

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ЧЕЗАРО

С. В. Асташкин

Аннотация. Получена характеристика подпространств пространства L_p , $1 < p < \infty$, на которых нормы L_p и пространства Чезаро Ces_p эквивалентны. Показано, что пространство Ces_p содержит дополняемую копию пространства Чезаро последовательностей ces_p .

DOI 10.17377/smzh.2017.58.604

Ключевые слова: пространство L_p , пространство Чезаро, $\Lambda(p)$ -пространство, изоморфизм.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что нормы многих банаховых пространств, играющих важную роль в функциональном анализе и его приложениях, порождаются L_p -нормами и положительными сублинейными операторами. Одним из интересных примеров пространств этого типа являются пространства Чезаро (другие примеры см. в [1, 2]). Широкую известность последние приобрели в конце 60-х гг. прошлого века в связи с проблемой описания сопряженных к ним, поставленной Математическим обществом Нидерландов [3]. В дальнейшем будут рассматриваться *пространства Чезаро* $\text{Ces}_p := \text{Ces}_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, которые состоят из всех измеримых на $[0, 1]$ функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{C(p)} := \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| ds \right)^p dt \right]^{1/p} < \infty. \quad (1)$$

Заметим прежде всего, что пространства Чезаро «насыщены» подпространствами, изоморфными пространству $L_1[0, 1]$. А именно, для любых $1 < p < \infty$, $0 < a < b < 1$ и $f \in \text{Ces}_p$ таких, что $\text{supp } f := \{t \in [0, 1] : f(t) \neq 0\} \subset [a, b]$, справедливы неравенства [4, лемма 1]

$$(b^{1-p} - 1)^{1/p} \|f\|_1 \leq (p - 1)^{1/p} \|f\|_{C(p)} \leq (a^{1-p} - 1)^{1/p} \|f\|_1. \quad (2)$$

Кроме того, пространство $L_p := L_p[0, 1]$ непрерывно вложено в Ces_p , при этом

$$\|f\|_{C(p)} \leq q \|f\|_p, \quad (3)$$

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки (код проекта 1.470.2016/1.4), а также частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00138).

где всюду далее $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ и $q = p/(p-1)$. Действительно, если $Hf(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds$, то согласно неравенству Харди (см., например, [5, теорема 327])

$$\|f\|_{C(p)} = \|H(|f|)\|_p \leq q\|f\|_p$$

для каждого $1 < p < \infty$ и всех $f \in L^p$.

Вложение $L_p \subset \text{Ces}_p$ собственное для каждого $1 < p < \infty$. Например, несуммируемая на $[0, 1]$ функция $f_0(t) = 1/(1-t)$ принадлежит Ces_p для всех $1 < p < \infty$.

Обозначим через U_p оператор тождественного вложения пространства L_p в пространство Ces_p . Как легко видеть, он не компактен и даже не строго сингулярен. В самом деле, так как система функций Радемахера $\{r_n\}$ (напомним, что $r_n(t) := \text{sgn}(\sin 2^n \pi t)$, $n \in \mathbb{N}$) эквивалентна каноническому базису в l_2 как в L_p (ввиду неравенства Хинчина [6]), так и в Ces_p [7, теорема 1], сужение $U_p|_{[r_n]}$ оператора U_p на подпространство $[r_n]$, порожденное этой системой, является изоморфизмом.

Одна из основных целей этой работы — изучение свойств подпространств X пространства L_p , сужение $U_p|_X$ на которые оператора вложения U_p является изоморфизмом.

Пусть $0 < p < \infty$ и X — замкнутое подпространство пространства $L_p = L_p[0, 1]$. Следуя [8, гл. III, определение 6], X назовем $\Lambda(p)$ -пространством, если сходимость в L_p -норме в X эквивалентна сходимости по мере. Иногда в этом случае также говорят, что X *сильно вложено* в L_p (см., например, [9, определение 6.4.4]). Известно [9, предложение 6.4.5], что X — $\Lambda(p)$ -пространство тогда и только тогда, когда для некоторого (эквивалентно, для любого) $q \in (0, p)$ существует такая константа $C_q > 0$, что

$$\|f\|_p \leq C_q \|f\|_q, \quad f \in X.$$

Как нетрудно видеть, сужение $U_p|_X$ является изоморфизмом в том случае, когда X — произвольное $\Lambda(p)$ -пространство. Действительно, так как Ces_p — банахова функциональная решетка, из сходимости в Ces_p -норме следует сходимость по мере (см., например, [10, гл. IV, § 3, теорема 1]). Поэтому из определения $\Lambda(p)$ -пространства вытекает, что ввиду (3) нормы L_p и Ces_p эквивалентны на X .

