

ВЫЧИСЛИМОСТЬ ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК

Н. А. Баженов, А. Н. Фролов,
И. Ш. Калимуллин, А. Г. Мельников

Аннотация. Класс (не обязательно дистрибутивных) счетных решеток универсален в смысле Хиршфельда — Хусаинова — Шора — Слинко, а с другой стороны, известно, что класс счетных линейных порядков не универсален относительно как спектров степеней, так и вычислимой категоричности. Исследуется промежуточный класс *дистрибутивных* решеток. Строится дистрибутивная решетка со спектром степеней $\{\mathbf{d} : \mathbf{d} \neq \mathbf{0}\}$. До сих пор неизвестно, существует ли линейный порядок с таким свойством. Установлено, что существует вычислимо категоричная дистрибутивная решетка, не являющаяся относительно Δ_2^0 -категоричной. Хорошо известно, что не существует линейных порядков с таким свойством. Вопрос об универсальности счетных дистрибутивных решеток остается открытым.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.605

Ключевые слова: дистрибутивная решетка, вычислимая структура, спектр степеней, вычислимая категоричность.

1. Введение

Наши исследования согласуются с общей программой исследований, целью которой является прояснение алгоритмических свойств счетных алгебраических структур из ряда естественных классов (таких, как группы, поля, линейные порядки и т. д.). В данной работе изучаем алгоритмические свойства дистрибутивных решеток. Одним из способов сравнить два различных класса является изучение определенных *эффективных инвариантов*, которые реализуются структурами из этих классов, например, совокупность тьюринговых степеней, вычисляющих копии данной структуры, называемая *спектром степеней* этой структуры. Хорошо известно, что любая low_4 булева алгебра изоморфна вычислимой [1], но с другой стороны, существует абелева группа со спектром, состоящим из всех не low_3 степеней [2]. Отсюда следует, что счетные булевы алгебры и счетные абелевы группы существенно отличаются с алгоритмической точки зрения. Но какой же класс алгоритмически более «сложен»? Имеется несколько путей сравнения алгоритмической сложности двух классов (см., например, [3–5]).

Работа выполнена Н. А. Баженовым при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–60058–мол_а_дк), А. Н. Фроловым — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–31–60077–мол_а_дк), И. Ш. Калимуллиным — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–41–02507) и Минобрнауки РФ (код проекта 1.451.2016/1.4), А. Г. Мельниковым — частично при финансовой поддержке Marsden Fund of New Zealand и Massey University Early Career Research Fund.

Предположим, мы намереваемся сравнивать классы с помощью некоторого алгоритмического инварианта (или свойства) P такого, как, например, спектр степеней. Хиршфельдт, Б. Хусаинов, Шор, А. М. Слинко [3] ввели понятие *полного относительно свойства P класса*. Следуя [6], называем такие классы *HKSS-полными*, причем из контекста ясно, какое соответствующее свойство P имеется в виду. Формальное определение HKSS-полных классов можно найти в [3, определение 1.21] (см. также [6, определение 4.6]). Идея здесь следующая: если произвольная счетная структура имеет некоторое важное алгоритмическое свойство, то в HKSS-полном классе K должна быть структура $S \in K$ с тем же самым свойством. Другими словами, понятие HKSS-полноты уточняет интуитивное понятие алгоритмической универсальности класса. Пропуская детали, можно сказать, что, как правило, HKSS-полнота обеспечивается $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}^c$ -определимым функтором из любого класса в HKSS-полный (см. [5]). Наиболее важные алгоритмические свойства включают в себя спектры степеней, алгоритмическую размерность, расширяемость константами и спектры отношений (см. [3]), где можно найти определения и обсуждение этих понятий. Обычно доказывается, что класс HKSS-полный относительно всех этих свойств, и, более того, еще не найдены естественные примеры HKSS-полноты относительно одного свойства, но не относительно другого.

В [3, теорема 3.3] доказано, что класс недистрибутивных решеток HKSS-полон. Отсюда вытекает следующий естественный вопрос.

Проблема. *Является ли класс дистрибутивных решеток полным с алгоритмической точки зрения? Более формально, является ли класс дистрибутивных решеток HKSS-полным?*

Специальный подкласс класса дистрибутивных решеток, а именно класс линейных порядков, был исследован достаточно интенсивно (см. обзорные работы [7, 8]). Несмотря на то, что линейные порядки не универсальны относительно спектра степеней (см., например, [9]), известно много примеров сложных спектров степеней, реализованных в классе линейных порядков [8, 10]. Также хорошо известно, что линейные порядки не универсальны относительно вычислимой категоричности и алгоритмической размерности. Напомним, что под Δ_α^0 -размерностью структуры M понимается число ее вычислимых копий с точностью до Δ_α^0 -изоморфизмов между ними. Структура Δ_α^0 -категорична, если все ее вычислимые копии Δ_α^0 -изоморфны между собой, т. е. в случае, когда Δ_α^0 -размерность есть 1. Известно много результатов о Δ_α^0 -категоричности и Δ_α^0 -размерности линейных порядков. Например, С. С. Гончаров и В. Д. Дзгоев [11] и независимо Реммел [12] доказали, что для вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathcal{L}$ вычислимо категоричен,
- (2) $\mathcal{L}$ относительно вычислимо категоричен,
- (3) множество пар соседних элементов на $\mathcal{L}$ конечно.

Кроме того, в [11] также доказано, что вычислимой размерностью (т. е. Δ_1^0 -размерностью) вычислимого линейного порядка будет либо 1, либо ω . Эш [13] получил полное и исчерпывающее описание Δ_α^0 -категоричных вполне упорядоченных множеств для каждого вычислимого α . Мак-Кой [14, 15] исследовал Δ_2^0 - и Δ_3^0 -категоричности линейных порядков. А. Н. Фролов [16] доказал, что существует линейный порядок, являющийся Δ_3^0 -категоричным, но не относительно Δ_3^0 -категоричным.

Тем не менее не так много известно о дистрибутивных решетках, не яв-

ляющихся линейными порядками. В. Л. Селиванов [17] исследовал вычислимо перечислимые дистрибутивные решетки. Турлингтон [18] доказала, что для любой тьюринговой степени $\mathbf{d}$ существует счетная дистрибутивная решетка со спектром степеней $\{\mathbf{c} : \mathbf{c} \geq \mathbf{d}\}$. Н. А. Баженов [19] показал следующее: для каждого вычислимого последовательного ординала $\alpha \geq 4$ и ненулевого натурального числа n существует дистрибутивная решетка Δ_α^0 -размерности n .

Наши результаты дают хорошие свидетельства в пользу того, что дистрибутивные решетки *могут быть универсальны*. Оставляем вопрос об НКСС-полноте дистрибутивных решеток открытым. С другой стороны, несмотря на то, что линейные порядки не универсальны, некоторые наши результаты дают надежду на то, что они могут быть распространены и на линейные порядки.

В качестве первого основного результата будет доказана

Теорема 1.1. *Существует счетная дистрибутивная решетка, спектр степеней которой состоит в точности из невычислимых тьюринговых степеней.*

В разд. 3 докажем более общий результат, позволяющий кодировать любое семейство конечных множеств в дистрибутивные решетки. Для доказательства теоремы 1.1 останется использовать хорошо известный результат Вехнера [20]. Отметим, что вопрос о существовании линейного порядка с таким спектром степеней до сих пор открыт.

Вторым главным результатом работы будет

Теорема 1.2. *Существует вычислимо категоричная дистрибутивная решетка, не являющаяся относительно Δ_2^0 -категоричной.*

Насколько нам известно, указанное выше свойство выполняется во всех известных естественных НКСС-полных классах. Если дистрибутивные решетки окажутся не НКСС-полными, то это будет первым примером выполнения указанного свойства в неуниверсальных естественных классах. (Под «естественным» классом понимаем класс, не построенный специально, чтобы выполнялись нужные свойства.) В разд. 4 построим вычислимую дистрибутивную решетку, являющуюся вычислимо категоричной, но не относительно вычислимо категоричной. Этот более слабый результат имеет более простое доказательство. Отметим, что этот слабый результат уже контрастирует с выше приведенным результатом о вычислимой категоричности в линейных порядках [11, 12]. В разд. 5 докажем теорему 1.2, расширяя методы, используемые в разд. 4.

