

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ СУБРИМАНОВОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПОТОКЕ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

С. В. Агапов, М. Р. Борчашвили

Аннотация. Исследуется интегрируемый геодезический поток левоинвариантной субримановой метрики для правоинвариантного распределения на группе Гейзенберга. Приведена классификация траекторий этого потока. Численным интегрированием построены траектории, отвечающие различным значениям первых интегралов. Показано, что при некоторых значениях первых интегралов можно получить явные формулы для геодезических, обратив соответствующие эллиптические интегралы Лежандра.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.603

Ключевые слова: субриманова геометрия, геодезический поток, левоинвариантная метрика.

1. Введение

Инвариантные субримановы задачи на группах Ли изучались в различных работах (см., например, [1–6]). Простейшим примером трехмерной группы Ли является группа Гейзенберга. В [1] исследован геодезический поток, который отвечает левоинвариантной метрике и левоинвариантному распределению на группе Гейзенберга. В частности, в [1] показано, что этот геодезический поток суперинтегрируемый. С более общей точки зрения неголономные римановы метрики и их геодезические на группе Гейзенберга изучались в [7].

Напомним основные определения. Пусть M^n — гладкое n -мерное многообразие. Гладкое семейство

$$\Delta = \{\Delta(q) : \Delta(q) \subset T_q M^n \forall q \in M^n, \dim \Delta(q) = k\}$$

k -мерных подпространств в касательных пространствах называется *вполне неголономным распределением*, если векторные поля из Δ и их всевозможные коммутаторы порождают все касательное пространство в каждой точке $q \in M^n$.

Кусочно гладкая кривая $\gamma : [0, t_0] \mapsto M^n$ называется *допустимой*, если $\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t))$ для всех $t \in [0, t_0]$. Длина этой кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_0^{t_0} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

где g — риманова метрика на M^n . Расстояние $d(q_1, q_2)$ между двумя точками q_1, q_2 на многообразии M^n задается следующим образом: $d(q_1, q_2) = \inf L(\gamma(t))$,

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (грант 14-11-00441).

© 2017 Агапов С. В., Борчашвили М. Р.

где $\inf$ берется по длинам всех допустимых кривых, соединяющих q_0 и q_1 . Такая функция $d(\cdot, \cdot)$ называется *субримановой метрикой* на M^n .

Геодезические субримановой метрики удовлетворяют принципу максимума Понтрягина [8]. Напомним, в чем он заключается.

Пусть $f_1, \dots, f_k$ — касательные ортонормированные векторные поля из Δ , которые порождают Δ в каждой точке $q \in M^n$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i f_i(q), \quad u_i \in R,$$

$$\int_0^{t_0} \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt \mapsto \min, \quad q(0) = q_1, \quad q(t_0) = q_2,$$

здесь t_0 фиксировано. Если кривая $q(t)$ оптимальна, то существуют ковектор λ и постоянная $\nu \leq 0$ такие, что

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(q(t), \lambda(t), u(t)), \quad \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), \lambda(t), u(t)),$$

где

$$H(q, \lambda, u) = \left\langle \lambda, \sum_{i=1}^k u_i f_i(q) \right\rangle + \nu \sum_{i=1}^k u_i^2,$$

причем

$$\frac{\partial H}{\partial u}(q(t), \lambda(t), u(t)) = 0.$$

Кривая $q(t)$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, называется *экстремалью*. Если $\nu \neq 0$ (в этом случае можно взять $\nu = -\frac{1}{2}$), то экстремаль называется *нормальной*. Если $\nu = 0$, то экстремаль называется *анормальной* (см., например, [9]). В данной работе ограничимся рассмотрением нормальных экстремалей.

Авторы выражают благодарность И. А. Тайманову за постановку задачи и ценные замечания.

