная формула:

$$\Delta^j(h_\varepsilon(r)g_\varepsilon(\theta)) = h_\varepsilon^{(2j)}(r)g_\varepsilon(\theta) + \sum_{\nu=0}^{2j-1} h_\varepsilon^{(\nu)}(r)G_\nu(g_\varepsilon;\theta), \qquad (17)$$

где $G_\nu(g_\varepsilon;.) \in C_0^\infty((0,\sqrt{\varepsilon}\,))$, $0 \leq \nu \leq 2j-1$.

Умножим обе части неравенства (15) на $(\sqrt{\varepsilon})^{mp+\sigma-d+1}$, совершим линейную замену переменных $r = 1-\sqrt{\varepsilon}\,t$, $\theta = \sqrt{\varepsilon}\varphi$ в интегралах из формулы (15) и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0^+$.

Рутинный анализ, связанный с применением математической индукции, равенств (16) и (17) и простых формул

$$h_\varepsilon^{(\nu)}(r) = (-1)^\nu h^{(\nu)}(t)/(\sqrt{\varepsilon})^\nu, \quad g_\varepsilon^{(\nu)}(\theta) = g^{(\nu)}(\varphi)/(\sqrt{\varepsilon})^\nu, \quad \sin\theta \approx \sqrt{\varepsilon}\varphi,$$

показывает, что существует функция $\Phi_m \in C_0^\infty((0,2)\times(0,1))$, определяемая равенством

$$\Phi_m(t,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\sqrt{\varepsilon})^m|\Delta^{m/2}(h_\varepsilon g_\varepsilon)|$$

и удовлетворяющая неравенству

$$|\Phi_m(t,\varphi)| \leq |h^{(m)}(t)g(\varphi)| + \sum_{\nu=0}^{m-1}|h^{(\nu)}(t)G_\nu(g;\varphi)|,$$

где $G_\nu(g;.) \in C_0^\infty((0,1))$, $0 \le \nu \le m-1$. Поэтому из (15) получаем, что

$$\int_0^1 \varphi^{d-2}\,d\varphi \int_0^2 \frac{|\Phi_m(t,\varphi)|^p\,dt}{t^\sigma} \ge X_m \int_0^1 |g(\varphi)|^p \varphi^{d-2}\,d\varphi \int_0^2 \frac{|h(t)|^p\,dt}{t^{2jp+\sigma}}.$$

Далее, левую часть этого неравенства оценим сверху с помощью неравенства Минковского и поделим обе части на интеграл $\int_0^1 |g(\varphi)|^p \varphi^{d-2}\,d\varphi > 0$. В результате получаем, что для любой функции $h \in C_0^\infty((0,2))$ имеет место неравенство

$$\left(\int_0^2 \frac{|h^{(m)}(t)|^p\,dt}{t^\sigma}\right)^{1/p} + M^{1/p} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\int_0^2 \frac{|h^{(\nu)}(t)|^p\,dt}{t^\sigma}\right)^{1/p}$$
$$\ge X_m^{1/p} \left(\int_0^2 \frac{|h(t)|^p\,dt}{t^{mp+\sigma}}\right)^{1/p},$$

где M — некоторое неотрицательное число, зависящее от функции g. Применяя это неравенство к функциям H_ε и $H_{j\varepsilon}$, определенным при рассмотрении двумерного случая, как и ранее, выводим, что

$$C_m(p,\sigma) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (c_m(p,\sigma,\varepsilon))^p \ge X_m := X_m(p,\sigma;\Omega).$$

Этим и завершается доказательство теоремы 1 при $d = 2$ и $d \ge 3$.

3. Об оптимальности оценки $X_m(2,\sigma;\Omega) \le C_m(2,\sigma)$ и применениях теоремы 1

В одномерном случае ситуация проста. Из предложения 1 следует, что $X_m(p,\sigma;\Omega) = C_m(p,\sigma)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\Omega \ne \mathbb{R}$, при любом наборе допустимых числовых параметров. Предложение 1, как это видно из его доказательства, является простым следствием результатов и идей Харди. Если $d \ge 2$, то ситуация усложняется.