2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем решетки как структуры с языком $L_0 = \{\vee, \wedge\}$. Напомним, что решетка называется *ограниченной*, если она имеет наименьший элемент 0 и наибольший элемент 1. Через $PO(\mathcal{D})$ обозначим решетку $\mathcal{D}$, рассматриваемую как частичный порядок.

Пусть даны линейный порядок $\mathcal{L}$ и последовательность частичных порядков $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathcal{L}}$. $\mathcal{L}$ -суммой последовательности $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathcal{L}}$ называется частичный порядок с универсумом $\{(x, n) : n \in \mathcal{L}, x \in \mathcal{A}_n\}$, определенный следующим образом: $(x, n) \leq (y, m)$ тогда и только тогда, когда $n <_{\mathcal{L}} m$ или $(n = m) \& (x \leq_{\mathcal{A}_n} y)$. $\mathcal{L}$ -сумму последовательности $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathcal{L}}$ обозначим через $\mathbf{Sum}(\mathcal{A}_n; \mathcal{L})$.

Несложно доказать следующее утверждение (например, используя идеи из [18, с. 8–10]).

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — линейный порядок и $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \mathcal{L}}$ — последовательность дистрибутивных решеток. Тогда частичный порядок $\mathbf{Sum}(PO(\mathcal{M}_n); \mathcal{L})$*

является дистрибутивной решеткой. Более того, если порядок $\mathcal{L}$ и последовательность $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \omega}$ X -вычислимы, то существует X -вычислимая копия дистрибутивной решетки $\mathbf{Sum}(PO(\mathcal{M}_n); \mathcal{L})$ в языке $\{\vee, \wedge\}$.

Лемма 2.1 позволяет ввести следующую терминологию.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.1. Для X -вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ и X -вычислимой последовательности дистрибутивных решеток $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \mathcal{L}}$ через $\mathbf{Sum}(\mathcal{M}_n; \mathcal{L})$ обозначим X -вычислимую копию дистрибутивной решетки $\mathbf{Sum}(PO(\mathcal{M}_n); \mathcal{L})$.

Если $\mathcal{L}$ содержит в точности k элементов, то будем также писать $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_k$ вместо $\mathbf{Sum}(\mathcal{M}_i; \mathcal{L})$.

Через η обозначим стандартную вычислимую копию порядка рациональных чисел. Фиксируем вычислимую функцию $\gamma : \eta \rightarrow \mathbb{N}$, сюръективную в каждом непустом интервале $\{c \in \eta : a <_\eta c <_\eta b\}$.

Пусть $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \omega}$ есть последовательность дистрибутивных решеток. Если $a \in \eta$ и $\gamma(a) = k$, то полагаем $\mathcal{N}_a = \mathcal{M}_k$. Дистрибутивную решетку $\mathbf{Sum}(\mathcal{N}_a; \eta)$ назовем *перемешанной суммой* последовательности $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \omega}$ (обозначается через $\mathbf{Shuf}(\mathcal{M}_n)$). Легко проверить, что тип изоморфизма $\mathbf{Shuf}(\mathcal{M}_n)$ не зависит от выбора η и γ .

Предложение 2.1 [17, лемма 1]. Существует вычислимая последовательность конечных дистрибутивных решеток $\{\mathcal{D}_n\}_{n \in \omega}$ (рис. 1) такая, что для всех $i \neq j$ решетка $\mathcal{D}_i$ не вкладывается в $\mathcal{D}_j$.

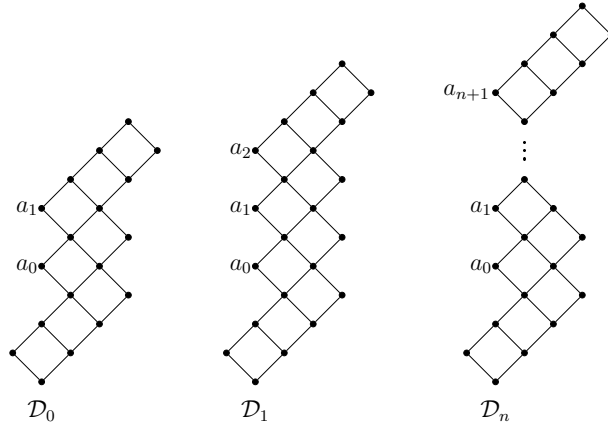


Рис. 1. Решетки $\mathcal{D}_i$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — ограниченные решетки. Тогда через $(\mathcal{A} \oplus_0 \mathcal{B})$ обозначим фактор-решетку $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ относительно конгруэнции

$$E_0 = \{(1^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{B}}), (0^{\mathcal{B}}, 1^{\mathcal{A}})\} \cup \{(x, x) : x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\}.$$

Для набора натуральных чисел $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ через $\mathcal{D}(\bar{a})$ обозначим решетку $(\mathcal{D}_{a_1} \oplus_0 \mathcal{D}_{a_2} \oplus_0 \dots \oplus_0 \mathcal{D}_{a_n})$.

3. Спектры степеней

Пусть $\mathcal{S}$ — счетное семейство подмножеств ω . *Спектром перечисления* семейства $\mathcal{S}$ называют множество всех тьюринговых степеней $\mathbf{d}$ таких, что существует $\mathbf{d}$ -вычислимо перечислимое множество W со следующим свойством:

$$\mathcal{S} = \{\{x : \langle n, x \rangle \in W\} : n \in \omega\}.$$

Первый основной результат статьи (теорема 1.1) следует из более сильного утверждения, приведенного ниже.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{S}$ — счетное семейство конечных подмножеств ω . Существует дистрибутивная решетка $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ такая, что спектр степеней $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ совпадает со спектром перечисления семейства $\mathcal{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для конечного множества $F = \{a_0 <_{\omega} a_1 <_{\omega} \dots <_{\omega} a_{n-1}\}$ положим

$$\text{Perm}(F) = \{(0, a_{\sigma(0)} + 1, a_{\sigma(1)} + 1, \dots, a_{\sigma(n-1)} + 1) : \sigma \text{ — перестановка } n\}.$$

Дополнительно полагаем $\text{Perm}(\emptyset) = \{(0)\}$. Фиксируем функцию $h : \omega \rightarrow \omega^{<\omega}$ с областью значений

$$U = \bigcup_{F \in \mathcal{S}} \text{Perm}(F).$$

Пусть $\mathcal{M}_k = \mathcal{D}(h(k))$ для всех $k \in \omega$. Покажем, что решетка $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \mathbf{Shuf}(\mathcal{M}_k)$ удовлетворяет нужным условиям.

Во-первых, предположим, что тьюрингова степень множества X принадлежит спектру перечисления $\mathcal{S}$, т. е. существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что

$$\mathcal{S} = \{W_{f(n)}^X : n \in \omega\}.$$

Для $n, s \in \omega$ определим конечное множество

$$P_{n,s} = \text{Perm}(W_{f(n),s}^X).$$

Построим X -вычислимую последовательность решеток $\mathcal{A}_j^n$ и X -вычислимую функцию $p(n, s)$. На шаге s работаем с конечным набором конечных решеток $\mathcal{A}_j^{n,s}$, $n \leq s$, $j \leq p(t, s)$, обеспечивая выполнение следующих условий:

- (1) для произвольных $n \leq s$ и $\bar{a} \in P_{n,s}$ существует индекс $j \leq p(n, s)$ такой, что решетки $\mathcal{D}(\bar{a})$ и $\mathcal{A}_j^{n,s}$ изоморфны,
- (2) для произвольных $n \leq s$ и $j \leq p(n, s)$ существует набор $\bar{a} \in P_{n,s}$ такой, что $\mathcal{A}_j^{n,s} \cong \mathcal{D}(\bar{a})$,
- (3) $\mathcal{A}_j^{n,s} \subseteq \mathcal{A}_j^{n,s+1}$ для всех n и j .