2. Интегрируемость субриманова геодезического потока на группе Гейзенберга

Напомним, что *трехмерной группой Гейзенберга* H^3 называется группа, элементами которой являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с операцией умножения (умножение матриц), где $x, y, z \in R$. Ее алгебра Ли $\mathfrak{l}$ порождена элементами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа H^3 действует на себя *левыми и правыми сдвигами*: $l_g(h) = gh$, $r_g(h) = hg$. Следуя [10], индуцированные отображения касательных пространств будем обозначать через

$$l_{g*} : TH_h^3 \rightarrow TH_{gh}^3, \quad r_{g*} : TH_h^3 \rightarrow TH_{hg}^3.$$

Пусть l_0 — векторное подпространство, образованное элементами e_1 и e_2 . *Левоинвариантное* распределение, порожденное l_0 , состоит из двумерных плоскостей $L_x = l_{g*}l_0$, соответственно *правоинвариантное* распределение — из двумерных плоскостей $R_x = r_{g*}l_0$. Коммутаторы векторных полей e_1, e_2, e_3 устроены следующим образом:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0,$$

т. е. рассматриваемое распределение вполне неголономно.

Риманова метрика называется *левоинвариантной*, если она сохраняется при всех левых сдвигах l_g . Ее достаточно задать в одной точке группы (например, в единице), тогда в остальные точки метрику можно перенести левыми сдвигами.

Теорема 1 (И. А. Тайманов [1]). 1. *Геодезический поток субримановой метрики на группе Гейзенберга, который соответствует левоинвариантной римановой метрике*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+x^2) & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}$$

и правоинвариантному распределению, — это гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2(1+x^2+y^2)}((1+x^2)\lambda_1^2 + (1+y^2)\lambda_2^2 + y^2(1+x^2)\lambda_3^2 + 2xy\lambda_1\lambda_2 + 2y(1+x^2)\lambda_1\lambda_3 + 2xy^2\lambda_2\lambda_3)$$

и стандартной симплектической структурой.

2. *Этот поток обладает тремя первыми интегралами*

$$I_1 = H, \quad I_2 = \lambda_3(\sqrt{x^2+y^2} - y^2) + x\lambda_2 - y\lambda_1, \quad I_3 = \lambda_3.$$

3. *Ограничим этот поток на поверхность уровня $\{I_3 = C_3 = \text{const}\}$ и спроектируем его на плоскость (x, y) . Поток, построенный таким образом, эквивалентен гамильтоновой системе, описывающей движение заряженной частицы на двумерной плоскости с римановой метрикой*

$$ds^2 = (1+y^2)dx^2 - 2xy dx dy + (1+x^2)dy^2 \quad (1)$$

в постоянном магнитном поле

$$\Omega = \lambda_3 dx \wedge dy. \quad (2)$$

Другой пример субриманова геодезического потока, соответствующего левоинвариантной метрике и правоинвариантному распределению, можно найти в [11].

3. Основные результаты

Исследуем геодезический поток, отвечающий метрике (1), в постоянном магнитном поле (2). Удобно перейти в полярную систему координат (r, ϕ) , где $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = dr^2 + (r^2 + r^4) d\phi^2,$$

а гамильтониан равен

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 + r^4} \right).$$

Симплектическая структура такова:

$$\{r, p_r\} = \{\phi, p_\phi\} = 1, \quad \{p_r, p_\phi\} = C_3, \quad \{r, p_\phi\} = \{\phi, p_r\} = \{r, \phi\} = 0.$$

Уравнения Гамильтона выглядят следующим образом:

$$\dot{r} = \{r, H\} = p_r, \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \frac{p_\phi}{r^4 + r^2}, \quad (4)$$

$$\dot{p}_r = \{p_r, H\} = \frac{2r^3 + r}{(r^2 + r^4)^2} p_\phi^2 + C_3 \frac{p_\phi}{r^4 + r^2}, \quad (5)$$

$$\dot{p}_\phi = \{p_\phi, H\} = -C_3 p_r. \quad (6)$$

Эта гамильтонова система имеет два функционально независимых почти всюду первых интеграла

$$I_1 = H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^4 + r^2} \right) \quad (7)$$

и

$$I_2 = p_\phi + C_3 r, \quad (8)$$

где $C_3 = \lambda_3 = \text{const}$.

Зафиксируем значения первых интегралов $I_1 = C_1 > 0$, $I_2 = C_2$. Основные результаты данной работы — теоремы 2, 3.

Теорема 2. Гамильтонова система (3)–(6) обладает траекториями четырех типов.