Можно показать, что оценка теоремы 1 точная для ряда наборов параметров и в размерностях $d \ge 2$. В частности, оценка точна при $p = 2$, $\sigma = 0$, любых $m \ge 2$ и $d \ge 2$.

Действительно, если $p = 2$ и $\sigma = 0$, то из теоремы 1 следует, что

$$X_m(2,0;\Omega) \le C_m(2,0) = \left(\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(1/2)}\right)^2 = \frac{((2m-1)!!)^2}{4^m}$$

для любой области, имеющей хотя бы одну B-регулярную граничную точку. Согласно нашему определению выпуклая область имеет B-регулярные граничные точки.

С другой стороны, Оуэн [9] доказал, что $X_m(2,0;\Omega) \ge C_m(2,0)$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \ne \mathbb{R}^d$.

Таким образом, можем дополнить теорему Оуэна следующим утверждением.

Предложение 2. *При любом $d \geq 2$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, имеет место равенство $X_m(2,0;\Omega) = ((2m-1)!!)^2/4^m$.*

Следует отметить известные частные случаи.

При любом $d \geq 2$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, равенство $X_1(2,0;\Omega) = 1/4$ хорошо известно и доказано рядом авторов независимо друг от друга в 1995–98 гг. (см., например, [1, 5]).

Известны также семейства невыпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, для которых $X_1(2,0;\Omega) = 1/4$ (см. [5]).

Равенство $X_2(2,0;\Omega) = 9/16$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, при любом $d \geq 2$ доказано в недавней статье автора [7].

Замечание 1. Предположим, что $p = m = 2$ и $\sigma = 0$. Рассмотрим области $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ при различных $d \geq 3$. Граница области $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ состоит из двух точек 0 и ∞, которые не являются регулярными в смысле определения 1 или 2.

Как указано во введении, Реллихом доказано, что

$$X_2(2,0;\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = \frac{d^2(d-4)^2}{16} \quad (d \neq 2).$$

Очевидно, неравенство $X_2(2,0;\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \leq C_2(2,0) = 9/16$ не выполняется при любом $d \geq 5$. В размерностях $d = 2$, $d = 3$ и $d = 4$ автору не удалось найти подобных контрпримеров.

Для сравнения отметим, что при $m = 1$, т. е. для неравенств вида

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^\sigma} \geq X_1(p,\sigma;\Omega) \int_\Omega \frac{|f(x)|^p\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{p+\sigma}} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

также имеют место аналогичные факты. В частности, $X_1(2,0;\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = (d-2)^2/4 > 1/4$ при условии $d \geq 4$. Для малых размерностей, а именно при $d = 2$ и $d = 3$, подобные контрпримеры неизвестны. Но гипотеза Дэвиса (см. [4]) о безусловной справедливости неравенства $X_1(2,0;\Omega) \leq 1/4$ для двумерных и трехмерных областей является открытой проблемой до настоящего времени.

В следующем утверждении докажем точность мажоранты $C_2(2,\sigma)$ при некоторых $\sigma \neq 0$ для полупространств. Отметим, что все конечные граничные точки полупространства регулярны в смысле любого из определений 1–3.

Предложение 3. *Пусть $d \geq 2$, и пусть $-1 < \sigma \leq 1$. Тогда*

$$X_2(2,\sigma;\Pi) = C_2(2,\sigma) = \frac{(1+\sigma)^2(3+\sigma)^2}{16},$$

где $\Pi = (0,\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$ — полупространство.

Доказательство предложения 3. Неравенство $X_2(2,\sigma;\Pi) \leq C_2(2,\sigma)$ следует из теоремы 1. Поэтому достаточно доказать, что $X_2(2,\sigma;\Pi) \geq C_2(2,\sigma)$ для $\sigma \in (-1,1]$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Pi$. Тогда для любого числа $\sigma \in \mathbb{R}$ и для вещественнозначных функций $f \in C_0^\infty(\Pi)$ справедливо тождество

$$\int_\Pi \frac{(\Delta f)^2\,dx}{x_1^\sigma} = -\sigma(1+\sigma)\sum_{k=2}^d \int_\Pi \frac{(f_{x_k})^2 dx}{x_1^{2+\sigma}} + \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Pi \frac{(f_{x_k x_j})^2 dx}{x_1^\sigma}, \tag{18}$$

где $f_{x_k} = \partial f/\partial x_k$, $f_{x_k x_j} = \partial^2 f/(\partial x_k \partial x_j)$.