Например, предположим, что на шаге s имеем $W_{f(0),s}^X = \{0, 2\}$ и $W_{f(0),s+1}^X = \{0, 1, 2\}$. Тогда на шаге s получим $p(0, s) = 1$, причем $\mathcal{A}_0^{0,s} \cong \mathcal{D}(0, 2)$ и $\mathcal{A}_1^{0,s} \cong \mathcal{D}(2, 0)$. На шаге $s+1$ можно положить $p(0, s+1) = 5$, причем «приклеиваем» копии решетки $\mathcal{D}(1)$ к вершинам решеток $\mathcal{A}_0^{0,s}$ и $\mathcal{A}_1^{0,s}$, получая решетки $\mathcal{A}_0^{0,s+1} = \mathcal{D}(0, 2, 1)$ и $\mathcal{A}_1^{0,s+1} = \mathcal{D}(2, 0, 1)$. Также определяем $\mathcal{A}_j^{0,s+1}$, $2 \leq j \leq 5$, как копии решеток $\mathcal{D}(0, 1, 2)$, $\mathcal{D}(1, 0, 2)$, $\mathcal{D}(1, 2, 0)$ и $\mathcal{D}(2, 1, 0)$ соответственно.

Для $n \in \omega$ и $j \leq \lim_s p(n, s)$ полагаем $\mathcal{A}_j^n = \bigcup_{s \in \omega} \mathcal{A}_j^{n,s}$. Нетрудно видеть,

что $\mathbf{Shuf}(\mathcal{A}_j^n)$ будет X -вычислимой изоморфной копией решетки $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Так как структура $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ не автоморфно тривиальна, из результата Найт [21] следует, что степень $\deg_T(X)$ принадлежит спектру степеней решетки $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

Пусть $\mathcal{A}$ является изоморфной копией решетки $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ и атомная диаграмма $\mathcal{A}$ имеет степень $\mathbf{a}$. Для этого воспользуемся следующей алгебраической леммой.

Лемма 3.1. Предположим, что $k \in \omega$ и $g : \mathcal{D}_k \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ — изоморфное вложение. Тогда существуют индекс $n \in \omega$ и решетка $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ со следующими свойствами:

- (1) $\mathcal{N}$ является копией $\mathcal{M}_n$ в $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;

- (2) $h(n) = (a_0, a_1, \dots, a_{t-1}, k, a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_p)$ для некоторых $p \in \omega$ и $t \leq p$;
 (3) $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_{t-1} \oplus g(\mathcal{D}_k) \oplus \mathcal{N}_{t+1} \oplus \mathcal{N}_{t+2} \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_p$, где $\mathcal{N}_i \cong \mathcal{D}_{a_i}$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим набросок доказательства. Пропущенные детали легко восстановить, следуя [17] или [18, с. 68–71]. Отметим, что если x и y суть несравнимые элементы в $\mathcal{D}_S$, то они должны принадлежать одной и той же копии некоторой $\mathcal{M}_j$ в $\mathcal{D}_S$. Следовательно, все элементы $g(\mathcal{D}_k)$ принадлежат решетке $\mathcal{N}$, являющейся копией $\mathcal{M}_n$ (в $\mathcal{D}_S$) для некоторого n .

Пусть $h(n) = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ и $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_p$, где $\mathcal{N}_i \cong \mathcal{D}_{a_i}$ для всех $i \leq p$. Тогда в силу тех же аргументов, что и в [18], существует $t \leq p$ такое, что $g(\mathcal{D}_k) \subseteq \mathcal{N}_t$. Таким образом, можем считать, что g является изоморфным вложением $\mathcal{D}_k$ в $\mathcal{D}_{a_t}$. В силу предложения 2.1 g является изоморфизмом и $a_t = k$. $\square$

Опишем конструкцию **а**-в.п. перечисления $\nu^{\mathcal{A}}$ семейства $\mathcal{S}$. На шаге s будем строить последовательность наборов $\bar{a}_0^s, \bar{a}_1^s, \dots, \bar{a}_{q(s)}^s$ и последовательность функций $g_0^s, g_1^s, \dots, g_{q(s)}^s$ так, что для каждого $i \leq q(s)$ функция g_i^s является вложением решетки $\mathcal{D}(\bar{a}_i^s)$ в $\mathcal{A}$, причем $g_i^s \subseteq g_i^{s+1}$. Полагаем $q(0) = -1$.

На шаге $s+1$ ищем наименьшее $b \leq s$, для которого существуют $j \leq q(s)$ и вложение $g^* : \mathcal{D}(\bar{a}_j^s, b) \hookrightarrow \mathcal{A}$ со следующими свойствами: $g_j^s \subseteq g^*$ и $y \leq s$ для всех y из области значений g^* . Для найденного b фиксируем наименьшее $j \leq q(s)$ с нужными свойствами. Если такие числа b и j нашлись, то полагаем $\bar{a}_j^{s+1} = (\bar{a}_j^s, b)$ и $g_j^{s+1} = g^*$. После этого находим (наименьшую относительно гёделева номера) конечную функцию g' , являющуюся вложением $\mathcal{D}_0$ в $\mathcal{A}$, такую, что $g' \cap g_i^s = \emptyset$ для всех $i \leq q(s)$. Полагаем $q(s+1) = q(s) + 1$, $\bar{a}_{q(s+1)}^{s+1} = (0)$, и $g_{q(s+1)}^{s+1} = g'$. Если $i \leq q(s)$ и $i \neq j$, то определим $\bar{a}_i^{s+1} = \bar{a}_i^s$ и $g_i^{s+1} = g_i^s$.

Для каждого $n \in \omega$ положим

$$\nu^{\mathcal{A}}(n) = \{m \in \omega : \exists s \text{ (число } (m+1) \text{ встречается в наборе } \bar{a}_n^s)\}.$$

Легко видеть, что перечисление $\nu^{\mathcal{A}}$ является **а**-в.п. Более того, из леммы 3.1 следует, что для каждого n имеем $\nu^{\mathcal{A}}(n) \in \mathcal{S}$. Выбор функции g' в конструкции гарантирует, что для каждого $F \in \mathcal{S}$ существует число m такое, что $\nu^{\mathcal{A}}(m) = F$. Таким образом, $\nu^{\mathcal{A}}$ является перечислением семейства $\mathcal{S}$, так что **а** принадлежит спектру перечисления $\mathcal{S}$. Теорема 3.1 доказана.

Вехнер [20] доказал, что существует семейство $\mathcal{S}_0$ конечных множеств, спектр перечисления которого состоит в точности из всех ненулевых степеней. Данный факт вместе с теоремой 3.1 доказывают существование дистрибутивной решетки, реализующей спектр степеней, полученный Сламаном [22] и Вехнером [20], так что теорема 1.1 доказана.

4. Относительная вычислимая категоричность

Прежде чем доказывать теорему 1.2, дадим подробное доказательство приведенного ниже более простого результата. Теорема 1.2 будет иметь дело с более сложными кодирующими компонентами, но тем не менее основные идеи приведенной ниже конструкции будут также использованы и в доказательстве теоремы 1.2.

Теорема 4.1. *Существует вычислимая дистрибутивная решетка $\mathcal{A}$, являющаяся вычислимо категоричной, но не относительно вычислимо категоричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем эффективное перечисление $\{(\Theta_e, \bar{c}_e)\}_{e \in \omega}$ всех в.п. семейств экзистенциальных L_0 -формул Θ_e с параметрами $\bar{c}_e$. Без ограничения общности можем считать, что каждое Θ_e удовлетворяет следующим условиям:

(1) каждая формула $\psi(\bar{x}, \bar{c}_e) \in \Theta_e$ имеет вид

$$\psi = \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n (\phi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}_e) \& \dots \& \phi_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}_e)),$$

где каждая формула ϕ_i является либо атомной, либо отрицанием атомной;

(2) если ϕ — атомная подформула формулы $\psi \in \Theta_e$, то для ϕ имеет место одно из следующих утверждений:

(2a) $\phi = (t_0 = t_1)$, где каждый терм t_i является либо константой из $\bar{c}_e$, либо переменной,

(2b) $\phi = (t_0 * t_1 = t_2)$, где $*$ $\in \{\vee, \wedge\}$ и каждый t_i является константой из $\bar{c}_e$ или переменной.

Фиксируем также эффективную нумерацию $\{\mathcal{M}_e\}_{e \in \omega}$ всех вычислимых (частичных) L_0 -структур, имеющих носитель ω . Если $e = \langle i, j \rangle$, то можно считать, что $\mathcal{M}_e$ — это частичная структура вида $(\omega; \varphi_i(\cdot, \cdot); \varphi_j(\cdot, \cdot))$.