Проекция траекторий типа 1 на плоскость (r, ϕ) лежат на внешности круга радиуса r_0 с центром в начале координат и имеют асимптотику $\phi \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow +\infty$. Здесь r_0 — максимальный вещественный корень уравнения

$$f(r) = r^4 + \left(1 - \frac{C_3^2}{2C_1}\right) r^2 + \frac{C_2 C_3}{C_1} r - \frac{C_2^2}{2C_1} = 0. \quad (9)$$

Проекция траекторий типа 2 на плоскость (r, ϕ) лежат в кольце $r_1 < r < r_2$, где r_1, r_2 — вещественные положительные корни уравнения (9), причем $f(r) > 0$ при $r_1 < r < r_2$.

Проекция траекторий типа 3 на плоскость (r, ϕ) являются окружностями и задаются формулами

$$r(t) = r(0) = r_3, \quad \phi(t) = \phi(0) + \frac{C_2 - C_3 r_3}{r_3^4 + r_3^2} t,$$

где r_3 — вещественный положительный корень уравнения (9), удовлетворяющий также уравнению

$$r^3 - \frac{2C_2}{C_3}r^2 - \frac{C_2}{C_3} = 0.$$

Проекция траекторий типа 4 на плоскость (r, ϕ) являются прямыми и задаются формулами

$$r(t) = r(0) \pm t\sqrt{2C_1}, \quad \phi(t) = \phi(0).$$

Теорема 3. 1. Если $C_2 = 0$, то

$$t(r) = \pm \frac{1}{\sqrt{-2C_1}} E\left(\arcsin\left(r\sqrt{\frac{-2C_1}{2C_1 - C_3^2}}\right), \frac{2C_1 - C_3^2}{2C_1}\right),$$

$$\begin{aligned} \phi(r) = \phi_0 \mp \frac{C_3}{4\sqrt{2C_1 - C_3^2}} & (\ln(2C_1 - C_3^2) + 4\ln(r) \\ & - 2\ln(4C_1(1+r^2) - C_3^2(2+r^2) + 2\sqrt{(2C_1 - C_3^2)(1+r^2)}\sqrt{-C_3^2 + 2C_1(1+r^2)})), \end{aligned}$$

где $E(\psi, k^2)$ — эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода. Обратив этот интеграл, можно найти $r(t)$ и, следовательно, $\phi(t)$. В частных случаях, например при $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_3 = 1$, удастся выразить $t(r)$, $\phi(r)$ в элементарных функциях:

$$t(r) = \pm\sqrt{1+r^2} \pm \ln\left|\frac{r}{2+2\sqrt{r^2+1}}\right|, \quad \phi(r) = \phi_0 \pm \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

2. Если $C_3 = 0$ (магнитное поле равно нулю), то имеют место

$$t(r) = \pm \frac{\sqrt{C_1 + \sqrt{\varepsilon}}}{2C_1} (F(\psi, k^2) - E(\psi, k^2)), \quad (10)$$

$$\phi(r) = \pm \frac{i\sqrt{C_1 + \sqrt{\varepsilon}}}{C_2} \Pi(c^2, \theta, m^2), \quad (11)$$

где

$$\varepsilon = C_1(C_1 + 2C_2^2), \quad \psi = i \arcsin\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{C_1(1+r^2)}{-C_1 + \sqrt{\varepsilon}}}\right),$$

$$k^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon} - C_1}{C_2^2} - 1, \quad c^2 = \frac{C_1 + \sqrt{\varepsilon}}{C_2^2} + 2,$$

$$\theta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon} - C_1(1+2r^2)}{2\sqrt{\varepsilon}}}\right), \quad m^2 = \frac{C_1 - \sqrt{\varepsilon}}{C_2^2} + 2,$$

а $F(\psi, k^2)$, $E(\psi, k^2)$ и $\Pi(c^2, \theta, m^2)$ — эллиптические интегралы Лежандра 1-го, 2-го и 3-го рода соответственно (см. [12, 13]). Обратив $t(r)$, можно найти $r(t)$ и, следовательно, $\phi(t)$.

