

УДК 512.565

РЕШЕТКИ С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ, БЛИЗКИМИ К ДИСТРИБУТИВНОСТИ

А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов

Аннотация. Рассматриваются 3-порожденные решетки, порождающие элементы которых удовлетворяют соотношениям типа $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Если решетка при этом оказывается конечной, получено ее представление в виде диаграммы, для остальных случаев доказана бесконечность соответствующей решетки.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.607

Ключевые слова: определяющие соотношения, свободная решетка, дистрибутивная решетка.

1. Введение

В [1] Оре привел список из семи определяющих соотношений, которые задают свободную дистрибутивную решетку ранга 3. А именно, решетка с порождающими a, b и c и определяющими соотношениями

$$a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b), \quad (1)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (a \wedge b), \quad (2)$$

$$b \vee (a \wedge c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c), \quad (3)$$

$$b \wedge (a \vee c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c), \quad (4)$$

$$c \vee (a \wedge b) = (b \vee c) \wedge (c \vee a), \quad (5)$$

$$c \wedge (a \vee b) = (b \wedge c) \vee (c \wedge a), \quad (6)$$

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \quad (7)$$

изоморфна свободной дистрибутивной решетке ранга 3.

В [2] показана минимальность этой системы среди систем определяющих соотношений, задающих свободную дистрибутивную решетку ранга 3. Для

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

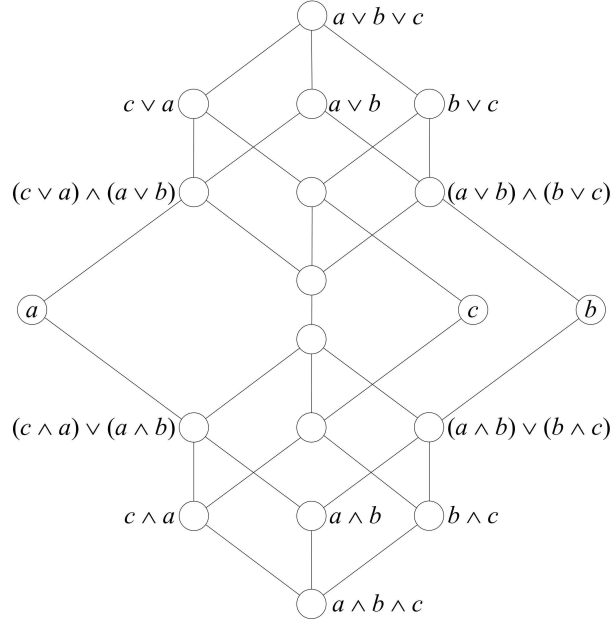


Рис. 1

обоснования этого приведены соответствующие примеры, один из которых изображен на рис. 1. В представленной решетке выполнены соотношения (1)–(6), однако она не дистрибутивна.

В [3] описана 3-порожденная решетка, заданная определяющим соотношением (7). Она конечна и содержит 24 элемента. Этот результат легко приводит к описанию всех решеток, заданных подмножеством соотношений множества (1)–(7), содержащим (7).

В данной статье рассмотрим 3-порожденные решетки, заданные подмножеством соотношений множества (1)–(6).

В дальнейшем пусть L — решетка с элементами a , b и c . Для краткости будем использовать следующие обозначения ее элементов:

$$t = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a), \quad b_t = b \wedge (c \vee a), \quad c_t = c \wedge (a \vee b),$$

$$c_s = c \vee (a \wedge b), \quad s = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a).$$

Хорошо известно, что подмножество элементов

$$M_{st} = \{a \vee b \vee c, c \vee a, a \vee b, b \vee c, (c \vee a) \wedge (a \vee b), (b \vee c) \wedge (c \vee a), (a \vee b) \wedge (b \vee c), t\} \\ \cup \{s, (c \wedge a) \vee (a \wedge b), (b \wedge c) \vee (c \wedge a), (a \wedge b) \vee (b \wedge c), c \wedge a, a \wedge b, b \wedge c, a \wedge b \wedge c\}$$

является подрешеткой решетки L (см., например, [4, лемма I.5.9]). Разумеется, в конкретной решетке L тот или иной ее элемент может оказаться обозначенным несколькими разными формулами этого списка, так что $|M_{st}| \leq 16$. Это неравенство, а также замкнутость M_{st} будут использоваться в доказательствах сформулированных ниже утверждений.