Вычислимая дистрибутивная решетка $\mathcal{A}$ будет изоморфна перемешанной сумме $\mathbf{Shuf}(\mathcal{B}_k)$, где каждая из структур $\mathcal{B}_k$ имеет следующее свойство: существует такое число $r \in \omega$, что $\mathcal{B}_k$ изоморфно одной из решеток $\mathcal{D}(2r)$, $\mathcal{D}(2r, 2r+1)$ или $\mathcal{D}(2r+1, 2r)$.

Построим структуру $\mathcal{A}$, удовлетворяя следующие требования.

$\mathcal{R}$: $\mathcal{A}$ является перемешанной суммой.

$\mathcal{I}_e$: Если $\mathcal{M}_e \cong \mathcal{A}$, то $\mathcal{M}_e \cong_{\Delta_1^0} \mathcal{A}$.

$\mathcal{S}_j$: $(\Theta_j, \bar{c}_j)$ не является семейством Скотта для структуры $\mathcal{A}$.

Структура $\mathcal{A}$ строится как объединение возрастающей цепочки конечных решеток $\mathcal{A}_s$, $s \in \omega$.

Зафиксируем вычислимую функцию $\gamma : \eta \rightarrow \mathbb{N}$, сюръективную в каждом непустом интервале $\{c : a <_\eta c <_\eta b\}$. Будем говорить, что число $a \in \eta$ является k -раскрашенной коробкой, если $\gamma(a) = k$. Будем считать, что коробки сравниваются в соответствии со стандартным порядком на ω . Решетка $\mathcal{B}$ лежит в коробке a на шаге s , если $\mathcal{B}$ — это подрешетка решетки $\mathcal{A}_s$, имеющая носитель $\{(x, a) : x \in \omega\} \cap |\mathcal{A}_s|$. Коробка a пуста на шаге s , если $\mathcal{A}_s$ не содержит элементов вида (x, a) , $x \in \omega$. Будем пользоваться следующим соглашением: если $a <_\eta b$ и $(x, a), (y, b) \in \mathcal{A}_s$, то $(x, a) <_{\mathcal{A}_s} (y, b)$.

Наша конструкция гарантирует следующее свойство: если две различные k -раскрашенные коробки непусты в конце шага s , то они обязательно содержат изоморфные конечные решетки.

Будем использовать два основных действия для построения $\mathcal{A}$.

1. Положить конечную решетку $\mathcal{N}$ в пустую коробку a : стратегия берет новую копию структуры $\mathcal{N}$ с носителем $\{(x, a) : x \in F\}$, где F — конечное множество, и добавляет ее в решетку $\mathcal{A}_s$.

2. Приклеить конечную решетку $\mathcal{N}$ ко всем k -раскрашенным коробкам: для каждой непустой k -раскрашенной коробки a стратегия осуществляет следующие действия. Если коробка a содержит решетку $\mathcal{B}$, то стратегия «приклеивает» новую копию $\mathcal{N}$ к вершине $\mathcal{B}$. После этой процедуры коробка a содержит изоморфную копию $(\mathcal{B} \oplus_0 \mathcal{N})$.

На шаге s будем говорить, что решетка $\mathcal{N}_0$ *младше*, чем решетка $\mathcal{N}_1$, если существуют цвет k и различные k -раскрашенные коробки a_0 и a_1 со следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{N}_i$ лежит в коробке a_i на шаге s ,
- 2) существует шаг $t < s$, на котором коробка a_0 была непуста, а a_1 была пуста.

Построение $\mathcal{A}$ производится с помощью дерева стратегий T . Без ограничения общности можно считать, что T — вычислимое поддерево $\omega^{<\omega}$. Каждая из стратегий имеет выходы, упорядоченные определенным образом (подробнее см. ниже). Если σ — это стратегия из T , то каждому из выходов σ сопоставлен один из сыновей σ , причем разным выходам сопоставляются разные вершины. На шаге s конструкции осуществляются следующие действия.

- Посещается корень дерева стратегий $\sigma_0 = \emptyset$.
- Если стратегия σ_0 имеет выход $\text{out}0$ (на шаге s), то посещается стратегия σ_1 , являющаяся сыном σ_0 , которому сопоставлен выход $\text{out}0$.
- Если σ_1 имеет выход $\text{out}1$, то посещается стратегия σ_2 , являющаяся сыном σ_1 , соответствующим выходу $\text{out}1$.
- ...
- Если σ_{s-1} имеет выход $\text{out}(s-1)$, то посещается стратегия σ_s , являющаяся сыном σ_{s-1} , соответствующим выходу $\text{out}(s-1)$.

После этого шаг s завершается.

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{R}$. Единственная стратегия, работающая для $\mathcal{R}$ -требования, есть $\emptyset$ (т. е. корень дерева стратегий). Эта вершина имеет единственный выход act . На каждом шаге s она осуществляет следующие действия. Предположим, что $k \in \omega$ и существует (наименьшая) k -раскрашенная коробка a , содержащая некоторую решетку $\mathcal{N}$ в начале шага s . Для каждого такого k $\mathcal{R}$ -стратегия находит наименьшую пустую k -раскрашенную коробку b и кладет $\mathcal{N}$ в коробку b .

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{S}_j$. Пусть σ — $\mathcal{S}_j$ -стратегия и

$$\Theta_j = \{\exists \bar{y}_i \psi_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{c}_j) : i \in \omega\},$$

где каждая формула ψ_i бескванторная.

1. Выберем большое число r и найдем наименьшее k такое, что каждая k -раскрашенная коробка пуста на данном шаге. Обозначим это k через $c(\sigma)$. Пусть a_0 — наименьшая k -раскрашенная коробка. Положим решетку $\mathcal{D}(2r)$ в коробку a_0 и зафиксируем кортеж $\bar{b} = (b_0, b_1, \dots, b_N)$ такой, что добавленная нами новая копия $\mathcal{D}(2r)$ имеет носитель $\{b_0 <_\omega b_1 <_\omega \dots <_\omega b_N\}$. Кортеж $\bar{b}$ выбирается таким образом, что $b_i \notin \bar{c}_j$ для всех $i \leq N$.

2. Для каждой формулы ψ_i , $i \leq s$, ищем кортеж $\bar{d}$ такой, что $\mathcal{A}_s \models \psi_i(\bar{b}, \bar{d}, \bar{c}_j)$.

3. Если такие формула и кортеж нашлись, то приклеиваем решетку $\mathcal{D}(2r + 1)$ ко всем k -раскрашенным коробкам.

4. Ждем следующего шага, на котором σ посещается.

5. Находим наименьшее k_1 такое, что все k_1 -раскрашенные коробки пусты. Обозначим это k_1 через $c_1(\sigma)$. Кладем копию $\mathcal{D}(2r + 1, 2r)$ в наименьшую k_1 -раскрашенную коробку.

Пока стратегия осуществляет поиск на этапе (2), она имеет выход wait . После того как стратегия нашла формулу ψ_i и кортеж $\bar{d}$, она имеет выход act .

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{I}_e$. Пусть σ — $\mathcal{I}_e$ -вершина на дереве стратегий. Вершина σ имеет выходы $\infty, 0, 1, 2, \dots$. Пусть s — текущий шаг, k — число шагов, меньших, чем s , на которых σ имела выход ∞ .

Стратегия σ строит отображение f_σ , используя челночную конструкцию. Полагаем $f_\sigma[0] = \emptyset$.

Пусть $B(\sigma, s)$ — подструктура $\mathcal{A}_s$, содержащая в точности следующие элементы.

(i) Самые младшие $(k+1)$ решеток, лежащих в $c(\tau)$ -раскрашенных коробках, для каждого $\tau \subset \sigma$ такого, что $\tau \hat{\text{wait}} \subseteq \sigma$.

(ii) Самые младшие $(k+1)$ решеток из $c(\tau)$ -раскрашенных коробок и самые младшие $(k+1)$ решеток из $c_1(\tau)$ -раскрашенных коробок для каждого $\tau \subset \sigma$ такого, что $\tau \hat{\text{act}} \subseteq \sigma$ и τ достигла этапа (5).