Иным, в определенном смысле противоположным, примером подпространства, на котором нормы L_p и Ces_p эквивалентны, является замкнутая линейная оболочка функций $\tilde{f}_n = 2^{n/p} \chi_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]}$, $n = 1, 2, \dots$ [11, теорема 6] (более общие примеры подобного рода см. в [12]). Этот пример показывает также, что оператор вложения U_p не дизъюнктно строго сингулярен (т. е. существует подпространство пространства L_p , порожденное последовательностью попарно дизъюнктных функций, на котором U_p является изоморфизмом; подробнее о свойстве дизъюнктной строгой сингулярности операторов см. обзор [13] и библиографию, содержащуюся там). Как будет доказано далее, приведенные примеры, по существу, исчерпывают все многообразие подпространств L_p , на которых нормы пространств L_p и Ces_p эквивалентны (теорема 1).

Во второй части работы покажем, что пространство Ces_p содержит дополняемое подпространство, изоморфное соответствующему пространству Чезаро последовательностей ces_p (теорема 2). Напомним, что пространство ces_p ,

$1 < p < \infty$, состоит из всех последовательностей (c_k) действительных чисел таких, что

$$\|(c_k)\|_{c(p)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |c_k| \right)^p \right]^{1/p} < \infty. \quad (4)$$

В дальнейшем замкнутое линейное подпространство банахова пространства будет называться просто подпространством. Через $[x_n]$ обозначаем замкнутую линейную оболочку в банаховом пространстве X , порожденную последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из X , а через $\text{supp } f$ — носитель функции f , т. е. множество $\{t \in [0, 1] : f(t) \neq 0\}$. Если X_n , $n = 1, 2, \dots$, — банаховы пространства и $1 \leq p < \infty$, то $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n \right)_{l_p}$ — банахово пространство всех последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$, $n = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\|\{x_n\}\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Наконец, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — канонический базис в пространствах последовательностей, а выражение $F \asymp G$ означает, что $cF \leq G \leq CF$ для некоторых констант $c > 0$ и $C > 0$, не зависящих от всех или части аргументов функций (квазинорм) F и G .

§ 2. О вложении L_p в пространство Чезаро

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $U_p : L_p \rightarrow \text{Ces}_p$ — тождественное вложение, т. е. $U_p x = x$ для всех $x \in L_p$. Тогда если сужение $U_p|_X$, где X — подпространство пространства L_p , является изоморфизмом, то выполнено одно из двух следующих взаимоисключающих условий.

(а) X — $\Lambda(p)$ -пространство.

(б) X содержит последовательность $\{x_m\}$, эквивалентную в Ces_p такой последовательности попарно дизъюнктивных функций $\{y_m\}$, что $\text{supp } y_m \subset [a_m, b_m] \cup [a'_m, b'_m]$, где $b_m \rightarrow 0+$ и $a'_m \rightarrow 1-$. Одновременно $\{x_m\}$ эквивалентна в Ces_p каноническому базису пространства l_p , а подпространство $[x_m]$ дополняемо в Ces_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что X , удовлетворяющее условию теоремы и не являющееся $\Lambda(p)$ -пространством, обладает свойством (б).

Прежде всего согласно известной альтернативе Кадеца — Пелчинского [14] (см. также [9, теорема 6.4.7]) в X существует почти дизъюнктивная последовательность $\{x'_n\}$, $\|x'_n\|_p = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Точнее,

$$\|x'_n - u_n\|_p \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $\{u_n\}$ — последовательность попарно дизъюнктивных функций из L_p . Тогда $\|u_n\|_p \asymp 1$, $n = 1, 2, \dots$, и согласно принципу малых возмущений (см., например, [9, теорема 1.3.9]), переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можно считать, что обе последовательности $\{x'_n\}$ и $\{u_n\}$ эквивалентны каноническому базису в l_p . Кроме того, так как $x'_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, то $\|x'_n\|_{C(p)} \asymp 1$, $n = 1, 2, \dots$, и ввиду неравенства (3) имеем $\|x'_n - u_n\|_{C(p)} \rightarrow 0$. Следовательно, опять в силу принципа малых возмущений (возможно, переходя к подпоследовательностям, для которых сохраняем прежние обозначения) заключаем, что последовательности $\{x'_n\}$ и $\{u_n\}$ эквивалентны каноническому базису в l_p также и в пространстве Ces_p . При этом, как и ранее, $\|u_n\|_{C(p)} \asymp 1$, $n = 1, 2, \dots$.