2. Решетка, заданная определяющими соотношениями (1)–(4)

Теорема 1. Решетка с порождающими a, b и c и определяющими соотношениями (1)–(4) изоморфна решетке, изображенной на рис. 2.

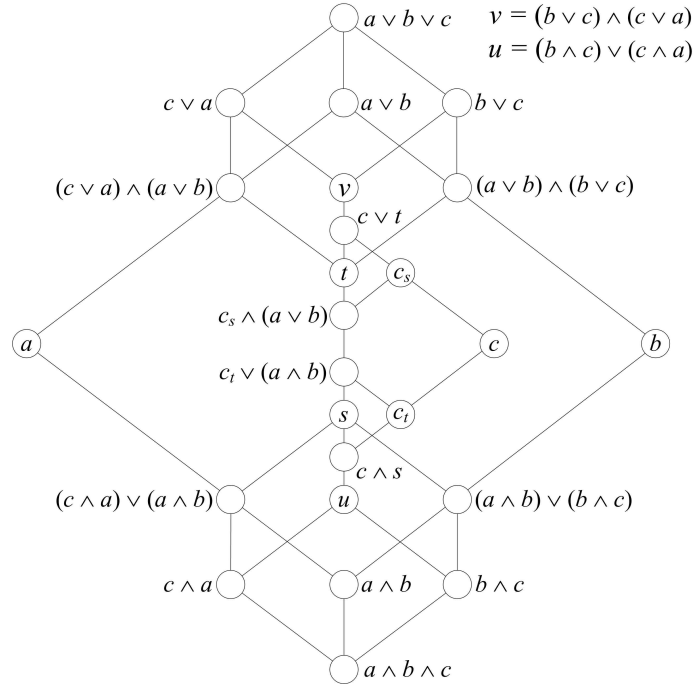


Рис. 2

Доказательство теоремы будет дано после ряда предварительных утверждений. Приведенные доказательства этих утверждений формальны, но для наглядности удобно обращаться к рис. 2.

Подмножество $M_c = \{c \vee t, t, c_s, c_s \wedge (a \vee b), c, c_t \vee (a \wedge b), s, c_t, c \wedge s\}$ так же, как и M_{st} , является подрешеткой решетки L .

Действительно, $c_s \wedge (a \vee b) \geq c_t \vee (a \wedge b)$ в силу неравенства модулярности, а также выполнены очевидные равенства $(c_t \vee (a \wedge b)) \vee c = c_s$ и $(c_s \wedge (a \vee b)) \wedge c = c_t$. Кроме того, $c_s \wedge t = c_s \wedge (a \vee b)$ и $c_t \vee s = c_t \vee (a \wedge b)$, а также $c_s \vee t = c \vee (a \wedge b) \vee t = c \vee t$ и $c_t \wedge s = c \wedge (a \vee b) \wedge s = c \wedge s$. В общем случае эта подрешетка изоморфна свободной решетке, порожденной тремя элементами, два из которых сравнимы (см. [4, гл. 1, § 2]).

Более того, подрешеткой является множество $M_{st} \cup M_c$, о чем свидетельствует следующая

Лемма 1. Множество $M_{st} \cup M_c$ является подрешеткой в любой решетке, содержащей элементы a, b и c .

Доказательство. Покажем, что множество $M_{st} \cup M_c$ замкнуто относительно операции $\wedge$. Естественно, что проверке подлежат только пары несравнимых элементов из разных подмножеств этого объединения.

Пусть $x \in M_{st}$, а $y \in M_c$. Тогда для элемента y есть только пять возможностей: $y = c \vee t$, $y = c_s$, $y = c$, $y = c_t$ и $y = c \wedge s$.

1. Пусть $y = c \vee t$. Поскольку $t \leq c \vee t \leq (b \vee c) \wedge (c \vee a)$, для элемента x выполнено $t < x \leq a \vee b$. Но тогда $t \leq x \wedge (c \vee t) \leq (a \vee b) \wedge (c \vee t) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = t$, откуда $x \wedge y = x \wedge (c \vee t) = t \in M_c$.