(iii) Самые младшие l решеток из $c(\tau)$ -раскрашенных коробок и самые младшие l_1 решеток из $c_1(\tau)$ -раскрашенных коробок для каждого $\tau \not\subseteq \sigma$ такого, что τ несравнимо с $\sigma \hat{k}$ и τ есть $\mathcal{S}_j$ -стратегия. Здесь l (соответственно l_1) — минимальное из чисел $k+1$ и количества непустых $c(\tau)$ -раскрашенных (соответственно $c_1(\tau)$ -раскрашенных) коробок в $\mathcal{A}_s$.

(iv) Решетку, лежащую в коробке a , для каждого такого $a \in \omega$, что $\{(x, a) : x \in \omega\} \cap \text{dom}(f_\sigma[s-1]) \neq \emptyset$.

На шаге s ищем изоморфное вложение $g : B(\sigma, s) \hookrightarrow \mathcal{M}_{e,s}$ с условием $g \supseteq f_\sigma[s-1]$. Если такое вложение g нашлось, то ищем подрешетку $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_{e,s}$ (с наименьшим гёделевским номером) такую, что $\mathcal{C}$ изоморфна одной из решеток, описанных в условиях (i)–(iii) выше, и носитель $\mathcal{C}$ не пересекается с областью значений g . Если такая решетка нашлась, то ищем изоморфное вложение $g_1 : (g(B(\sigma, s)) \cup \mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{A}_s$ со свойством $g_1 \supseteq g^{-1}$. Если g_1 нашлось, то σ имеет выход ∞ на шаге s и $f_\sigma[s] = g_1^{-1}$. В противном случае σ имеет выход k и $f_\sigma[s] = f_\sigma[s-1]$.

Конструкция. Для $\mathcal{S}_j$ -стратегий выходы упорядочены как $\text{act} < \text{wait}$. Для $\mathcal{I}_e$ -стратегий выходы упорядочены как $\infty < \dots < 2 < 1 < 0$. Нулевой уровень дерева стратегий выделен для $\mathcal{R}$ -стратегии. Каждый из оставшихся уровней выделен (эффективным образом) для одного из требований $\mathcal{S}_j$ или $\mathcal{I}_e$.

Верификация. Во-первых, заметим, что работа $\mathcal{R}$ -стратегии обеспечивает, что $\mathcal{A}$ является перемешанной суммой конечных дистрибутивных решеток. Следовательно, согласно конструкции $\mathcal{A}$ является вычислимой дистрибутивной решеткой.

Истинный путь — это крайний левый бесконечный путь P приоритетного дерева такой, что любая стратегия вдоль P посещается бесконечно часто. Предположим, что σ является $\mathcal{I}_e$ -стратегией и $k < m < \omega$. Если $\sigma \hat{k}$ посещается на шаге s_1 и $\sigma \hat{m}$ посещается на шаге s_2 , то найдется шаг t такой, что $s_1 < t < s_2$ и σ имеет выход ∞ на шаге t . Используя это наблюдение, нетрудно показать существование истинного пути.

Следующая лемма аналогична лемме 3.1.

Лемма 4.1. Предположим, что $t \in \omega$ и $g : \mathcal{D}_t \hookrightarrow \mathcal{A}$ является изоморфным вложением. Пусть $r = \lfloor t/2 \rfloor$. Существуют $b \in \omega$ и конечная решетка $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ такие, что

- (1) $g(\mathcal{D}_t)$ является подрешеткой $\mathcal{N}$,
- (2) $\mathcal{N}$ является структурой на универсуме $\{(x, b) : x \in \omega\} \cap |\mathcal{A}|$,

- (3) если t нечетно, то существует решетка $\mathcal{N}_0 \cong \mathcal{D}(2r)$ такая, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \oplus_0 g(\mathcal{D}_t)$ или $\mathcal{N} = g(\mathcal{D}_t) \oplus_0 \mathcal{N}_0$,
 (4) если t четно, то $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из следующих свойств:
 (4a) $\mathcal{N} = g(\mathcal{D}_t)$,
 (4b) существует решетка $\mathcal{N}_1 \cong \mathcal{D}(2r + 1)$ такая, что $\mathcal{N} = g(\mathcal{D}_t) \oplus_0 \mathcal{N}_1$ или $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus_0 g(\mathcal{D}_t)$.

Лемма 4.2. Структура $\mathcal{A}$ вычислимо категорична.

Доказательство. Предположим, что некоторая структура $\mathcal{M}_e$ изоморфна $\mathcal{A}$ и σ является $\mathcal{I}_e$ -стратегией вдоль истинного пути.

Для $\mathcal{S}_j$ -стратегии τ предположим, что решетка $\mathcal{N}$ лежит либо в $c(\tau)$ -раскрашенной, либо в $c_1(\tau)$ -раскрашенной коробке. Рассмотрим следующие четыре случая для τ .

(1) Пусть $\tau \subset \sigma$. Так как σ лежит на истинном пути, $\mathcal{N}$ не будет больше расти после того, как σ начнет его рассматривать (т. е. после наименьшего шага s_0 , для которого $\mathcal{N}$ является подструктурой $B(\sigma, s_0)$). Таким образом, если $\mathcal{N}$ лежит в области определения f_σ , то по лемме 4.1 $f_\sigma(\mathcal{N})$ является одним из слагаемых в перемешанной сумме $\mathcal{M}_e$. Другими словами, отображение f_σ является *корректным* на $\mathcal{N}$.

(2) Если τ несравнима с σ , то τ никогда не будет посещена после того, как σ начнет рассматривать $\mathcal{N}$. Следовательно, опять f_σ корректно на $\mathcal{N}$.

(3) Предположим, что $\tau \supseteq \sigma \hat{\infty}$. Тогда возможны два подслучая.

(3a) Если окончательный выход τ — это wait, то, как и в случае (1), f_σ корректно на $\mathcal{N}$.

(3b) Предположим, что окончательный выход τ — это act. Если τ никогда не достигнет этапа (5), то найдется такое r , что $\mathcal{N} \cong \mathcal{D}(2r, 2r + 1)$, и по лемме 4.1 f_σ в конечном счете будет корректным на $\mathcal{N}$. Предположим, что τ достигнет этапа (5). Тогда те решетки, что добавлены τ , в конечном итоге будут изоморфны либо $\mathcal{D}(2r, 2r + 1)$, либо $\mathcal{D}(2r + 1, 2r)$ для некоторого фиксированного r . Предположим, что s_0 — первый шаг, на котором τ достигает этапа (5). Если $\mathcal{N}[s_0]$ лежит в области определения $f_\sigma[s_0]$ на шаге s_0 , то выбор $f_\sigma[s_0]$ гарантирует, что $\mathcal{N}[s_0]$ изоморфно $\mathcal{D}(2r, 2r + 1)$. Таким образом, после шага s_0 решетка $\mathcal{N}$ никогда не вырастет и f_σ корректно на $\mathcal{N}$.

(4) Предположим, что $\tau \supseteq \sigma \hat{k}$ для некоторого $k \in \omega$. Если σ рассматривает $\mathcal{N}$ на некотором шаге s , то σ имеет выход ∞ более, чем k раз после шага s . Следовательно, $\mathcal{N}$ не будет больше расти, и f_σ корректно на $\mathcal{N}$.

Вышеприведенные рассуждения доказывают также следующее утверждение. Если $\mathcal{N}$ является слагаемым из перемешанной суммы $\mathcal{A}$ и существует шаг s такой, что $\mathcal{N}[s] \cap \text{dom}(f_\sigma[s]) \neq \emptyset$, то $f_\sigma(\mathcal{N})$ является слагаемым в перемешанной сумме $\mathcal{M}_e$.

Покажем, что $\sigma \hat{\infty}$ также принадлежит истинному пути. Чтобы это доказать, предположим, что k является истинным выходом σ , т. е. k — количество всех шагов, на которых σ имеет выход ∞ . Пусть s_0 — последний такой шаг. Так как $\mathcal{M}_e \cong \mathcal{A}$ и f_σ корректно на каждом слагаемом из $\mathcal{A}$, найдется шаг $s > s_0$ такой, что σ имеет выход ∞ на шаге s ; противоречие. Следовательно, ∞ является истинным выходом σ .

Поскольку f_σ строится челночной конструкцией, f_σ — вычислимый изоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{M}_e$. $\square$

Лемма 4.3. Решетка $\mathcal{A}$ не является относительно вычислимо категоричной.