4. Классификация траекторий

Докажем теорему 2. Из (7) следует, что при фиксированных значениях первых интегралов $I_1 = C_1 > 0$, $I_2 = C_2$ выполнено $2C_1 = \dot{r}^2 + \frac{(C_2 - C_3 r)^2}{r^4 + r^2}$,

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2C_1 - \frac{(C_2 - C_3 r)^2}{r^4 + r^2}}. \quad (12)$$

Из (4), (8) следует, что

$$\dot{\phi} = \frac{C_2 - C_3 r}{r^2(r^2 + 1)}. \quad (13)$$

Введем обозначение

$$f(r) = r^4 + \left(1 - \frac{C_3^2}{2C_1}\right)r^2 + \frac{C_2 C_3}{C_1}r - \frac{C_2^2}{2C_1}. \quad (14)$$

Тогда (12) эквивалентно $\dot{r}^2 = 2C_1 \frac{f(r)}{r^4 + r^2}$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — корни уравнения $f(r) = 0$, т. е. $f(r) = (r - \alpha_1)(r - \alpha_2)(r - \alpha_3)(r - \alpha_4)$. В силу теоремы Виета

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \quad (15)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 = \frac{2C_1 - C_3^2}{2C_1}, \quad (16)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -\frac{C_2 C_3}{C_1}, \quad (17)$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -\frac{C_2^2}{2C_1}. \quad (18)$$

Поскольку $-\frac{C_2^2}{2C_1} < 0$, ввиду (18) уравнение $f(r) = 0$ имеет либо два, либо четыре вещественных корня (возможно, кратных). Отметим также, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = +\infty$.

Сначала рассмотрим случай, когда $C_1 C_2 C_3 \neq 0$ и все четыре корня вещественные и простые. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$. Из (18) следует, что возможны два различных случая, которые представлены на рис. 1, 2.

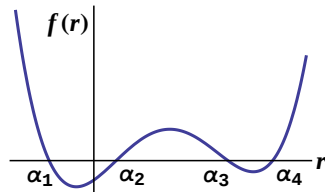


Рис. 1. $C_2 C_3 > 0$, $2C_1 < C_3^2$

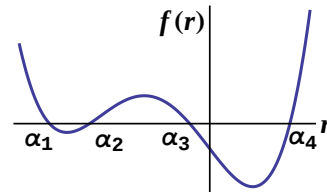


Рис. 2. $C_2 C_3 < 0$, $2C_1 < C_3^2$

В первом случае (рис. 1) $C_2 C_3 > 0$, $2C_1 < C_3^2$ и существуют траектории как на полуинтервале $[\alpha_4, +\infty)$ (траектории типа 1), так и на отрезке $[\alpha_2, \alpha_3]$ (траектории типа 2). В силу (13) имеем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \dot{\phi} = 0.$$

Поэтому проекция любой траектории гамильтоновой системы (3)–(6) типа 1 на параметрическую плоскость $(r(t), \phi(t))$ имеет асимптотику $\phi = \text{const}$ при

$r \rightarrow +\infty$. Пример траектории типа 1 приведен на рис. 3. В этом примере $\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \mp \sqrt{65 - 16\sqrt{10}})$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 2$.

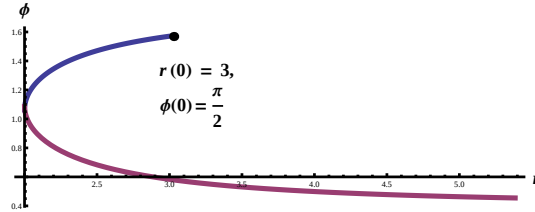


Рис. 3. $C_1 = \frac{7+2\sqrt{10}}{72}$, $C_2 = 1$, $C_3 = \frac{8+\sqrt{10}}{6}$

Исследуем траектории типа 2. В силу (12) $\dot{r} = 0$ в точках $r = \alpha_2, r = \alpha_3$, поэтому $r(t) \in [\alpha_2, \alpha_3]$ для всех t . Ввиду (13) имеем $\dot{\phi} = 0$ в точках $r = \frac{C_2}{C_3}$. Назовем такие точки *точками перегиба*. Докажем, что $\alpha_2 < \frac{C_2}{C_3} < \alpha_3$.