2. Пусть $y = c_s$. Поскольку $s \leq c_s \leq (b \vee c) \wedge (c \vee a)$, для элемента x выполнено $t \leq x \leq a \vee b$. Тогда $c_s \wedge (a \vee b) = ((b \vee c) \wedge (c \vee a) \wedge c_s) \wedge (a \vee b) = t \wedge c_s \leq x \wedge c_s \leq c_s \wedge (a \vee b)$, поэтому $x \wedge y = x \wedge c_s = c_s \wedge (a \vee b) \in M_c$.

3. Пусть $y = c$. Если $x \geq t$, то для элемента x снова выполнено $t \leq x \leq a \vee b$. Поэтому $x \wedge y = x \wedge c = x \wedge (c \wedge c_s) = c \wedge (x \wedge c_s) = c \wedge (c_s \wedge (a \vee b)) = c \wedge (a \vee b) = c_t \in M_c$. Если $x \leq s$, то $x \in \{s, (c \wedge a) \vee (a \wedge b), (a \wedge b) \vee (b \wedge c), a \wedge b\}$. Для $x = s$ и $x = a \wedge b$ утверждение очевидно. Из неравенств $c \wedge a \leq c \wedge ((c \wedge a) \vee (a \wedge b)) \leq c \wedge a$ и $b \wedge c \leq ((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \wedge c \leq b \wedge c$ следуют равенства $((c \wedge a) \vee (a \wedge b)) \wedge c = c \wedge a$ и $((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) \wedge c = b \wedge c$, т. е. при $x \leq s$ имеем $x \wedge y = x \wedge c \in M_{st} \cup M_c$.

4. Пусть $y = c_t$. Поскольку $(b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq c_t \leq t$, то $a \wedge b \leq x \leq s$. Тогда $x \wedge y = x \wedge c_t = x \wedge c \wedge (a \vee b) = x \wedge c$, т. е. $x \wedge y \in M_{st} \cup M_c$ по доказанному выше.

5. Пусть, наконец, $y = c \wedge s$. Поскольку $(b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq c \wedge s \leq s$, имеем $a \wedge b \leq x < s$. Тогда $x \wedge y = x \wedge (c \wedge s) = x \wedge c \in M_{st}$.

Самодвойственность множества $M_{st} \cup M_c$ свидетельствует о том, что оно замкнуто и относительно операции $\vee$, т. е. это множество является подрешеткой. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть F — решетка с порождающими a, b и c и определяющими соотношениями (1)–(4). Покажем замкнутость множества $M_{st} \cup M_c \cup \{a, b\}$ относительно операции $\wedge$ в F . Ввиду равноправия элементов a и b проверку достаточно провести только для элемента a . Поскольку $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (a \wedge b)$, равенство $x \wedge a = (c \wedge a) \vee (a \wedge b)$ имеет место для всех $x \in [(c \wedge a) \vee (a \wedge b), b \vee c]$. Оставшиеся элементы, не сравнимые с a , принадлежат объединению интервалов $[(b \wedge c) \vee (c \wedge a), c]$, $[(a \wedge b) \vee (b \wedge c), b]$ и одноэлементного множества $\{b \wedge c\}$. Заметим, что $x \wedge a = c \wedge a$ для всех $x \in [(b \wedge c) \vee (c \wedge a), c]$ и $a \wedge x = a \wedge b$ для всех $x \in [(a \wedge b) \vee (b \wedge c), b]$.

Самодвойственность множества $M_{st} \cup M_c \cup \{a, b\}$, как и множества соотношений (1)–(4), свидетельствует о том, что данное множество замкнуто и относительно операции $\vee$. Стало быть, множество $M_{st} \cup M_c \cup \{a, b\}$ является подрешеткой решетки F . Эта подрешетка содержит не более 25 элементов. Более того, множество $M_{st} \cup M_c \cup \{a, b\}$ содержит порождающие элементы решетки F , и тем самым решетка F совпадает с указанным множеством. Следовательно, F содержит не более 25 элементов.

В то же время изображенная на рис. 2 решетка порождена элементами a, b и c , для которых выполнены соотношения (1)–(4), поэтому она является гомоморфным образом решетки F . Но в изображенной решетке ровно 25 элементов, поэтому этот гомоморфизм является искомым изоморфизмом решеток. $\square$

Следствие 1. Решетка с порождающими a, b и c и пятью определяющими соотношениями из (1)–(6) конечна.