Доказательство. Предположим, что σ является $\mathcal{S}_j$ -стратегией вдоль истинного пути. Напомним, что $\bar{b} = b_0, b_1, \dots, b_N$ — набор из этапа (1) $\mathcal{S}_j$ -стратегии σ . Если истинный выход σ — это wait, то не существует формулы $\psi \in \Theta_j$ такой, что $\mathcal{A} \models \psi(\bar{b})$. Предположим, что истинный выход σ — это ast. Зафиксируем формулу ψ_i и набор $\bar{d}$ из этапа (2) для σ . Пусть $\mathcal{N}$ — слагаемое $\mathcal{A}$ такое, что $\bar{b} \in \mathcal{N}$. Заметим, что $\mathcal{N} \cong \mathcal{D}(2r, 2r + 1)$.

Так как $\mathcal{A}$ — перемешанная сумма, найдется слагаемое $\mathcal{N}'$ в $\mathcal{A}$ со следующими свойствами.

- Для каждого $y \in \mathcal{N}'$ выполнено $y \notin (\bar{c}_j \cup \bar{d})$.
- $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_0 \oplus \mathcal{N}'_1$, где $\mathcal{N}'_0 \cong \mathcal{D}(2r + 1)$ и $\mathcal{N}'_1 \cong \mathcal{D}(2r)$.
- Зафиксируем отображение $g : \bar{b} \rightarrow \mathcal{N}'_1$ такое, что g является изоморфизмом решеток, и положим $b'_i = g(b_i)$ для всех $i \leq N$. Тогда для каждого $x \in (\bar{c}_j \cup \bar{d}) \setminus \bar{b}$ и каждого $i \leq N$ имеем

$$(x \leq_{\mathcal{A}} b_i \Leftrightarrow x \leq_{\mathcal{A}} b'_i) \text{ и } (b_i \leq_{\mathcal{A}} x \Leftrightarrow b'_i \leq_{\mathcal{A}} x).$$

Предположим, что $d_k \in \bar{d}$. Тогда положим $d'_k = b'_i$, если существует $i \leq N$ такое, что $d_k = b_i$. Иначе положим $d'_k = d_k$.

Так как ψ_i является бескванторной формулой и $\exists \bar{y}_i \psi_i \in \Theta_j$, нетрудно показать, что $\mathcal{A} \models \psi_i(\bar{b}', \bar{d}', \bar{c}_j)$. Следовательно, наборы $\bar{b}$ и $\bar{b}'$ не автоморфны, но удовлетворяют одной и той же формуле из Θ_j . Таким образом, Θ_j не является семейством Скотта для $\mathcal{A}$. $\square$

Теорема 4.1 доказана.

5. Относительная Δ_2^0 -категоричность

Доказательство теоремы 1.2. Это доказательство расширяет доказательство теоремы 4.1. Все обозначения точно такие же, как и в теореме 4.1.

Для $i, n \in \omega$ зададим частичное отношение $R_{i,n}(x_0, \dots, x_n)$ по правилу: если $a_0, \dots, a_n \in \omega$, то

$$R_{i,n}(a_0, \dots, a_n) = \begin{cases} \text{истинно,} & \text{если } \varphi_i(a_0, \dots, a_n) \downarrow = 1, \\ \text{ложно,} & \text{если } \varphi_i(a_0, \dots, a_n) \downarrow = 0, \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $m \neq n$ и $b_0, \dots, b_m \in \omega$, то договоримся считать значение $R_{i,n}(b_0, \dots, b_m)$ ложным. Отметим следующее: если отношение $R_{i,n}$ всюду определено, то можно естественным образом задать новые отношения

$$(\forall^\infty x_m) R_{i,n}(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \quad 0 \leq m \leq n, \quad (1)$$

где квантор $\forall^\infty x_m$ означает «для всех x_m , за исключением конечного числа». Если $R_{i,n}$ не всюду определено, то положим отношения (1) нигде не определенными.

Пусть $k, l, m \in \omega$, $\bar{c}$ — конечный набор натуральных чисел (возможно, пустой). Определим семейство частичных отношений $\Theta(k, l, m, \bar{c})$ следующим образом:

$$\theta_{k,l,m,n}(x_0, x_1, \dots, x_{\varphi_m(n)}, \bar{c}) = (\forall^\infty y) R_{\varphi_k(n), \varphi_l(n)}(x_0, x_1, \dots, x_{\varphi_m(n)}, \bar{c}, y),$$

$$\Theta(k, l, m, \bar{c}) = \{\theta_{k,l,m,n}(x_0, x_1, \dots, x_{\varphi_m(n)}, \bar{c}) : n \in \omega\}.$$

Если хотя бы одно из значений $\varphi_k(n)$, $\varphi_l(n)$ или $\varphi_m(n)$ не определено, то считаем, что отношение $\theta_{k,l,m,n}$ нигде не определено. Зафиксируем эффективное перечисление $\{(\Theta_j, \bar{c}_j)\}_{j \in \omega}$ всех пар вида $(\Theta(k, l, m, \bar{c}), \bar{c})$.

Пусть вычислимая структура $\mathcal{M}$ обладает в.п. семейством Скотта Ξ , состоящим из Σ_2^c -формул с параметрами $\bar{c} = c_1, \dots, c_m$, и пусть $\{\xi_i(\bar{x}_i, \bar{c}) : i \in \omega\}$ — вычислимое перечисление семейства Ξ . Для Σ_2^c -формулы ψ условие « $\mathcal{M} \models \psi(x_0, \dots, x_n, \bar{c})$ » выполнено в том и только том случае, когда истинно $(\forall^\infty y) R_{i,n+m+1}(\bar{x}, \bar{c}, y)$, где $R_{i,n+m+1}$ — всюду определенное отношение. Более того, индекс i находится эффективно по индексу формулы ψ . Отсюда нетрудно получить, что существует семейство $\Theta(k, l, m, \bar{c})$ такое, что для любых $i \in \omega$ и набора $\bar{x}_i$ из $\mathcal{M}$ выполнено

$$\mathcal{M} \models \xi_i(\bar{x}_i, \bar{c}) \Leftrightarrow \theta_{k,l,m,i}(\bar{x}_i, \bar{c}) \text{ истинно.} \quad (2)$$

Кроме того, отметим, что каждое из отношений $\theta_{k,l,m,i}$ всюду определено.

Будем говорить, что пара $(\Theta(k, l, m, \bar{c}), \bar{c})$ является *потенциальным* Σ_2^c -семейством Скотта для $\mathcal{M}$, если

- существуют в.п. семейство Скотта Ξ для $\mathcal{M}$, состоящее из Σ_2^c -формул с параметрами $\bar{c}$, и вычислимое перечисление $\{\xi_i(\bar{x}_i, \bar{c}) : i \in \omega\}$ семейства Ξ , удовлетворяющие условию (2);
- все отношения $\theta_{k,l,m,i}$, $i \in \omega$, всюду определены.

Из приведенных выше рассуждений следует, что в нашей конструкции достаточно диагонализировать только потенциальные Σ_2^c -семейства Скотта $(\Theta_j, \bar{c}_j)$, $j \in \omega$.

Удовлетворяем следующие требования.

$\mathcal{R}$: $\mathcal{A}$ является перемешанной суммой.

$\mathcal{I}_e$: Если $\mathcal{M}_e \cong \mathcal{A}$, то $\mathcal{M}_e \cong_{\Delta_1^0} \mathcal{A}$.

$\mathcal{S}_j$: $(\Theta_j, \bar{c}_j)$ не является потенциальным Σ_2^c -семейством Скотта для $\mathcal{A}$.