Из (15)–(18) следует, что

$$0 < \frac{C_2}{C_3} = \frac{2\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4)} = \gamma.$$

Ограничим γ сверху:

$$\gamma < \frac{2\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{(\alpha_2 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_3)} < \frac{\alpha_4(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{2(\alpha_2 + \alpha_4)} = \frac{\alpha_4}{2} + \frac{\alpha_4}{2} \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_4} < \alpha_4.$$

Заметим также, что $f(r)|_{r=\gamma} = \frac{C_2^2(C_2^2 + C_3^2)}{C_3^4} > 0$. С учетом предыдущего неравенства имеем $\alpha_2 < \gamma < \alpha_3$.

Таким образом, доказали, что если уравнение $f(r) = 0$ имеет четыре различных вещественных корня, то траектории типа 2 (если они существуют) имеют точки перегиба, а траектории типа 1 точек перегиба не имеют.

Пример проекции траектории типа 2 на горизонтальную плоскость $(\phi(t), r(t))$ приведен на рис. 4.

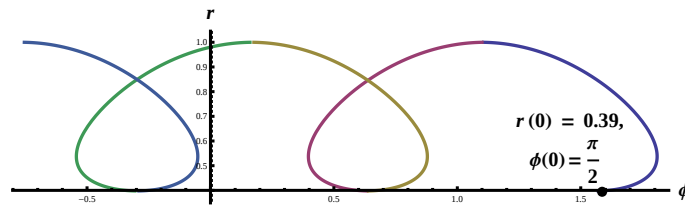


Рис. 4. $C_1 = \frac{7+2\sqrt{10}}{72}$, $C_2 = 1$, $C_3 = \frac{8+\sqrt{10}}{6}$

Во втором случае (рис. 2) $C_2C_3 < 0$, $2C_1 < C_3^2$ и все траектории являются траекториями типа 1.

Траектории, приведенные на рис. 3, 4, были получены численным интегрированием уравнений (12), (13).

Отметим, что в некоторых частных случаях уравнения (3)–(6) интегрируются явно. Рассмотрим случай $C_2 = C_3 = 0$. Тогда

$$r(t) = r(0) \pm t\sqrt{2C_1}, \quad \phi(t) = \phi(0) = \text{const}, \quad p_r = \pm\sqrt{2C_1}, \quad p_\phi = 0,$$

т. е. в этом случае проекции траекторий гамильтоновой системы (3)–(6) на плоскость r, ϕ являются прямыми.

Система (3)–(6) обладает также траекториями, проекции которых на плоскость r, ϕ представляют собой окружности. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $p_r(t) \equiv 0$. Тогда $\dot{r} = 0$, следовательно, движение в плоскости r, ϕ происходит по окружности радиуса r_4 , причем в силу (5), (12), (14) r_4 удовлетворяет следующим уравнениям:

$$r^4 + \left(1 - \frac{C_3^2}{2C_1}\right)r^2 + \frac{C_2C_3}{C_1}r - \frac{C_2^2}{2C_1} = 0, \quad \frac{2r^3 + r}{(r^2 + r^4)^2}(C_2 - C_3r)^2 + C_3 \frac{C_2 - C_3r}{r^2 + r^4} = 0.$$

Несложно показать (например, вычислив результат), что при некоторых значениях первых интегралов C_1, C_2, C_3 эти уравнения имеют общий вещественный положительный корень. Например, при $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-9 + 6\sqrt{3}}, C_3 = 2, r_4 = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$. Заметим, что в этом примере реализуется случай, представленный на рис. 1, когда среди $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ есть один вещественный корень кратности 2, а именно $\alpha_4 = \alpha_3 \neq \alpha_2$.

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае из (15)–(18) следует нетривиальное соотношение, которому удовлетворяют корни (не обязательно вещественные и попарно различные) уравнения $f(r) = 0$, а именно

$$\alpha_2^4(\alpha_3 - \alpha_4)^2 + 2\alpha_2^3(\alpha_3 - \alpha_4)^2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3^2\alpha_4^2 - 2\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\alpha_3 + \alpha_4)(2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) + \alpha_2^2(\alpha_3^4 - 2\alpha_3^3\alpha_4 - 2\alpha_3^2\alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 2\alpha_3\alpha_4(2 + \alpha_4^2)) = 0.$$

С учетом этого соотношения анализ всех остальных случаев идейно не отличается от приведенного только что. Если уравнение $f(r) = 0$ имеет два комплексных и два вещественных корня, то либо вещественные корни оба равны нулю (например, при $C_2 = 0, 2C_1 > C_3^2$), либо они ненулевые и противоположного знака (например, при $C_3 = 0$). В обоих случаях система обладает траекториями типа 1, лежащими на внешности круга (возможно, нулевого радиуса). Случай, когда уравнение $f(r) = 0$ имеет кратные корни, анализируется похожим образом. Отметим, что никаких траекторий системы (3)–(6), отличных от траекторий типов 1–4, нам обнаружить не удалось.