Конечность такой решетки очевидна, так как она является гомоморфным образом решетки, изображенной на рис. 2. Более того, нетрудно проверить, что для каждого набора из пяти определяющих соотношений, содержащихся в (1)–(6), диаграмма соответствующей решетки получается из решетки, изображенной на рис. 2, отождествлением в ней ровно одной тройки и одной пары элементов.

Сформулированное ниже следствие 3 показывает, что построенный Колибаром пример недистрибутивной решетки, удовлетворяющей соотношениям (1)–(6), максимален по количеству содержащихся в ней элементов.

Следствие 2. Решетка с порождающими a, b и c и определяющими соотношениями (1)–(6) изоморфна решетке, изображенной на рис. 1.

Решетка, удовлетворяющая соотношениям (1)–(6), является гомоморфным образом решетки, изображенной на рис. 2. Снова нетрудно проверить, что диаграмма такой решетки получается из решетки, изображенной на рис. 2, отождествлением ровно двух троек и двух пар элементов.

3. Решетка, заданная определяющими соотношениями (1), (2), (3) и (6)

Теорема 2. Решетка с порождающими a, b и c и определяющими соотношениями (1), (2), (3) и (6) изоморфна решетке, изображенной на рис. 3.

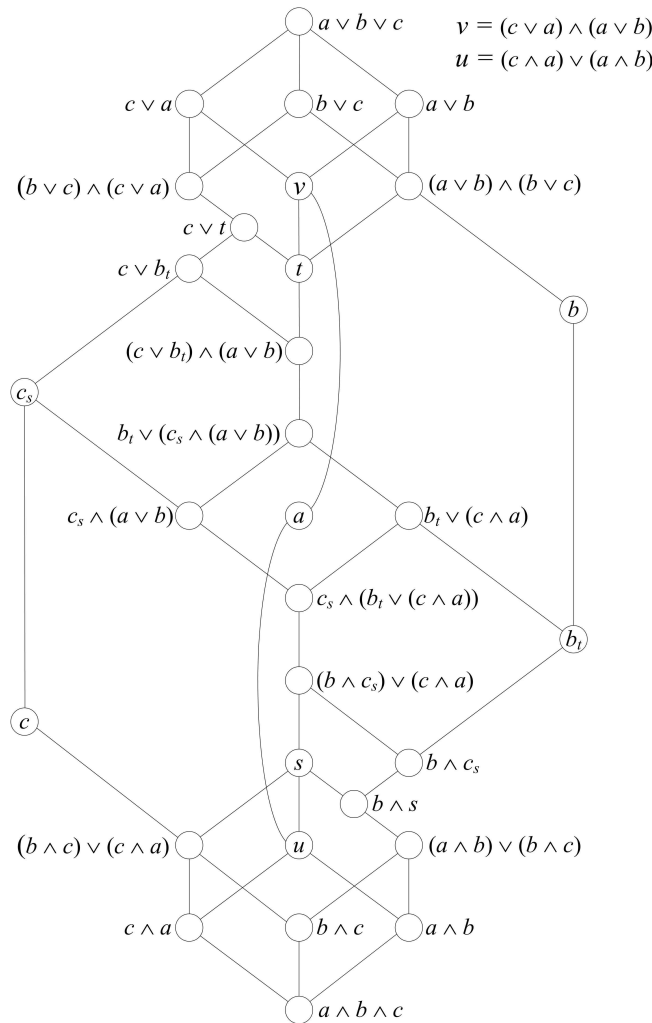


Рис. 3

Доказательство теоремы будет приведено после нескольких вспомогательных утверждений. Рис. 3 и приведенный ниже рис. 4 способствуют, на наш взгляд, лучшему пониманию хода доказательств этих утверждений.

Лемма 2. В любой решетке, содержащей элементы a , b и c , выполнены неравенства

- (1) $b_t \vee (c \wedge a) \leq b_t \vee (c_s \wedge (a \vee b)) \leq (c \vee b_t) \wedge (a \vee b)$,
- (2) $(b \wedge c_s) \vee (c \wedge a) \leq c_s \wedge (b_t \vee (c \wedge a)) \leq c_s \wedge (a \vee b)$,
- (3) $(c \vee b_t) \wedge (a \vee b) \leq t$,
- (4) $s \leq (b \wedge c_s) \vee (c \wedge a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $c \wedge a \leq c_s$ и $c \wedge a \leq a \vee b$, откуда немедленно следует первое неравенство в цепочке (1). Второе неравенство в этой цепочке очевидно в силу неравенства модулярности ввиду $b_t \leq a \vee b$.