Интегральное тождество (18) при $\sigma = 0$ хорошо известно (см., например, [10]). При $\sigma \neq 0$ тождество (18) получается интегрированием по частям некоторых слагаемых интеграла $\int\limits_{\Pi} \left[(\Delta f)^2/x_1^\sigma\right] dx$, а именно слагаемых, содержащих интегралы от функций вида $f_{x_k^2} f_{x_j^2}/x_1^\sigma$ при $k \neq j$. Ключевыми являются следующие промежуточные формулы.

Если $d \geq 2$, $k \neq 1$, $(x_1, x_k) \in \Pi_k = (0, \infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, то

$$\iint\limits_{\Pi_k} \frac{(f_{x_1^2} f_{x_k^2} - (f_{x_1 x_k})^2)\, dx_1 dx_k}{x_1^\sigma} \equiv -\frac{\sigma(1+\sigma)}{2} \iint\limits_{\Pi_k} \frac{(f_{x_k})^2\, dx_1 dx_k}{x_1^\sigma}.$$

Если $d \geq 3$, $k \neq 1$, $j \neq 1$, $k \neq j$, то

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} (f_{x_k^2} f_{x_j^2} - (f_{x_k x_j})^2)\, dx_k dx_j \equiv 0.$$

Предположим, что $\sigma \in (-1, 1]$. Применяя к функции f_{x_k} неравенство (5) по переменной $\tau = x_1$ и интегрируя затем по остальным переменным, получаем

$$\int\limits_{\Pi} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}\right)^2 \frac{dx}{x_1^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2}{4} \int\limits_{\Pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \frac{dx}{x_1^{2+\sigma}}.$$

Так как $(1+\sigma)^2/4 \geq \sigma(1+\sigma)/2$ для $\sigma \in (-1, 1]$, интегральное тождество (18) влечет неравенство

$$\int\limits_{\Pi} \frac{(\Delta f)^2 dx}{x_1^\sigma} \geq \int\limits_{\Pi} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)^2 \frac{dx}{x_1^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2}{4} \int\limits_{\Pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{dx}{x_1^{2+\sigma}}.$$

Оценим последний интеграл снизу, еще раз применяя (5) к функции f по переменной $\tau = x_1$ и интегрируя затем по остальным переменным. Получим финальное неравенство

$$\int\limits_{\Pi} \frac{(\Delta f)^2 dx}{x_1^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2(3+\sigma)^2}{16} \int\limits_{\Pi} f^2 \frac{dx}{x_1^{4+\sigma}} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Pi).$$

Отсюда следует, что

$$X_2(2, \sigma; \Pi) \geq \frac{(1+\sigma)^2(3+\sigma)^2}{16}, \quad \sigma \in (-1, 1],$$

так как величина $X_2(2, \sigma; \Pi)$ определена как максимальная константа.

Этим и завершается доказательство предложения 3.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T.* The analysis and geometry of Hardy's inequality. Universitext. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer-Verl., 2015.
2. *Rellich F.* Perturbation theory of eigenvalue problems. New York; London; Paris: Gordon and Breach, 1969.
3. *Gazzola F., Grunau H.-Ch., Sweers G.* Polyharmonic boundary value problems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2010. (Lect. Notes Math.; V. 1991).

4. *Davies E. B.* The Hardy constant // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1995. V. 46, N 2. P. 417–431.

5. *Авхадиев Ф. Г.* Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 1/4 // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 5. С. 3–26.

6. *Авхадиев Ф. Г., Шафигуллин И. К.* Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами // Изв. вузов. Математика. 2014. № 2. С. 69–73.

7. *Avkhadiev F. G.* Hardy–Rellich inequalities in domains of the Euclidean space // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 442. P. 469–484.

8. *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства Реллиха для полигармонических операторов в областях на плоскости // Мат. сб. (в печати).

9. *Owen M. P.* The Hardy–Rellich inequality for polyharmonic operators // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1999. V. 129A. P. 825–839.

10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 21 апреля 2017 г.

Авхадиев Фарит Габидинович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420048
avkhadiev47@mail.ru