5. Интегрирование уравнений Гамильтона

Перейдем к доказательству теоремы 3.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $C_2 = 0$. Тогда

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2C_1 - \frac{C_3^2 r^2}{r^4 + r^2}} = \pm \sqrt{2C_1 - \frac{C_3^2}{r^2 + 1}}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что $\dot{r} = 0$ тогда и только тогда, когда $2C_1 = \frac{C_3^2}{r^2 + 1}, r = \sqrt{\frac{C_3^2}{2C_1} - 1}$. Поэтому проекции всех траекторий на горизонтальную плоскость $r(t), \phi(t)$ лежат за пределами круга радиуса r_0 с центром в начале координат, где

$$r_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{C_3^2}{2C_1} - 1}, & \text{если } C_3^2 > 2C_1, \\ 0, & \text{если } C_3^2 \leq 2C_1. \end{cases}$$

Уравнение (19) можно проинтегрировать:

$$t = \pm \int \sqrt{\frac{r^2 + 1}{2C_1 r^2 + 2C_1 - C_3^2}} dr = \pm \frac{1}{\sqrt{-2C_1}} E\left(\arcsin\left(r \sqrt{\frac{-2C_1}{2C_1 - C_3^2}}\right), \frac{2C_1 - C_3^2}{2C_1}\right), \quad (20)$$

где $E(\psi, k^2)$ — эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода. В силу (13) имеем

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int \frac{C_3 r}{r \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{2C_1(r^2 + 1)r^2 - C_3^2 r^2}} dr \\ &= \phi(0) - \frac{C_3}{4\sqrt{2C_1 - C_3^2}} (\ln(2C_1 - C_3^2) + 4 \ln(r) \\ &\quad - 2 \ln(4C_1(1 + r^2) - C_3^2(2 + r^2) + 2\sqrt{(2C_1 - C_3^2)(1 + r^2)}\sqrt{-C_3^2 + 2C_1(1 + r^2)})). \end{aligned}$$

При некоторых значениях C_1, C_3 можно выразить $t(r), \phi(r)$ в элементарных функциях. Пусть, например, $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 0, C_3 = 1$. Тогда $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{r^2}{r^2 + 1}}$. Следовательно,

$$t(r) = \pm \sqrt{1 + r^2} \pm \ln \left| \frac{r}{2 + 2\sqrt{r^2 + 1}} \right|.$$

Из уравнения (13) имеем

$$\phi = \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 + 1}},$$

т. е. $\phi(r) = \phi(0) \pm \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}$.

СЛУЧАЙ 2. $C_3 = 0$. В этом случае уравнения (12), (13) также можно проинтегрировать явно, откуда следуют формулы (10), (11).

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taimanov I. A. Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics // J. Dyn. Control Syst. 1997. V. 3, N 1. P. 129–147.
2. Boscaïn U., Rossi F. Invariant Carnot–Carathéodory metrics on $S^3, SO(3), SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, N 4. P. 1851–1878.
3. Myasnychenko O. Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem // J. Dyn. Control Syst. 2002. V. 8, N 4. P. 573–597.
4. Moiseev I., Sachkov Yu. L. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2010. V. 16, N 2. P. 380–399.
5. Берестовский В. Н. Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметрики пространства Минковского // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 3–11.
6. Мажитова А. Д. Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 120–128.
7. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85. (Итоги науки и техники. Динамические системы, Т. 7).
8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
9. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
10. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

11. Мажитова А. Д. Нормальный субриманов геодезический поток на группе $E(2)$, порожденный левоинвариантной метрикой и правоинвариантным распределением // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1160–1166.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
13. Бэйтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 17 июля 2017 г.

Агапов Сергей Вадимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
agapov@math.nsc.ru, agapov.sergey.v@gmail.com

Борчашвили Максим Романович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
maxborchashvili@gmail.com