Пусть $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — последовательность натуральных чисел, a_k — наименьший элемент в решетке $\mathcal{D}_{r_k}$, b_k — наибольший элемент в $\mathcal{D}_{r_k}$. Через

$$\mathcal{D}(\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}}) = \mathcal{D}(\dots, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \dots)$$

обозначается фактор-решетка структуры $\mathbf{Sum}(\mathcal{D}_{r_k}; \mathbb{Z})$ относительно конгруэнции

$$E = \{(b_k, a_{k+1}), (a_{k+1}, b_k) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ (x, x) : x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{r_k} \right\}.$$

Решетка $\mathcal{A}$ будет изоморфна перемешанной сумме $\mathbf{Shuf}(\mathcal{B}_k)$, где каждая структура $\mathcal{B}_k$ изоморфна одной из следующих (для некоторых $r, q \in \omega$):

- (A) $\mathcal{D}(2^r(2q+3), 2^r(2q+1), \dots, 2^r \cdot 3) \oplus_0 \mathcal{D}(2^r, 2^r \cdot 3, \dots, 2^r(2q+1))$,
- (B) $\mathcal{D}(2^r(2q+1), 2^r(2q-1), \dots, 2^r \cdot 3) \oplus_0 \mathcal{D}(2^r, 2^r \cdot 3, \dots, 2^r(2q+3))$,
- (C) $\mathcal{D}(2^r(2q+5), 2^r(2q+3), \dots, 2^r \cdot 3) \oplus_0 \mathcal{D}(2^r, 2^r \cdot 3, \dots, 2^r(2q+1))$,
- (D) $\mathcal{D}(2^r(2q+1), 2^r(2q-1), \dots, 2^r \cdot 3) \oplus_0 \mathcal{D}(2^r, 2^r \cdot 3, \dots, 2^r(2q+5))$,
- (E) бесконечной сумме $\mathcal{D}(\dots, 2^r \cdot 5, 2^r \cdot 3, 2^r, 2^r \cdot 3, 2^r \cdot 5, \dots)$.

Предположим, что $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_1$ являются конечными решетками. Определим следующее дополнительное действие для построения $\mathcal{A}$.

$[\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1]$ -СКЛЕИВАНИЕ для всех k -РАСКРАШЕННЫХ КОРОБОК. Для каждой непустой k -раскрашенной коробки a эта процедура склеивания выглядит следующим образом. Если коробка a содержит решетку $\mathcal{B}$, то мы приклеиваем

новую копию $\mathcal{N}_0$ к нижней части $\mathcal{B}$, а копию $\mathcal{N}_1$ — к верхней части $\mathcal{B}$. Другими словами, эта процедура строит изоморфную копию $(\mathcal{N}_0 \oplus_0 \mathcal{B} \oplus_0 \mathcal{N}_1)$ в коробке a .

Стратегия удовлетворения требования $\mathcal{R}$ точно такая же, как и в теореме 4.1.

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{S}_j$. Предположим, что σ является $\mathcal{S}_j$ -стратегией. Вершина σ имеет выходы $\infty, 0, 1, 2, \dots$. Пусть $s > 0$ — текущий шаг, а k — количество шагов, меньших s , на которых σ имеет выход ∞ . Предположим, что

$$\Theta_j = \{(\forall^\infty y)\psi_i(\bar{x}_i, \bar{c}_j, y) : i \in \omega\},$$

где $\psi_i = R_{p_i, q_i}$ для некоторых $p_i, q_i \in \omega$. Будем говорить, что значение $\psi_i(\bar{d})$ *корректно* на шаге s , если выполнено одно из двух условий: либо значение $\varphi_{p_i, s}(\bar{d})$ не определено, либо $\varphi_{p_i, s}(\bar{d}) \downarrow = 1$.

В дальнейшем описании предполагаем, что все вновь добавленные элементы не лежат в $\bar{c}_j$. Пусть $v_0 = w_0 = -1$ и $q_0 = 3$.

1. Пусть $t < s$ — последний шаг, на котором рассматривался σ . Если такого шага не существует, то положим $t = 0$.

2. Если $t = 0$ (т. е. s — первый шаг, на котором σ был посещен), то выберем большое число r . Для каждого $i \in \{1, 2\}$ сделаем следующее. Найдем наименьшее число m_i такое, что каждая m_i -раскрашенная коробка пуста. Обозначим m_i через $c_i(\sigma)$. Пусть a_i — m_i -раскрашенная коробка с наименьшим номером. Положим решетку $\mathcal{D}(2^r)$ в коробку a_i . Зафиксируем набор $\bar{b}_i$, который составляет универсум вновь добавленной копии $\mathcal{D}(2^r)$. Если $i = 1$, то произведем $[0, \mathcal{D}(2^r \cdot 3)]$ -склейку для m_1 -раскрашенных коробок. Если $i = 2$, то сделаем $[\mathcal{D}(2^r \cdot 3), 0]$ -склейку для m_2 -раскрашенных коробок.

3. Если $t \neq 0$ и σ имеет выход ∞ на шаге t , то сделаем $[\mathcal{D}(2^r(q_t - 2)), 0]$ -склейку для всех $c_1(\sigma)$ -раскрашенных и $[0, \mathcal{D}(2^r(q_t - 2))]$ -склейку для всех $c_2(\sigma)$ -раскрашенных коробок.

4. Найдем наименьшую (в смысле гёделевской нумерации) пару (v_s, w_s) такую, что $v_s \leq s$, $w_s \leq s$ и оба $\psi_{w_s}(\bar{b}_1, \bar{c}_j, y)$ и $\psi_{w_s}(\bar{b}_2, \bar{c}_j, y)$ корректны на шаге s для всех y таких, что $v_s \leq y \leq s$. Если такой пары не существует, то положим $v_s = w_s = -1$.

5. Если $t = 0$ или $(v_s, w_s) = (v_t, w_t)$, то σ имеет выход k и $q_s = q_t$.

6. В противном случае сделаем $[0, \mathcal{D}(2^r(q_t + 2))]$ -склейку для всех $c_1(\sigma)$ -раскрашенных и $[\mathcal{D}(2^r(q_t + 2)), 0]$ -склейку для всех $c_2(\sigma)$ -раскрашенных коробок. Стратегия σ имеет выход ∞ , и $q_s = q_t + 2$.

Стратегия для удовлетворения $\mathcal{I}_e$. Пусть σ — $\mathcal{I}_e$ -вершина в дереве стратегий. Действия σ такие же, как в теореме 4.1, с учетом следующих изменений в определении структуры $B(\sigma, s)$.

- В (i) необходимо рассмотреть стратегии $\tau \subset \sigma$ такие, что $\tau^\wedge m \subseteq \sigma$ для некоторого $m \in \omega$.
- В (ii) рассматриваем стратегии $\tau \subset \sigma$ такие, что $\tau^\wedge \infty \subseteq \sigma$. Очевидно, здесь не нужно говорить об этапе (5).

Конструкция. Снова упорядочиваем выходы как $\infty < \dots < 2 < 1 < 0$ и нулевой уровень дерева стратегии выделен для $\mathcal{R}$ -стратегии. Как обычно, дерево стратегий организовано некоторым эффективным образом, и стратегии действуют в порядке приоритета.

Верификация. Заметим, что строящаяся структура $\mathcal{A}$ является перемешанной суммой дистрибутивных решеток. Определим истинный путь приоритетного дерева, как обычно.

Лемма 5.1. *Решетка $\mathcal{A}$ вычислимо категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{M}_e \cong \mathcal{A}$ и σ является $\mathcal{I}_e$ -стратегией вдоль истинного пути. Рассмотрим $\mathcal{S}_j$ -стратегию τ и решетку $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ такие, что $\mathcal{N}$ лежит в $c_i(\tau)$ -раскрашенной коробке для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Сначала необходимо доказать

Утверждение. *Отображение $f_\sigma(x)$ определено для каждого $x \in \mathcal{N}$. Более того, $f_\sigma(\mathcal{N})$ является слагаемым в перемешанной сумме $\mathcal{M}_e$.*

Рассмотрим только нетривиальный случай $\tau \geq \sigma \hat{\infty}$. Пусть s_0 — первый шаг, на котором τ становится доступным. Для простоты предположим, что τ выбрал $r = 0$ и $\mathcal{N}[s_0] \cong \mathcal{D}(1, 3)$.

Так как $\mathcal{M}_e$ изоморфно $\mathcal{A}$, найдется наименьший шаг $s'_0 > s_0$ такой, что $\mathcal{N}[s_0] \subseteq \text{dom}(f_\sigma[s'_0])$. Аналогично лемме 4.2 можно доказать, что все элементы $f_\sigma(\mathcal{N})[s'_0]$ лежат в одном и том же слагаемом $\mathcal{M}_e$. Следовательно, если τ никогда не имеет выход ∞ , то f_σ корректно на $\mathcal{N}$.