Цепочка неравенств (2) двойственна цепочке (1) с взаимным переименованием b и c .

По неравенству модулярности $c \vee b_t = c \vee (b \wedge (c \vee a)) \leq (c \vee b) \wedge (c \vee a)$, так что $(c \vee b_t) \wedge (a \vee b) \leq t$.

Неравенство (4) двойственно неравенству (3) с переименованием b и c . $\square$

Рассмотрим подмножество

$$M_{bc} = \{c \vee t, c \vee b_t, t, (c \vee b_t) \wedge (a \vee b), c_s, b_t \vee (c_s \wedge (a \vee b)), c_s \wedge (a \vee b)\} \\ \cup \{b_t \vee (c \wedge a), c_s \wedge (b_t \vee (c \wedge a)), b_t, (b \wedge c_s) \vee (c \wedge a), s, b \wedge c_s, b \wedge s\}$$

элементов решетки L , содержащей элементы a , b и c . Лемма 2 позволяет изобразить множество M_{bc} диаграммой (рис. 4) как упорядоченное подмножество элементов решетки L (конечно, в той или иной конкретной решетке некоторые элементы этого множества могут совпасть).

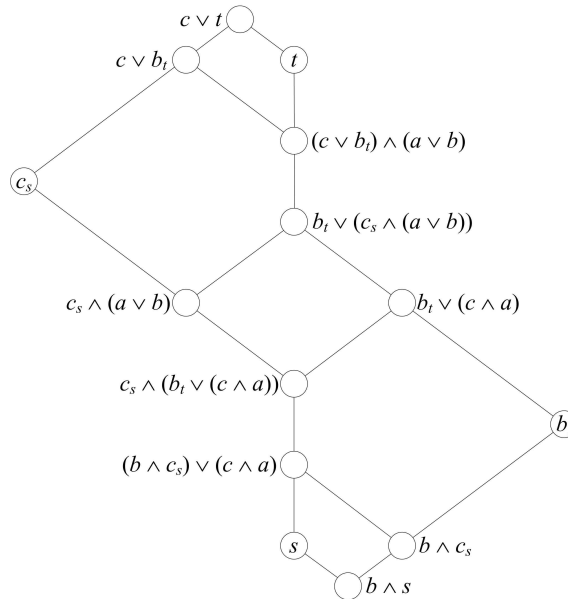


Рис. 4

Лемма 3. Множество M_{bc} является подрешеткой в любой решетке, содержащей элементы a , b и c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость множества $\{c \vee t, c \vee b_t, t, (c \vee b_t) \wedge (a \vee b), c_s, b_t \vee (c_s \wedge (a \vee b)), c_s \wedge (a \vee b)\}$ относительно операции $\wedge$ с очевидностью вытекает из неравенств $c_s \wedge (a \vee b) \leq b_t \vee (c_s \wedge (a \vee b)) \leq (c \vee b_t) \wedge (a \vee b) \leq t \leq a \vee b$.

Замкнутость этого же множества относительно операции $\vee$ также очевидна ввиду цепочки неравенств $b_t \leq b_t \vee (c_s \wedge (a \vee b)) \leq (c \vee b_t) \wedge (a \vee b) \leq c \vee b_t$.

Соображения двойственности с одновременным переименованием b и c показывают, что множество $\{b_t \vee (c \wedge a), c_s \wedge (b_t \vee (c \wedge a)), b_t, (b \wedge c_s) \vee (c \wedge a), s, b \wedge c_s, b \wedge s\}$ также замкнуто относительно обеих операций. Ссылка на неравенства $b_t \leq b_t \vee (c \wedge a) \leq b_t \vee (c_s \wedge (a \vee b))$ и $c_s \wedge (b_t \vee (c \wedge a)) \leq c_s \wedge (a \vee b) \leq c_s$ завершает доказательство леммы. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть F — решетка с порождающими a , b и c и определяющими соотношениями (1), (2), (3) и (6).

Сначала покажем замкнутость множества $M_{st} \cup M_{bc} \cup \{a, b, c\}$ относительно операции $\wedge$ в F . Естественно, что проверке подлежат только пары несравнимых элементов из разных подмножеств, записанных в этом объединении.