Покажем, что из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_n\}$, удовлетворяющую условиям из (b). Сначала проверим, что для каждого $h \in (0, 1/2)$

$$\|u_n \chi_{(h, 1-h)}\|_{C(p)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Предполагая противное, найдем $h_0 \in (0, 1/2)$, $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ такие, что

$$\|u_{n_k} \chi_{(h_0, 1-h_0)}\|_{C(p)} \geq \delta, \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу неравенств (2) и попарной дизъюнктности функций u_n , $n = 1, 2, \dots$, для любого $m \in \mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m u_{n_k} \right\|_{C(p)} &\geq \left\| \sum_{k=1}^m u_{n_k} \chi_{(h_0, 1-h_0)} \right\|_{C(p)} \asymp \left\| \sum_{k=1}^m u_{n_k} \chi_{(h_0, 1-h_0)} \right\|_1 \\ &= \sum_{k=1}^m \|u_{n_k} \chi_{(h_0, 1-h_0)}\|_1 \asymp \sum_{k=1}^m \|u_{n_k} \chi_{(h_0, 1-h_0)}\|_{C(p)} \geq m\delta. \end{aligned}$$

С другой стороны, как отмечалось ранее, последовательность $\{u_n\}$ эквивалентна в Ces_p каноническому базису в l_p , поэтому

$$\left\| \sum_{k=1}^m u_{n_k} \right\|_{C(p)} \leq C m^{1/p}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Полученное противоречие показывает, что соотношение (6) имеет место. Следовательно, в частности, существует номер $n_1 \in \mathbb{N}$, для которого

$$\|u_{n_1} \chi_{[0, 1/4] \cup [3/4, 1]} - u_{n_1}\|_{C(p)} \leq \frac{1}{2}.$$

Так как согласно определению (1) и абсолютной непрерывности интеграла для любой функции $f \in \text{Ces}_p$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f \chi_{[0, \varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]}\|_{C(p)} = 0, \quad (7)$$

в силу предыдущего неравенства найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что функция $z_1 := u_{n_1} \chi_{[\varepsilon_1, 1/4] \cup [3/4, 1-\varepsilon_1]}$ удовлетворяет условию

$$\|z_1 - u_{n_1}\|_{C(p)} \leq 1.$$

Отметим, что $\text{supp } z_1 \subset [\varepsilon_1, 1/4] \cup [3/4, 1-\varepsilon_1]$.

Далее, снова применяя (6), найдем номер $n_2 > n_1$, для которого

$$\|u_{n_2} \chi_{[0, \varepsilon_1] \cup [1-\varepsilon_1, 1]} - u_{n_2}\|_{C(p)} \leq \frac{1}{4}.$$

Тогда, как и ранее, ввиду (7) существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что

$$\|z_2 - u_{n_2}\|_{C(p)} \leq \frac{1}{2},$$

где $z_2 := u_{n_2} \chi_{[\varepsilon_2, \varepsilon_1] \cup [1-\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2]}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{z_k\} \subset \text{Ces}_p$ такую, что $\text{supp } z_k \subset [\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}] \cup [1-\varepsilon_{k-1}, 1-\varepsilon_k]$, $\varepsilon_0 = 1/4$, $\varepsilon_k \downarrow 0$ и

$$\|z_k - u_{n_k}\|_{C(p)} \rightarrow 0, \quad \text{если } k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Согласно предложению 3 из [12] существует подпоследовательность $\{z_{k_i}\}$, эквивалентная в Ces_p каноническому базису l_p , такая, что подпространство $[z_{k_i}]$ дополняемо в Ces_p . Заметим, что в силу (5) и (8) имеем

$$\|z_{k_i} - x'_{n_{k_i}}\|_{C(p)} \rightarrow 0.$$

Тем самым, применяя в очередной раз принцип малых возмущений [9, теорема 1.3.9], можно выделить подпоследовательности $\{y_m\} \subset \{z_{k_i}\}$ и $\{x_m\} \subset \{x'_{n_{k_i}}\}$, удовлетворяющие всем требованиям п. (b) теоремы.

В заключение отметим, что условия (a) и (b) взаимно исключают друг друга. Действительно, если выполнено (b), то подпространство X пространства L_p содержит последовательность, которая эквивалентна в Ces_p и в L_p как некоторой последовательности попарно дизъюнктивных функций, так и каноническому базису l_p . Но тогда, очевидно, нормы L_p и L_q при $q < p$ не могут быть эквивалентны на X . Следовательно, X не $\Lambda(p)$ -пространство. $\square$

§ 3. Изоморфные копии пространств ces_p в пространствах Ces_p

Теорема 2. Для каждого $1 < p < \infty$ функциональное пространство Чезаро Ces_p содержит дополняемое подпространство, изоморфное пространству последовательностей ces_p .