Пусть s_1 — первый шаг, на котором τ имеет выход ∞ . Ясно, что $s_1 \geq s'_0$. Имеем $\mathcal{N}[s_1] \cong \mathcal{D}(1, 3, 5)$. После шага s_1 стратегия σ пытается расширить f_σ до $\mathcal{N}[s_1]$. Если σ не удается этого сделать, то рассмотрим слагаемое $\mathcal{B}$ в $\mathcal{M}_e$, которое содержит $f_\sigma(\mathcal{N})[s'_0]$. Неудача σ означает, что решетка $\mathcal{B}$ не изоморфна ни $\mathcal{D}(1, 3, 5)$, ни $\mathcal{D}(5, 3, 1)$. Таким образом, $\mathcal{M}_e \not\cong \mathcal{A}$; противоречие. Следовательно, существует первый шаг $s'_1 > s_1$ такой, что $\mathcal{N}[s_1] \subseteq \text{dom}(f_\sigma[s'_1])$. Если τ никогда не будет посещен после шага s_1 , то снова f_σ корректно на $\mathcal{N}$. Рассмотрим первый шаг $s_2 > s_1$, на котором τ посещается. Заметим, что $s_2 \geq s'_1$ и $\mathcal{N}[s_2] \cong \mathcal{D}(3, 1, 3, 5)$. Если σ не удается расширить f_σ до $\mathcal{N}[s_2]$, то слагаемое $\mathcal{B}$ не изоморфно ни $\mathcal{D}(3, 1, 3, 5)$, ни $\mathcal{D}(5, 3, 1, 3)$. Это означает, что $\mathcal{M}_e \not\cong \mathcal{A}$. Следовательно, можно найти наименьший $s'_2 > s_2$ такой, что $\mathcal{N}[s_2] \subseteq \text{dom}(f_\sigma[s'_2])$. Используя такие же рассуждения, построим последовательность шагов $s_0 < s'_0 \leq s_1 < s'_1 \leq \dots$ такую, что для каждого $m \in \omega$

$$\mathcal{N}[s_{2m+1}] \cong \mathcal{N}[s_{2m}] \oplus_0 \mathcal{D}(2m + 5), \quad \mathcal{N}[s_{2m+2}] \cong \mathcal{D}(2m + 3) \oplus_0 \mathcal{N}[s_{2m+1}],$$

$$\mathcal{N}[s_m] \subseteq \text{dom}(f_\sigma[s'_m]).$$

Рассуждения выше показывают, что структура $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из двух случаев:

(а) $\mathcal{N}$ изоморфна одной из решеток из (A)–(D) и существует шаг s^* такой, что $\mathcal{N}[s^*] \subseteq \text{dom}(f_\sigma[s^*])$ и $\mathcal{N}[s] = \mathcal{N}[s^*]$ для всех $s \geq s^*$,

(б) $\mathcal{N}$ изоморфна решетке из (E) и для каждого $x \in \mathcal{N}$ существует шаг s такой, что $x \in \text{dom}(f_\sigma[s])$.

В обоих случаях отображение f_σ корректно на $\mathcal{N}$. Это завершает наше неформальное объяснение.

Используя это утверждение, нетрудно доказать, что вершина $\sigma \hat{\infty}$ принадлежит истинному пути и f_σ является вычислимым изоморфизмом из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{M}_e$. $\square$

Лемма 5.2. Структура $\mathcal{A}$ не является относительно Δ_2^0 -категоричной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что пара $(\Theta_j, \bar{c}_j)$ является потенциальным Σ_2^c -семейством Скотта для решетки $\mathcal{A}$. Пусть σ — $\mathcal{S}_j$ -стратегия вдоль истинного пути. Зафиксируем наборы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ из шага (2) для σ .

Сначала предположим, что существует $\psi \in \Theta_j$ такое, что

$$\psi(\bar{b}_1) \text{ и } \psi(\bar{b}_2) \text{ истинны.} \quad (3)$$

Зафиксируем наименьшее i такое, что отношение $\psi = (\forall^\infty y)\psi_i(\bar{x}_i, \bar{c}_j, y)$ удовлетворяет (3). Найдем шаг s^* и число v^* такие, что $(v_s, w_s) = (v^*, i)$ для всех $s \geq s^*$. Пусть m — число всех шагов $t \leq s^*$ таких, что σ имеет выход ∞ на шаге t . После шага s^* выход σ будет всегда m . Отсюда следует, что набор $\bar{b}_1$ лежит в одной из решеток в (В), а $\bar{b}_2$ принадлежит решетке в (А). Следовательно, наборы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ не изоморфны, и $(\Theta_j, \bar{c}_j)$ не может быть потенциальным Σ_2^c -семейством Скотта для $\mathcal{A}$.

Предположим, что не существует отношения $\psi \in \Theta_j$, имеющего свойство (3). Тогда значение (v_s, w_s) изменяется бесконечно много раз и истинным выходом σ является ∞ . Таким образом, каждый $\bar{b}_i$ лежит в бесконечной решетке из (Е) и наборы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ автоморфны. Это противоречит предположению о том, что $(\Theta_j, \bar{c}_j)$ является потенциальным Σ_2^c -семейством Скотта для $\mathcal{A}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knight J. F., Stob M. Computable Boolean algebras // J. Symb. Log. 2000. V. 65, N 4. P. 1605–1623.
2. Melnikov A. G. New degree spectra of abelian groups // Notre Dame J. Formal Logic. Advance publication. doi: 10.1215/00294527-2017-0006.
3. Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M. Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // Ann. Pure Appl. Logic. 2002. V. 115, N 1–3. P. 71–113.
4. Fokina E. B., Friedman S.-D. Equivalence relations on classes of computable structures // Mathematical theory and computational practice. Berlin: Springer-Verl., 2009. P. 198–207. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 5635).
5. Harrison-Trainor M., Melnikov A., Miller R., Montalbán A. Computable functors and effective interpretability // J. Symb. Log. 2017. V. 82, N 1. P. 77–97.
6. Montalbán A. Computability theoretic classifications for classes of structures // Proc. Intern. Congr. mathematicians (Seoul, 2014). Seoul: Kyung Moon Sa Co., 2014. V. II. P. 79–101.
7. Downey R. G. Computability theory and linear orderings // Handbook of recursive mathematics. Amsterdam: Elsevier Sci. B.V., 1998. V. 2. P. 823–976.
8. Frolov A., Harizanov V., Kalimullin I., Kudinov O., Miller R. Spectra of high_n and non-low_n degrees // J. Log. Comput. 2012. V. 22, N 4. P. 755–777.
9. Richter L. J. Degrees of structures // J. Symb. Log. 1981. V. 46, N 4. P. 723–731.
10. Miller R. The Δ_2^0 -spectrum of a linear order // J. Symb. Log. 2001. V. 66, N 2. P. 470–486.
11. Гончаров С. С., Дзгоев В. Д. Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 45–58.
12. Remmel J. B. Recursively categorical linear orderings // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83, N 2. P. 387–391.
13. Ash C. J. Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 298, N 2. P. 497–514.
14. McCoy C. F. D. Δ_2^0 -categoricity in Boolean algebras and linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 2003. V. 119, N 1–3. P. 85–120.
15. Мак-Кой Ч. Ф. Д. О Δ_3^0 -категоричности для линейных порядков и булевых алгебр // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 531–552.
16. Фролов А. Н. Эффективная категоричность вычислимых линейных порядков // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 5. С. 638–642.

17. Селиванов В. Л. Об алгоритмической сложности алгебраических систем // Мат. заметки. 1988. Т. 44, № 6. С. 823–832.
18. Turlington A. Computability of Heyting algebras and distributive lattices: PhD thes. Univ. of Connecticut, 2010.
19. Bazhenov N. A. Effective categoricity for distributive lattices and Heyting algebras // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, N 4. P. 600–614.
20. Wehner S. Enumerations, countable structures and Turing degrees // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 7. P. 2131–2139.
21. Knight J. F. Degrees coded in jumps of orderings // J. Symb. Log. 1986. V. 51, N 4. P. 1034–1042.
22. Slaman T. A. Relative to any nonrecursive set // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 7. P. 2117–2122.

Статья поступила 27 ноября 2016 г.

Баженов Николай Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
bazhenov@math.nsc.ru

Фролов Андрей Николаевич, Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Andrey.Frolov@kpfu.ru, Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

Мельников Александр Геннадьевич
The Institute of Natural and Mathematical Sciences,
Massey University, New Zealand
A.Melnikov@massey.ac.nz