Множество элементов, не сравнимых с элементом a и принадлежащих $M_{st} \cup M_{bc} \cup \{a, b, c\}$, содержится в теоретико-множественном объединении интервалов $[(c \wedge a) \vee (a \wedge b), b \vee c]$, $[c \wedge a; c]$, $[a \wedge b; b]$ и $[a \wedge b \wedge c; b \wedge c]$. Если элемент x принадлежит какому-либо из этих интервалов, то $a \wedge x$ совпадает с нижней границей соответствующего интервала ввиду (2).

Множество элементов, не сравнимых с b и принадлежащих $M_{st} \cup M_{bc} \cup \{a, b, c\}$, содержится в теоретико-множественном объединении интервалов $[b_t; c \vee a]$, $[b \wedge c_s; c_s]$, $[b \wedge s; s]$, $[b \wedge c; c]$, $[a \wedge b; a]$ и $[a \wedge b \wedge c; c \wedge a]$. Если элемент x принадлежит какому-либо из этих интервалов, то $b \wedge x$ совпадает с нижней границей соответствующего интервала.

Множество элементов, не сравнимых с элементом c и принадлежащих $M_{st} \cup M_{bc} \cup \{a, b, c\}$, содержится в теоретико-множественном объединении интервалов $[(b \wedge c) \vee (c \wedge a), a \vee b]$, $[c \wedge a; a]$, $[b \wedge c; b]$ и $[a \wedge b \wedge c; a \wedge b]$. Если элемент x принадлежит какому-либо из этих интервалов, то $c \wedge x$ совпадает с нижней границей соответствующего интервала ввиду (6).

Множество M_{bc} имеет только шесть элементов, для которых в множестве M_{st} есть несравнимые. Это $c \vee t$, $c \vee b_t$, c_s , b_t , $b \wedge c_s$ и $b \wedge s$. Поскольку $t \leq (c \vee t) \wedge (a \vee b) \leq ((b \vee c) \wedge (c \vee a)) \wedge (a \vee b) = t$, равенство $(c \vee t) \wedge x = t$ выполнено для любого x из интервала $[t; a \vee b]$, так что $(c \vee t) \wedge x \in M_{bc}$ для любого такого x . В свою очередь, $(c \vee b_t) \wedge x = (c \vee b_t) \wedge (a \vee b) \in M_{bc}$ и $c_s \wedge x = c_s \wedge (a \vee b) \in M_{bc}$ для любого x из интервала $[t; a \vee b]$. С остальными элементами из M_{st} элементы $c \vee t$, $c \vee b_t$, c_s сравнимы.

Что касается элементов b_t , $b \wedge c_s$ и $b \wedge s$, то в M_{st} с ними не сравнимы только элементы s , $(b \wedge c) \vee (c \wedge a)$, $(c \wedge a) \vee (a \wedge b)$ и $c \wedge a$.

Для всех x из интервала $[b \wedge s; b]$ имеем $x \wedge s = b \wedge s$. Для всех x из интервала $[b \wedge c; b]$ имеем

$$((b \wedge c) \vee (c \wedge a)) \wedge x = ((b \wedge c) \vee (c \wedge a)) \wedge c \wedge (x \wedge b) = (b \wedge c) \wedge x = b \wedge c.$$

Для всех x из интервала $[a \wedge b; b]$ имеем

$$((c \wedge a) \vee (a \wedge b)) \wedge x = ((c \wedge a) \vee (a \wedge b)) \wedge a \wedge (x \wedge b) = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge b.$$

Наконец, $(a \wedge c) \wedge x = a \wedge b \wedge c$ для всех $x \leq b$.

Заметим, что при переименовании элементов b и c друг в друга одновременно с заменой операции $\wedge$ операцией $\vee$ и наоборот множество $M_{st} \cup M_{bc} \cup \{a, b, c\}$ остается неизменным, а соотношения (1), (2), (3) и (6) переходят друг в друга. Это означает, что рассматриваемое множество замкнуто не только относительно операции $\wedge$, но и операции $\vee$, т. е. является подрешеткой решетки F .

В то же время это множество содержит порождающие элементы решетки F , поэтому $F = M_{st} \cup M_{bc} \cup \{a, b, c\}$ и, значит, в F не более 31 элемента. Однако легко видеть, что соотношения (1), (2), (3) и (6) выполняются в решетке, изображенной на рис. 3. Тем самым она является гомоморфным образом решетки F для некоторого гомоморфизма. Поскольку в решетке, изображенной на рис. 3, ровно 31 элемент, этот гомоморфизм является изоморфизмом. $\square$

4. Решетка, заданная определяющими соотношениями (1), (2), (3) и (5)

Теорема 3. Решетка с порождающими a, b и c и определяющими соотношениями (1), (2), (3) и (5) бесконечна.