Для доказательства теоремы 2 потребуется изоморфное описание пространства ces_p как l_p -суммы конечномерных l_1 -пространств.

Пусть, как и ранее, $q = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Тогда если $w_k := k^{1/q}e_k$, $k = 1, 2, \dots$, то соотношения

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dt}{t^p} &< \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^p}, \\ \int_k^\infty \frac{dt}{t^p} &< \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{n^p} < \int_{k-1}^\infty \frac{dt}{t^p}, \quad k = 2, 3, \dots, \\ \int_s^\infty \frac{dt}{t^p} &= \frac{s^{1-p}}{p-1}, \quad s > 0, \end{aligned}$$

вместе с определением (4) показывают, что для всех $1 < p < \infty$ имеют место неравенства

$$(p-1)^{-1/p} \leq \|w_k\|_{c(p)} \leq 2(p-1)^{-1/p}.$$

Таким образом, $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ — субнормированный базис пространства Чезаро ces_p .

Под l_1^m , $m \in \mathbb{N}$, далее понимаем пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|(c_k)\|_{l_1^m} := \sum_{k=1}^m |c_k|$.

Предложение 3. Пространство ces_p , $1 < p < \infty$, изоморфно пространству $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty l_1^{2^{n-1}} \right)_{l_p}$. Более того, базис $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве ces_p эквивалентен каноническому базису пространства $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty l_1^{2^{n-1}} \right)_{l_p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_{c(p)}^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |c_j| j^{1/q} \right)^p = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |c_j| j^{1/q} \right)^p, \quad (9)$$

откуда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_{c(p)}^p &\geq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-lp} 2^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{2^{l-1}} |c_j| j^{1/q} \right)^p \geq \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-lp} 2^{l-1} \left(\sum_{j=2^{l-2}}^{2^{l-1}} |c_j| j^{1/q} \right)^p \\ &\geq \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-lp} 2^{l-1} 2^{(l-2)(p-1)} \left(\sum_{j=2^{l-2}}^{2^{l-1}} |c_j| \right)^p \geq 2^{-2p} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} |c_j| \right)^p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_{c(p)} \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} |c_j| \right)^p \right)^{1/p}.$$

Докажем противоположное неравенство. Во-первых, ввиду (9)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_{c(p)}^p &\leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-p(l-1)} 2^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{2^{l-1}} |c_j| j^{1/q} \right)^p \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} 2^{(1-p)(l-1)} \left(\sum_{k=1}^l \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} |c_j| j^{1/q} \right)^p \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{(1-p)(l-1)} \left(\sum_{k=1}^l 2^{k/q} \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} |c_j| \right)^p. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского, отсюда получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k \right\|_{c(p)} &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-1)} \left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} |c_j| \right)^p \sum_{l=k}^{\infty} 2^{(1-p)l} \right)^{1/p} \\ &\leq (2^{p-1} - 1)^{-1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} |c_j| \right)^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Как известно [15], для каждого $1 < p < \infty$ справедливо равенство $\text{ces}_p^* = \text{tand}_q$ с эквивалентностью норм, где по-прежнему $q = p/(p-1)$, а tand_q — *пространство Тандори*, состоящее из всех числовых последовательностей $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ таких, что

$$\|(c_k)\|_{\text{tand}_q} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{j \geq i} |c_j|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Как легко видеть, векторы $v_k := k^{-1/q} e_k$, $k = 1, 2, \dots$, образуют нормированный базис пространства tand_q , биортогональный по отношению к базису $\{w_k\}$ пространства ces_p . Тем самым из предложения 3 вытекает

Следствие 4. Пространство tand_p , $1 < p < \infty$, изоморфно пространству $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_{\infty}^{2^{n-1}}\right)_{l_p}$. Более того, базис $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве tand_p эквивалентен каноническому базису пространства $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_{\infty}^{2^{n-1}}\right)_{l_p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду предложения 3 достаточно показать, что пространство $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_1^{2^{n-1}}\right)_{l_p}$ изоморфно некоторому дополняемому подпространству пространства Ces_p .

С учетом неравенства (2) введем две числовые последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $1 > b_1 > a_1 > b_2 > a_2 > \dots > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ и

$$1 < \frac{a_n^{1-p} - 1}{b_n^{1-p} - 1} \leq 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Тогда если $I_n := [a_n, b_n]$, то согласно [12, предложение 1] существует такая подпоследовательность промежутков $\{I'_n\} \subset \{I_n\}$, что для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от p , и произвольной последовательности $\{x_n\} \subset \text{Ces}_p$ такой, что $\text{supp } x_n \subset I'_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеют место неравенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{C(p)}^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|_{C(p)} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{C(p)}^p\right)^{1/p}. \quad (11)$$

Кроме того, подпространство $[x_n]$ дополняемо в Ces_p .