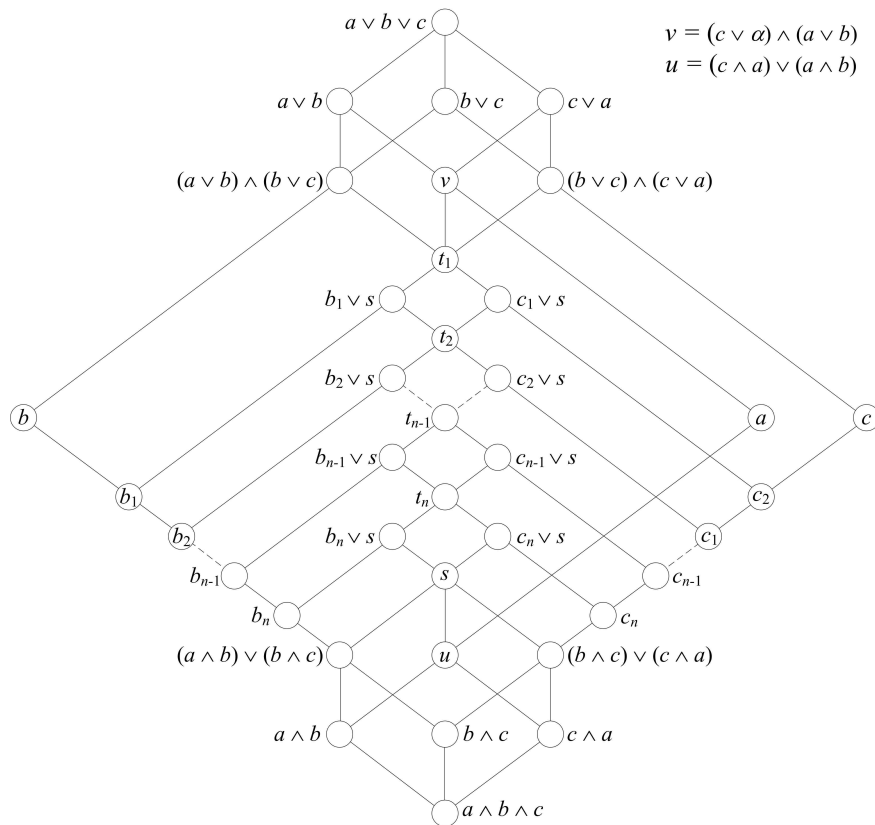


Рис. 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решетку, изображенную на рис. 5. В ней

$$s = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a), \quad t_1 = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a),$$

$$\begin{aligned}b_i &= b \wedge t_i, \quad c_i = c \wedge t_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\t_i &= (b_{i-1} \vee s) \wedge (c_{i-1} \vee s), \quad 2 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что изображенная решетка порождена элементами a , b и c . Легко проверить, что в ней выполняются соотношения (1), (2), (3) и (5).

Пусть F — решетка с порождающими a , b и c и определяющими соотношениями (1), (2), (3) и (5). Тогда решетка, изображенная на рис. 5, является ее гомоморфным образом. Поскольку в изображенной решетке $5n + 18$ элементов, причем n может быть выбрано как угодно большим, решетка F не может быть конечной. $\square$

Следствие 3. Решетка с порождающими a , b и c и не более чем с тремя определяющими соотношениями из (1)–(6) бесконечна.

Доказательство очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore O. Remarks on structures and group relations // Vierteljahrsschrift Naturforschenden Gesellschaft Zurich. 1940. Bd 85, Heft 32. S. 1–4.
2. Kolibiar M. Distributive sublattices of a lattice // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 34, N 2. P. 359–364.
3. Šik F. Modular and distributive equalities in lattices // Mat. Časop. 1973. V. 23, N 4. P. 342–351.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

Статья поступила 13 февраля 2017 г.

Гейн Александр Георгиевич, Шушпанов Михаил Павлович
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
a.g.geyn@urfu.ru, Mikhail.Shushpanov@gmail.com