Пусть векторы e_k^n , $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, образуют канонический базис пространства $X_p := \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_1^{2^{n-1}}\right)_{l_p}$, f_k^n , $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, — произвольные попарно дизъюнктные функции такие, что $\|f_k^n\|_1 = 1$ и $\text{supp } f_k^n \subset I'_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$. Так как для любых $c_k^n \in \mathbb{R}$

$$\left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n e_k^n\right\|_{l_1^{2^{n-1}}} = \left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n f_k^n\right\|_1,$$

ввиду неравенств (2) и (10) имеем

$$\frac{\gamma_n}{2} \left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n e_k^n\right\|_{l_1^{2^{n-1}}} \leq \left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n f_k^n\right\|_{C(p)} \leq \gamma_n \left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n e_k^n\right\|_{l_1^{2^{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $\gamma_n := (p-1)^{-1/p}((a'_n)^{1-p} - 1)^{1/p}$.

Определим оператор $T : X_p \rightarrow \text{Ces}_p$ следующим образом: если $(c_k^n) \in X_p$, то

$$T(c_k^n) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n f_k^n.$$

Тогда из (11) и (12), с одной стороны, следует, что

$$\begin{aligned} \|T(c_k^n)\|_{C(p)} &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-p} \left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n f_k^n\right\|_{C(p)}^p\right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n e_k^n\right\|_{l_1^{2^{n-1}}}^p\right)^{1/p} = C \|(c_k^n)\|_{X_p}, \end{aligned}$$

с другой, — что

$$\begin{aligned}\|T(c_k^n)\|_{C(p)} &\geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-p} \left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n f_k^n \right\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k^n e_k^n \right\|_{l_1^{2^{n-1}}}^p \right)^{1/p} = \frac{1}{2} \| (c_k^n) \|_{X_p}.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор T является изоморфным вложением пространства X_p в пространство Ces_p . Заметим, что образ T совпадает с замкнутой линейной оболочкой $[f_k^n]$ в Ces_p . Так как $\text{supp } f_k^n \subset I'_n$, $n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, нетрудно показать, что в силу выбора промежутков I'_n , а также неравенств (11) и (12) подпространство $[f_k^n]$ дополняемо в Ces_p . Тем самым теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mastylo M.* Banach spaces via sublinear operators // *Math. Japon.* 1991. V. 36, N 1. P. 85–92.
2. *Astashkin S. V.* Geometrical properties of Banach spaces generated by sublinear operators // *Positivity.* 2012. V. 17, N 2. P. 223–234.
3. *Jagers A. A.* A note on Cesàro sequence spaces // *Nieuw Arch. Wiskund.* (3). 1974. V. 22. P. 113–124.
4. *Astashkin S. V., Maligranda L.* Cesàro function spaces fail the fixed point property // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2008. V. 136, N 12. P. 4289–4294.
5. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. И., Полиа Г. Неравенства (с доп. В. И. Левина и С. Б. Стечкина). 3-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
6. *Khiintchine A.* Über dyadische Brüche // *Math. Z.* 1923. Bd 18. S. 109–116.
7. *Astashkin S. V., Maligranda L.* Rademacher functions in Cesàro type spaces // *Stud. Math.* 2010. V. 198, N 3. P. 235–247.
8. *Blei R.* Analysis in integer and fractional dimensions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2001. (Camb. Stud. Adv. Math.; V. 71).
9. *Albiac F., Kalton N. J.* Topics in Banach space theory. New York: Springer-Verl., 2006. (Grad. Texts Math.; V. 233).
10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
11. *Astashkin S. V., Maligranda L.* Structure of Cesàro function spaces // *Indag. Math. (N. S.)* 2009. V. 20, N 3. P. 329–379.
12. Асташкин С. В. О геометрических свойствах пространств Чезаро // *Мат. сб.* 2012. Т. 203, № 4. С. 61–80.
13. *Hernandez F. L.* Lattice structures in Orlicz spaces // *Banach Center Publ.* 2004. V. 64. P. 71–84.
14. *Kadec M. I., Pelczyński A.* Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p // *Stud. Math.* 1962. V. 21. P. 161–176.
15. *Bennett G.* Factorizing the classical inequalities. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 120).

Статья поступила 2 марта 2017 г.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С. П. Королева,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
astash56@mail.ru